В. И. Таланов, Стимулированная диффузия, дифференциация и кооперация компонент в распределенных кинетических системах, *Докл. АН СССР*, 1981, том 258, номер 3, 604–607

ванная внутренними волнами, является одним из эффективных механизмов воздействия внутренних волн на поверхностные. Распады же первого порядка являются сносовыми, так как $\frac{\partial\Omega}{\partial p} = V_0 + \frac{1}{4}Lp$ (как следует из (10)), однако они могут разыгрываться в области $V_ф \sim V_2$ для волновых пакетов, размер которых $L > p_z^{-1}(p/k_0)^{3/2}(k_0\eta_0)^{-1}$.

Отметим, что задача о взаимодействии внутренних волн, существующих на резкой границе двух сред (т.е. мод другой структуры и дисперсии, чем рассмотренные здесь), с поверхностными волнами исследовалась в ([9]).

Авторы благодарят В.С. Эткина за полезные обсуждения.

Институт космических исследований
Академии наук СССР, Москва

Поступило
20 II 1981

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л.М. Бреховских, В.В. Гончаров и др.*, Изв. высш. учебн. зав., Радиофизика, т. 19, № 5–6, 843 (1976). [2] *О.М. Филипс*, Динамика верхнего слоя океана, Л., 1980. [3] *А.Я. Басович, В.И. Таланов*, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, т. 12, № 7, 766 (1977). [4] *В.Е. Захаров, А.М. Рубенчик*, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 5, 84 (1972). [5] *В.Е. Захаров*, там же, № 2, 86 (1968). [6] *А.А. Веденов, М.И. Рудаков*, ДАН, т. 159, № 4, 767 (1964). [7] *Р.З. Сагдеев, В.И. Ораевский*, ЖТФ, т. 32, в. 11, 1291 (1962). [8] *О.М. Филипс*, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, т. 9, № 9, 954 (1973). [9] *В.В. Петров*, Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, т. 15, № 7, 740 (1979).

УДК 53.02 ФИЗИКА

В.И. ТАЛАНОВ

СТИМУЛИРОВАННАЯ ДИФФУЗИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЦИЯ И КООПЕРАЦИЯ КОМПОНЕНТ В РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком А.В. Гапоновым-Греховым 8 IV 1981)

Ниже предложено феноменологическое описание нелинейных кооперативных эффектов в распределенных кинетических системах. В качестве иллюстрации рассмотрены эффекты пространственной дифференциации (кооперации) компонент.

При построении математических моделей распределенных кинетических систем используются эволюционные уравнения параболического типа ([1])

$$(1)\qquad \frac{\partial m_i}{\partial t} = F_i(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{r}t) + \operatorname{div}\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\nabla m_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где m_i – "интенсивность" компонент системы (например, концентрация), $F_i(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{r}, t)$ – нелинейные функции, описывающие локальное взаимодействие компонент, а также локальное воздействие на них внешних сил. Нелокальность взаимодействия учитывается в (1) коэффициентами D_{ij} линейной (собственной и взаимной) диффузии компонент.

Уравнения (1) применимы к системам, близким к термодинамическому равновесию, небольшие отклонения от которого описываются в терминах термодинамических сил ∇m_j и линейно связанных с ними потоков $\mathbf{S}_i = -\sum_{j=1}^{n} D_{ij}\nabla m_j$. Естественное обобщение этих уравнений можно получить, если допустить, что наряду с линейными $\mathbf{S}_i$ в системе имеются и нелинейные потоки компонент, которые могут быть записаны в форме

$$(2) \qquad \mathbf{S}_i^{NL} = \sum_{j,k} \chi_{ijk} m_k \nabla m_j,$$

где χ_{ijk} – тензор третьего ранга. Такая запись эквивалентна введению в рассмотрение нелинейных коэффициентов диффузии вида

$$(3) \qquad D_{ij}^{NL} = -\sum_{k=1}^{n} \chi_{ijk} m_k.$$

Представление (2) возникает, в частности, при описании термоэлектрических и термодиффузионных явлений ([2]). Оно, естественно, допускает обобщения и на нелинейности более высокого порядка, а также нелинейности, нелокальные во времени и пространстве, однако при этом утрачивается в значительной мере простота описания системы в рамках уравнений (1).

