З. Пресдорф, Б. Зильберманн, Общие теоремы сходимости проекционных методов для операторных уравнений в банаховых пространствах, *Докл. АН СССР*, 1976, том 230, номер 3, 527–529

Доклады Академии наук СССР
1976. Том 230, № 3

УДК 513.88+518 *МАТЕМАТИКА*

З. ПРЕСДОРФ, Б. ЗИЛЬБЕРМАНН

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ СХОДИМОСТИ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 5 III 1976)

В настоящей заметке даются обобщения известных общих теорем сходимости проекционных методов для уравнений типа Риса — Шаудера (см. ([2], [4])) на более общие операторные уравнения вида $Ax+Tx=y$, где A — линейный ограниченный и обратимый оператор, а T — вполне непрерывный или малый (по норме) оператор. Описываются основные свойства линеалов сходимости. Устанавливаются оценки быстроты сходимости и критерии устойчивости рассматриваемого проекционного метода.

Пусть X и Y — банаховы пространства. Обозначим через $L(X, Y)$ множество всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, а через $K(X, Y)$ $(\subset L(X, Y))$ — подмножество вполне непрерывных операторов. Задаем две последовательности (вообще говоря, неограниченных) проекторов $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ с областями определения $D(P_n)\subset X$, $D(Q_n)\subset Y$ и с замкнутыми областями значений $\operatorname{im} P_n\subset X$, $\operatorname{im} Q_n\subset Y$.

Пусть оператор $A\in L(X, Y)$ таков, что $A(\operatorname{im} P_n)\subset D(Q_n)$, а операторы Q_nAP_n: $\operatorname{im} P_n\to\operatorname{im} Q_n$ при $n\geqslant n_0$ непрерывны и (непрерывно) обратимы. Через $\mathfrak{K}(A; \{P_n, Q_n\})$ обозначим совокупность всех элементов $y\in Y$, обладающих следующими тремя свойствами: 1) $y\in D(Q_n)$ при $n\geqslant n'(y)$; 2) последовательность элементов $x_n=(Q_nAP_n)^{-1}Q_ny$ сходится по норме X к некоторому элементу $x\in X$; 3) $Ax=y$. Линейное множество $\mathfrak{K}(A; \{P_n, Q_n\})$ называют л и н е а л о м с х о д и м о с т и п р о е к ц и о н н о г о м е т о д а $\{P_n, Q_n\}$ д л я о п е р а т о р а A.

Т е о р е м а 1. *Пусть оператор $A\in L(X, Y)$ обратим, а оператор $T\in L(X, Y)$ обладает следующими свойствами:*

а) *оператор $A+T$ обратим*;

б) $\operatorname{im} T\subset D(Q_n)$ *и операторы* Q_nT, $n=1, 2, \ldots$, *ограничены*;

в) $\|A^{-1}T-(Q_nAP_n)^{-1}Q_nT\|\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Тогда операторы $Q_n(A+T)P_n$: $\operatorname{im} P_n\to\operatorname{im} Q_n$ *при* $n\geqslant n_1$ *непрерывны и обратимы, и*

$$\mathfrak{K}(A;\{P_n, Q_n\})\subset\mathfrak{K}(A+T;\{P_n, Q_n\}). \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.1 из работы авторов ([1]). Следствием теоремы 1 является

Т е о р е м а 2. *Пусть оператор $A\in L(X, Y)$ обратим, $\mathfrak{K}(A;\{P_n, Q_n\})\supset Z$, где Z — банахово пространство, непрерывно вложенное в Y, $T\in K(X, Z)$ и выполнены следующие условия*:

α) $\dim\ker (A+T)=0$;

β) *сужения* $Q_n|Z\in L(Z, Y)$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 1, *причем в* (1) *имеет место равенство.*

Т е о р е м а 3. *Пусть $A=CB$, где $B\in L(X, Y)$ и $C\in L(Y, Y)$ — обратимые операторы, обладающие следующими свойствами*:

(a) $Q_nBP_nx=BP_nx$ $\forall x\in D(P_n)$, $n=1, 2, \ldots$;

(b) $Q_nC^{\pm 1}Q_ny=Q_nC^{\pm 1}y$ $\forall y\in D(Q_n)$.

Пусть, кроме того, выполнены условия теоремы 1.

Если $y \in \mathfrak{R}(A; \{P_n, Q_n\})$, *а* $x \in X$, $x_n \in \operatorname{im} P_n$ — *соответственно решения уравнений*

$$Ax+Tx=y, \quad Q_n(A+T)x_n=Q_ny,$$

тогда справедлива оценка

$$c_1\|Bx-Q_nBx\|_Y \leqslant \|x-x_n\|_X \leqslant c_2\|Bx-Q_nBx\|_Y,$$

где $c_1, c_2=\mathrm{const}>0$, *а при условии ограниченности проекторов* Q_n — *оценка*

$$\|x-x_n\|_X \leqslant c\|Q_n\|E_n^Y(Bx) \quad (c=\mathrm{const}),$$

где $E_n^Y(f)=\inf\|f-y_n\|_Y \quad (y_n \in \operatorname{im} Q_n)$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3 *и* $Bx \in Z$, *где* $Z \subset Y$ — *банаховы пространства, обладающие свойством*

(c) $\|y-Q_ny\|_Y \to 0 \quad \forall y \in Z, \quad n\to\infty$.

