



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Бернштейн, Обь абсолютной сходимости тригонометрических рядовъ, *Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер.*, 1914, том 14, выпуск 3, 139–144

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

20 января 2025 г., 09:42:51



Объ абсолютной сходимости тригонометрических рядовъ.

С. Бернштейна.

1. Какъ извѣстно, сходимость тригонометрическаго ряда Фурье

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots \quad (1)$$

для всѣхъ значений переменнй x отнюдь не влечетъ за собою абсолютную сходимость ряда, или, что тоже самое, не является достаточной для сходимости ряда

$$S = |a_0| + |a_1| + |b_1| + \dots + |a_n| + |b_n| + \dots \quad (2)$$

Однако абсолютная сходимость (т. е. сходимость ряда S) имѣетъ мѣсто для широкаго класса функций. А именно, мы докажемъ такую теорему:

Если функция $f(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица

$$|f(x+h) - f(x)| < kh^\alpha$$

степени $\alpha > \frac{1}{2}$, то ея разложение въ тригонометрическій рядъ сходится абсолютно; напротивъ, если $\alpha < \frac{1}{2}$, сходимость тригонометрическаго ряда можетъ не быть абсолютной.

Для доказательства первой части теоремы, мы припомнимъ въ первыхъ результатъ, доказанный впервые Lebesgue'емъ, что для функций $f(x)$, удовлетворяющей условію Липшица степени α , можно указать независимый отъ m коэффициентъ λ такой, что остатокъ ея строки Фурье

$$\left| \sum_{n=m}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| = |R_m(x)| < \frac{\lambda \log m}{m^\alpha} \quad (m > 1) \quad (3)$$

Кромѣ того, намъ понадобится слѣдующая лемма:

Пусть тригонометрическая сумма

$$P(x) = A_1 \cos k_1 x + A_2 \cos k_2 x + \dots + A_n \cos k_n x + A_{n+1} \sin k_{n+1} x + \dots + A_n \sin k_n x,$$

состоящая изъ n членовъ, гдѣ k_1, k_2, \dots какія угодно цѣлыя числа, остается по численному значенію меньше 1, т. е. $|P_n(x)| < 1$, въ такомъ случаѣ

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| < \sqrt{2n}. \quad (4)$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_n^2(x) dx = A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 < 2.$$

Но, если $A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2 = M$, то $|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$ достигаетъ своего наибольшаго значенія, когда $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, т. е. не превышаетъ $n \sqrt{\frac{M}{n}} = \sqrt{Mn}$. Поэтому въ данномъ случаѣ

$$|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| < \sqrt{2n}.$$

Соединяя эти два результата, получимъ первую часть нашей теоремы. Для этого группируемъ члены нашего ряда Фурье такимъ образомъ:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=m} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \sum_{n=2m+1}^{n=2m} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \\ + \sum_{n=2m+1}^{n=4m} a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots,$$

гдѣ m произвольное цѣлое число (напр., $m=2$). Тогда, вслѣдствіе неравенства (3),

$$\left| \sum_{n=2m+1}^{n=2m} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| \leq \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| + \\ + \left| \sum_{n=2m+1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| < \frac{2\lambda \log m}{m^2}, \\ \left| \sum_{n=2m+1}^{n=4m} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right| < \frac{2\lambda \log 2m}{(2m)^2} \text{ и т. д.}$$

Поэтому на основаніи доказанной леммы,

$$\sum_{n=m+1}^{n=2m} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda \log m}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}}, \quad \sum_{n=2m+1}^{n=4m} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda \log 2m}{(2m)^{\alpha-\frac{1}{2}}} \text{ и т. д.,}$$

откуда

$$\sum_{n=m+1}^{n=\infty} |a_n| + |b_n| < \frac{4\lambda}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}} \left[\log m + \frac{\log 2m}{2^{\alpha-\frac{1}{2}}} + \frac{\log 4m}{4^{\alpha-\frac{1}{2}}} + \dots \right] = \\ = \frac{4\lambda}{m^{\alpha-\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{2^{\alpha-\frac{1}{2}}} \right) \left[\log m + \frac{\log 2}{2^{\alpha-\frac{1}{2}} - 1} \right].$$

Такимъ образомъ первая часть теоремы доказана.

2. Для доказательства второй части нашего утвержденія, очевидно, достаточно построить функции $f(x)$, удовлетворяющія условію Липшица

степени $\alpha < \frac{1}{2}$, сколь угодно близкой къ $\frac{1}{2}$, для которыхъ однако рядъ Фурье абсолютно не сходится.