Ограничимся рассмотрением случая, когда нелинейный поток i-й компоненты пропорционален ее "интенсивности"* m_i, т.е.

$$(4) \qquad D_{ij}^{NL} = -m_i S_{ij}, \qquad \mathbf{S}_i^{NL} = m_i \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \nabla m_j$$

и уравнения (1) принимают вид

$$(5) \qquad \frac{\partial m_i}{\partial t} = F_i(m_1, \ldots, m_n, \mathbf{r}, t) + \operatorname{div} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \nabla m_j - \operatorname{div} m_i \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \nabla m_j.$$

Нелинейная диффузия, представленная в (5) последним слагаемым, допускает простую и наглядную интерпретацию. Ее можно рассматривать как "стимулированную" (вынужденную) диффузию, когда поток некоторой компоненты m_i в направлении градиента другой компоненты пропорционален ее собственной величине, а также величине воздействующего градиента. Второму слагаемому в (5), используя аналогию с квантовыми системами, можно приписать смысл "спонтанной" диффузии, возвращающей макроскопическую систему в отсутствие внешних воздействий к состоянию термодинамического равновесия. Таким образом, наряду со спонтанными диффузионными потоками $\mathbf{S}_i = -\sum_{j=1}^{n} D_{ij} \nabla m_j$ в рассмотрение могут быть введены стимулированные потоки (4), описывающие нелинейное взаимодействие компонент системы. Коэффициенты S_{ij} в (4) при $i \neq j$ можно назвать коэффициентами взаимной стимулированной диффузии (взаимной стимуляции), а S_{ii} – коэффициентом автостимуляции.

В отличие от коэффициентов линейной диффузии D_{ij}, подчиняющихся ряду термодинамических ограничений, в частности соотношениям взаимности Онзагера, коэффициенты стимулированной диффузии (например, их знаки) в известной степени произвольны и должны определяться конкретной системой. Это существенно расширяет возможности описания на основе уравнений (5) различных процессов в химии, биологии, экологии, экономике и т.п. В общем случае эти уравнения следует рассматривать не в координатном, а в некотором конфигурационном пространстве, сохранив представление о спонтанной и стимулированной диффузии взаимодействующих компонент по элементам этого пространства.

---

* Это возможно, в частности, если подвижность компонент ограничена силами трения, пропорциональными скорости компонент.

Уравнения (5) как в общем виде, так и применительно к конкретным задачам требуют детального изучения. Однако уже сейчас ясно, что стимулированная диффузия компонент вносит принципиально новые элементы в поведение системы.

Проиллюстрируем это на простейшем примере возникновения пространственной дифференциации (кооперации) в двухкомпонентной системе с взаимной стимулированной диффузией. Чтобы нагляднее подчеркнуть специфику стимулированной диффузии, оставим в (5) сначала только третье слагаемое (S_{12}, S_{21} = const):

$$(6)\qquad \frac{\partial m_1}{\partial t} + S_{12}\,\mathrm{div}\, m_1 \nabla m_2 = 0, \qquad \frac{\partial m_2}{\partial t} + S_{21}\,\mathrm{div}\, m_2 \nabla m_1 = 0.$$

Система (6) имеет стационарное, однородное в пространстве решение $m_1 = m_{10}$, $m_2 = m_{20}$. Линеаризуя ее около этого решения, для возмущений $\tilde{m}_{1.2}$ получим систему

$$(7)\qquad \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial t} + S_{12} m_{10} \Delta \tilde{m}_2 = 0, \qquad \frac{\partial \tilde{m}_2}{\partial t} + S_{21} m_{20} \Delta \tilde{m}_2 = 0,$$

из которой легко находится дисперсионное уравнение (для возмущений вида $e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}$)

$$(8)\qquad (i\omega)^2 = S_{12} S_{21} m_{10} m_{20} k^4 .$$

При коэффициентах стимуляции разных знаков ($S_{12} > 0$, $S_{21} < 0$) это уравнение определяет чисто действительную частоту ω, а уравнения (7) заменой $t = \tau / | S_{12} S_{21} m_{10} m_{20} |^2$, $u_1 = \tilde{m}_1 / (S_{12} m_{10})^{1/2}$, $u_2 = \tilde{m}_2 / | S_{21} m_{20} |^{1/2}$, $\psi = u_1 - i u_2$ приводятся к уравнению Шредингера

$$(9)\qquad i \frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \Delta \psi .$$

Таким образом, при $S_{12} S_{21} < 0$ малые колебания компонент $m_{1.2}$ будут носить чисто волновой характер.