Тогда справедлива оценка

$$\|x-x_n\|_X \leqslant cE_n^Z(Bx).$$

Теорема 4. *Пусть* $A=CB$, *где* $B \in L(X,Y)$ *и* $C \in L(Y,Y)$ — *обратимые операторы, и выполнены предшествующие условия* (b), (c), *а также следующие два условия:*

(a′) $\operatorname{im} BP_n=\operatorname{im} Q_n$, $n=1, 2, \ldots$;

(d) *существует множество* $Z \subset Y$ *такое, что* $C^{-1}(Z) \subset Z$.

Тогда $Z \subset \mathfrak{R}(A; \{P_n, Q_n\})$.

Замечание. В частном случае, когда $X=Y$ и $A=I$ — тождественный оператор, теоремы 1, 3 и следствие 1 доказаны в [2], § 15.

Теорема 5. *Пусть* $A \in L(X,Y)$ *обратим,* $Z \subset \mathfrak{R}(A; \{P_n, Q_n\})$ — *банахово пространство, непрерывно вложенное в* Y, $Q_n|Z \in L(Z,Y)$, $P_n \in L(X,X)$ *и* $P_nx \to x$ *для всех* $x \in X$.

Тогда существует постоянная $\gamma>0$ *такая, что при* $T \in L(X,Z)$, $\|T\|_{X\to Z} < \gamma$ *операторы*

$$\tilde{A}_n=Q_n(A+T)P_n\colon \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} Q_n$$

непрерывны, обратимы $(n \geqslant n_0)$ *и*

$$\mathfrak{R}(A; \{P_n, Q_n\}) \subset \mathfrak{R}(A+T; \{P_n, Q_n\}).$$

Модификацией теоремы 5 является

Теорема 6. *Пусть* $A \in L(X,Y)$ *обратим,* $Z \subset \mathfrak{R}(A; \{P_n, Q_n\})$ — *банахово пространство, непрерывно вложенное в* Y, $\operatorname{im} Q_n \subset Z$, $Q_n|Z \in L(Z,Y)$, $P_n \in L(X,X)$ и $P_nx \to x$ *для всех* $x \in X$. *Пусть далее* $T \in L(X,Y)$.

Тогда существует постоянная $\gamma>0$ *такая, что при* $T(\operatorname{im} P_n) \subset D(Q_n)$ *и* $\|Q_nTP_n\|_{X\to Z}<\gamma$ *имеет место утверждение теоремы 5.*

Рассмотрим теперь помимо уравнения

$$A_nx_n=Q_nf \quad (A_n=Q_nAP_n)$$

еще уравнение

$$(A_n+\Gamma_n)\tilde{x}_n=Q_nf+\delta_n, \tag{2}$$

где $x_n, \tilde{x}_n \in \operatorname{im} P_n$, $\delta_n \in \operatorname{im} Q_n$ и $\Gamma_n\colon \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} Q_n$. Оказывается, что проекционный метод $\{P_n, Q_n\}$ устойчив в следующем смысле (см. [3]).

Теорема 7. *Пусть* $A \in L(X,Y)$ *обратим,* $Z \subset \mathfrak{R}(A; \{P_n, Q_n\})$ — *банахово пространство, непрерывно вложенное в* Y, $\operatorname{im} Q_n \subset Z$ *и сужения* $Q_n|Z \in L(Z,Y)$. *Пусть далее* $f \in Z$.

Тогда существуют не зависящие от n *и* f *положительные постоянные* p, q, γ *такие, что при* $\|\Gamma_n\|_{X\to Z}<\gamma$ *имеют место следующие утверждения*:

1. *Для любого элемента* $\delta_n \in \operatorname{im} Q_n$ *уравнение* (2) *разрешимо* $(n \geqslant n')$;
2. $\|\tilde{x}_n-x_n\|_X \leqslant p\|f\|_Z\|\Gamma_n\|_{X\to Z}+q\|\delta_n\|_Z$.

Результаты настоящей статьи можно применить, например, к методу коллокации для обыкновенных дифференциальных уравнений, сингулярных интегральных или интегродифференциальных уравнений, к методу редукции для сингулярных интегральных уравнений или уравнений Винера — Хопфа, а также к методу Мультоппа для интегродифференциального уравнения Прандтля.

Центральный институт математики и механики
Академии наук ГДР
Берлин

Политехнический институт
Карл-Маркс-Штадт, ГДР

Поступило
5 III 1976

ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. Prößdorf, B. Silbermann,* Mathematische Nachrichten, B. 61, 133 (1974). [2] *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др.,* Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969. [3] *С. Г. Михлин,* Численная реализация вариационных методов, М., 1969. [4] *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов,* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.