Съ этой цѣлью, для всякаго простаго числа $p > 2$, строимъ тригонометрическую сумму порядка $p-1$

$$f_p(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_{p-1} \cos(p-1)x + b_{p-1} \sin(p-1)x, \quad (5)$$

опредѣляемую условиями, что $f_p\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)$, $f'_p\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 0$, при $x=0, 1, \dots, p-1$, гдѣ $\left(\frac{k}{p}\right)$ есть символъ Лежандра, равный $+1$ или -1 , въ зависимости отъ того, является ли число k квадратичнымъ вычетовъ p или нѣтъ [при $k=0$, символъ $\left(\frac{k}{p}\right) = 0$]. Эту сумму мы получимъ воспользовавшись формулой Jackson'a:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \frac{\sin^2\left[\frac{1}{2}p\left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)\right]}{p^2 \sin^2\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{2k\pi}{p}\right)\right]} = \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_{p-1} \cos(p-1)x + b_{p-1} \sin(p-x)x,$$

гдѣ

$$a_i = \frac{2(p-b)}{p^2} \sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \cos \frac{2kl\pi}{p}, \quad b_i = \frac{2(p-l)}{p^2} \sum_{k=0}^{k=p-1} f\left(\frac{2k\pi}{p}\right) \sin \frac{2kl\pi}{p}.$$

Jackson ¹⁾ приходитъ къ этой весьма интересной формулѣ, исходя изъ рассмотрѣнія интеграла Fejer'a, и замѣчаетъ, что, при $k=0, 1, \dots, p-1$, $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$. Но эти p равенствъ были бы недостаточны для опредѣленія $(2p-1)$ коэффициентовъ a_i, b_i , еслибы функція $F(x)$ не обладала еще важнымъ свойствомъ, которое нетрудно провѣрить, а именно, $F'\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 0$, (при $k=0, 1, \dots, p-1$); это доставляетъ еще $(p-1)$ условия, которые связываютъ a_i и b_i равенствами $la - (p-l)a_{p-l} = 0$, $lb_1 + (p-l)b_{p-l} = 0$.

Такимъ образомъ формула Jackson'a есть не что иное, какъ точная интерполяционная формула для опредѣленія тригонометрической суммы

¹⁾ Jackson. A formula of trigonometric interpolation. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1914).

$F(x)$ порядка $(p-1)$ по условиям $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = f\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$, $F'\left(\frac{2k\pi}{p}\right) = 0$.

Существенное свойство формулы (6), указанное Jackson'ом и которое вытекает из тождества

$$\sum_{k=0}^{k=p-1} \frac{\sin^2 \left[\frac{1}{2} p \left(x - \frac{2k\pi}{p} \right) \right]}{p^2 \sin^2 \left[\frac{1}{2} \left(x - \frac{2k\pi}{p} \right) \right]} = 1,$$

заключается в том, что, при всяком x

$$|F(x)| \leq M,$$

где M наибольшее из значений $F\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ при $k=0, 1, \dots, p-1$.

Применяя все это к интересующему нас случаю, находим, что функция $f_p(x)$, определенная вышеуказанными условиями, равна

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{l=1}^{l=p-1} \left(\frac{l}{p}\right) (p-l) \cos lx \quad (\text{при } p=4\mu+1) \quad (7)$$

и

$$f_p(x) = \frac{2}{p^{3/2}} \sum_{l=1}^{l=p-1} \left(\frac{l}{p}\right) (p-l) \sin lx \quad (\text{при } p=4\mu+3) \quad (7^{bis})$$

В самом деле, на основании известных из теории квадратичных вычетов свойств сумм Гаусса,

$$a_l = \frac{2(p-l)}{p^2} \sum_{k=0}^{k=p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \cos \frac{2kl\pi}{p} = \frac{2(p-l)}{p^{3/2}} \left(\frac{l}{p}\right), \quad b_l = 0,$$

если $p=4\mu+1$, и

$$a_l = 0, \quad b_l = \frac{2(p-l)}{p^2} \sum_{k=1}^{k=p-1} \left(\frac{k}{p}\right) \sin \frac{2kl\pi}{p} = \frac{2(p-l)}{p^{3/2}} \left(\frac{l}{p}\right),$$

если $p=4\mu+3$. Итак, в обоих случаях,

$$\sum_{l=1}^{l=p-1} |a_l| + |b_l| = \frac{2}{p^{3/2}} [1 + 2 + \dots + (p-1)] = \frac{p-1}{\sqrt{p}}.$$

Сопоставляя этот результат с доказанной выше леммой заключаем, что, если p есть число простое вида $4\mu+1$, то наибольшее возможное значение S суммы модулей коэффициентов в $P(x) = \sum_{k=1}^{k=p-1} a_k \cos kx$ удовлетворяет неравенству ¹⁾

$$\frac{p-1}{\sqrt{p}} \leq S \leq \sqrt{2(p-1)}, \quad (8)$$

1) Весьма вероятно, что в действительности $S = \frac{p-1}{\sqrt{p}}$; однако доказательство представляет некоторые трудности, которые я еще не предпринял вполне. (См. мою заметку в Comptes Rendus, июнь 1914 г.).

при условии, что $|P(x)| \leq 1$; если же $p=4\mu+3$, то соответствующее утверждение относится къ выражению $P(x) = \sum_{k=1}^{k=p-1} b_k \sin kx$.