Другой тип поведения получится при $S_{12} S_{21} > 0$, что соответствует коэффициентам взаимной стимуляции одного знака. Характеристическое уравнение (8) такой системы определяет два мнимых корня ω, один из которых соответствует неустойчивости. Интересно отметить, что эта неустойчивость, которую в отличие от известной диффузионной ([3]) можно назвать стимулированной, возникает согласно (8) как при $S_{12} > 0$, $S_{21} > 0$, так и при $S_{12} < 0$, $S_{21} < 0$. Первый случай соответствует взаимному "притяжению" компонент, когда направленный поток в некоторую область пространства одной из компонент приводит к появлению направленного туда же потока второй компоненты*. Это может вызвать неограниченный (в рамках данной модели) рост пространственной концентрации обеих компонент. В известном смысле более интересным представляется другой случай ($S_{12} < 0$, $S_{21} < 0$), соответствующий взаимному "отталкиванию" компонент. Нетрудно убедиться, что в этом случае неустойчивой моде соответствует противофазное распределение в пространстве возмущений компонент $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2$, в то время как в первом случае оно было синфазным. Это значит, что при $S_{12} < 0$, $S_{21} < 0$ будет происходить пространственная дифференциация компонент. На нелинейной стадии этот процесс может продолжаться до полного расслоения компонент.

Если учесть теперь и линейную ("спонтанную") диффузию компонент, выписав в правых частях уравнений (6) члены вида $D_{1.2}\, \Delta m_{1.2}$, то нетрудно убедить-

---

* Примерами таких кооперативных пар могут служить: в физике – излучение и вещество, в биологии – сопутствующие друг другу виды в популяциях, в экономике – ресурсы и конечный продукт производства, производительность труда и экономические стимулы и т.д.

ся, что стимулированная неустойчивость будет носить пороговый характер. Считая для простоты, что $D_1 = D_2 = D$ и $S_{12} = S_{21} = S$ (симметрия взаимодействующих компонент), вместо (8) получим характеристическое уравнение

$$(10) \quad (i\omega + k^2 D)^2 = S^2 m_{10} m_{20} k^4,$$

из которого следует, что стимулированная неустойчивость возникает, начиная лишь с некоторого уровня компонент

$$(11) \quad m_{10} m_{20} > D^2/S^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что при медленном росте средней интенсивности компонент системы за счет внутренних или внешних ресурсов* (рост численности популяции, рост экономического потенциала, рост биомассы клеток и т.п.) тенденция к дифференциации (кооперации) возникает не сразу, а с определенного уровня развития системы. Этот вывод может быть обобщен и на многокомпонентные системы. Можно построить, в частности, схемы последовательной или разветвленно-последовательной стимуляции компонент, в которых дифференциация будет охватывать все новые компоненты по мере их роста.

Таким образом, в системах со стимулированной диффузией, эволюционирующей в сторону общего роста своих компонент, начиная с определенного уровня возникает опасность неустойчивого поведения, которое на линейной стадии уже не демпфируется спонтанными диффузионными потоками. На нелинейной стадии стимулированная неустойчивость может быть ограничена пространственной дифференциацией компонент, однако при положительных коэффициентах взаимной стимуляции такого ограничения может не наступить. Это легко проиллюстрировать, в частности, на примере автомодельных решений системы (6) при $S_{12} = S_{21} = S > 0$ в случае равных локальных интенсивностей компонент $m_1 = m_2 = m(\mathbf{r}, t)$, когда развитие неустойчивости носит взрывной характер и в системе за конечное время образуется сингулярность (пространственный коллапс).

Приведенные примеры наглядно иллюстрируют ряд качественно новых особенностей в поведении систем со стимулированной диффузией. Вместе с тем ясна необходимость их дальнейшего углубленного изучения. В частности, должны быть исследованы системы, описываемые уравнениями типа (5) при различных схемах взаимной стимуляции компонент: циклической, параллельной, разветвленной и т.п., при различных, в том числе неавтономных, функциях локального взаимодействия F_i, при наличии флуктуаций. Важной задачей является конкретизация принципа стимулированной диффузии в первую очередь применительно к проблемам биологии, экологии, теории эволюции, в частности выявление роли в образовании стимулированных потоков в биологических системах таких факторов, как информация, сознание, инстинкт, наследственность. Возможно, что этот принцип позволит по-новому подойти к решению таких традиционно трудных проблем как самоорганизация и дифференциация биологических структур, устойчивость и структура популяций, соотношение случайности и целесообразности в ходе биологической эволюции и т.п.

Автор признателен Е.И. Якубовичу за полезные дискуссии.

Институт прикладной физики
Академии наук СССР, Горький

Поступило
20 IV 1981

ЛИТЕРАТУРА

[1] *В.А. Васильев, Ю.М. Романовский, В.Г. Яхно*, УФН, т. 128, в. 4, 625 (1979). [2] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*, Механика сплошных сред, М., ГИТТЛ, 1954, §§ 58, 59; Электродинамика сплошных сред, М., ГИТТЛ, 1957, § 25; *Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский*, Физическая кинетика, М., "Наука", 1979, §§ 11, 12. [13] *A.M. Turing*, Phyl.Trans. Roy. Soc. B, v. 237, 37 (1952).

---

* В уравнениях (5) этот процесс легко отразить выбором подходящих функций F_i.