Выбравъ указаннымъ выше образомъ $f_p(x)$, строимъ тригонометрической рядъ

$$F(x) = \frac{\cos 2px}{\sqrt{p}} f_p(x) + \frac{\cos 2p_1x}{\sqrt{p_1}} f_{p_1}(x) + \dots + \frac{\cos 2p_nx}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x) + \dots \quad (9)$$

гдѣ $p, p_1, \dots, p_n, \dots$ суть какія-нибудь простые числа, удовлетворяющія неравенствамъ $3p_n < p_{n+1} < 6p_n - 2$, возможность которыхъ вытекаетъ изъ постулата Бертрана, доказаннаго Чебышевымъ.

Замѣчая, что сумма модулей коэффициентовъ въ $\frac{\cos 2p_nx}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x)$ равна $\frac{p_n-1}{p_n}$, убѣждаемся, вопервыхъ, что сумма абсолютныхъ значений коэффициентовъ тригонометрическаго ряда $F(x)$ бесконечно возрастаетъ. Между тѣмъ

$$\left| \sum_{n=n_0}^{n=\infty} \frac{\cos 2p_nx}{\sqrt{p_n}} f_{p_n}(x) \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{n=\infty} \frac{1}{\sqrt{p_n}} < \frac{1}{\sqrt{3p_{n_0}}} + \frac{1}{\sqrt{9p_{n_0}}} + \dots = \frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_{n_0}}}.$$

Слѣдовательно, функція $F(x)$ допускаетъ приближеніе равное $\frac{1}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p_n}}$ при помощи тригонометрической суммы любого порядка m не выше $3p_{n_0+1} - 2 < 18p_{n_0} - 14$; а потому на основаніи теоремы 12 (и § 17) моей книги «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій и т. д.» можемъ утверждать, что $F(x)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени $\alpha < \frac{1}{2}$, сколь угодно близкой къ $\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

3. Закончу свою статью новымъ доказательствомъ теоремы, что условіе абсолютной сходимости тригонометрическаго ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad (1)$$

для всѣхъ значений x равнозначно ¹⁾ сходимости

$$S = \sum_{n=0}^{n=\infty} (|a_n| + |b_n|). \quad (2)$$

1) Эта теорема впервые доказана въ работѣ Fatou «Séries trigonométriques et séries de Taylor» (Acta Mathematica, t. XXX, 1906 г.); затѣмъ она была обобщена Н. Н. Лузинымъ въ статьѣ «Къ абсолютной сходимости тригонометрическихъ рядовъ» (Мат. Сборн., т. XXVIII). Поэтому я не могу согласиться съ замѣчаніемъ проф. А. П. Шнеборскаго въ его отзывѣ о моей докторской диссертации, что въ теоремѣ 79 я ошибочно смѣшиваю оба эти условія. Быть можетъ, при случаѣ, мнѣ придется остановиться еще на нѣкоторыхъ разногласіяхъ съ моимъ глубокоуважаемымъ оппонентомъ.

Очевидно, во-первыхъ, что изъ абсолютной сходимости ряда (1) при $x=0$ вытекаетъ абсолютная сходимость $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$; такимъ образомъ нужно только доказать, что изъ сходимости ряда $\sum |b_n \sin nx|$ вытекаетъ сходимость ряда $\sum |b_n|$. Для этого, очевидно, достаточно доказать теорему:

Если

$$\sum_{n=0}^{n=m+1} \left| b_n \sin \frac{2\pi nk}{2m+1} \right| \leq M,$$

при $k=1, 2, \dots, 2m$, то

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1} |b_n| \leq 2mM \operatorname{tg} \frac{\pi}{4m+2},$$

при предположеніи, что $2m+1$ есть число простое.

Въ самомъ дѣлѣ, складывая неравенства, соответствующія всѣмъ значеніямъ k , получимъ

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1} \sum_{k=1}^{k=2m} \left| b_n \sin \frac{2\pi nk}{2m+1} \right| \leq 2mM;$$

но

$$\sum_{k=1}^{k=2m} \left| \sin \frac{2\pi nk}{2m+1} \right| = 2 \sum_{k=1}^{k=m} \sin \frac{2\pi nk}{2m+1} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{2m+1}}{\sin \frac{\pi}{2m+1}}.$$

Слѣдовательно ¹⁾,

$$\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2m+1}}{\sin \frac{\pi}{2m+1}} \sum_{n=1}^{n=2m+1} |b_n| \leq 2mM,$$

т. е.

$$\sum_{n=1}^{n=2m+1} |b_n| \leq \frac{2mM \sin \frac{\pi}{2m+1}}{1 + \cos \frac{\pi}{2m+1}} = 2mM \operatorname{tg} \frac{\pi}{4m+2}.$$

Такимъ образомъ, полагая m бесконечно возрастающимъ, находимъ что неравенство $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n \sin nx| \leq M$, при всякомъ x , влечетъ за собой

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \frac{\pi}{2} M$. Весьма вѣроятно, что численный коэффициентъ $\frac{\pi}{2}$ не можетъ быть болѣе уменьшенъ.

¹⁾ Не трудно видѣть, что знакъ равенства имѣть мѣсто тогда и только тогда, когда $|b_1| = |b_2| = \dots = |b_{2m+1}|$.