

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Л. Варпаховский, Об одном классе реализуемых формул логики высказываний, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1971, том 20, 8–23

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

18 марта 2025 г., 00:29:42



ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕАЛИЗУЕМЫХ ФОРМУЛ ЛОГИКИ
ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Пропозициональная формула называется *регулярно реализуемой*, если можно указать число, реализующее (по Клини [1]) любой арифметический пример этой формулы, т.е. результат подстановки в эту формулу вместо пропозициональных переменных любых замкнутых арифметических формул.

В настоящей заметке строится класс \mathcal{R} формул логики высказываний, являющийся расширением класса интуиционистски выводимых формул и обладающий следующими свойствами:

1. Класс \mathcal{R} разрешим.
2. Каждая формула из \mathcal{R} регулярно реализуема.
3. Класс \mathcal{R} замкнут относительно правил вывода интуиционистского исчисления высказываний.

Все известные автору реализуемые формулы содержатся в классе \mathcal{R} .

§ 1. Построение класса \mathcal{R}

1. Будем говорить, что пропозициональные формулы P_1 и P_2 *равносильны по реализуемости*, если по числу k_1 , реализующему любой арифметический пример формулы P_1 , можно указать число k_2 , реализующее любой арифметический пример формулы P_2 , и наоборот.

Построим ^{*)} алгоритм \mathcal{A}_1 , который каждой пропозициональной

*) Для построения алгоритма \mathcal{A}_1 (и используемого в дальнейшем алгоритма \mathcal{A}_2) достаточно сведений, приведенных в [2]. Эти алгоритмы должны обладать еще некоторыми дополнительными свойствами, которые будут указаны ниже.

Формуле ставит в соответствие равносильную ей по реализуемости формулу вида ^{*)}

$$\& A_j = \forall_i d_i, \quad (1)$$

где каждая посылка A_j имеет один из следующих видов:

$$(I) \forall_k a_k, \quad (II) \& b_l = \forall_k a_k, \quad (III) \exists B, \\ (IV) \exists C = \forall_k a_k, \quad (V) (c \supset b) = \forall_k a_k.$$

Для посылки и заключения посылки вида (IV) с номером s условимся использовать соответственно обозначения $\exists C_s, (\forall a)_s$. Аналогичный смысл имеют обозначения $c_s, b_s, (\forall a)_s$ для случая, когда s является номером посылки вида (V).

По определению, формула P , не имеющая вида (1), тогда и только тогда принадлежит \mathcal{R} , когда к \mathcal{R} принадлежит формула $\alpha_1(P)$.

2. В дальнейшем, ввиду I, будут рассматриваться только формулы вида (1). Основными переменными такой формулы считаются переменные, входящие в посылки вида (I), (II), (V) или в заключения посылки вида (IV). Рангом $\tau(P)$ формулы P считается число 0, если формула P не содержит посылок вида (IV) или (V), и число различных основных переменных этой формулы - в противном случае.

3. Формула P вида (1) называется правильной, если она не содержит посылок вида (I). Построим алгоритм α_2 , ставящий в соответствие каждой формуле P вида (1) равносильную ей по реализуемости конъюнкцию $\alpha_2(P) = \& P_s$ правильных формул того же или меньшего ранга. Приняв по определению что $P \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \forall s (P_s \in \mathcal{R})$, мы получаем возможность ограничиться правильными формулами.

Для дальнейшего существенно, что алгоритм α_2 обладает сле-

*) Здесь и в дальнейшем для обозначения пропозициональных переменных используются малые латинские буквы, для обозначения пропозициональных формул - большие.

дующим свойством. Пусть правильная формула P имеет вид $\& A_j \supset d_i$, $\tau(P) > 0$, $\bigvee b_e$ - дизъюнкция некоторых основных переменных формулы P , $\alpha_2((\bigvee b_e) \& (\& A_j) \supset \bigvee c_k) = \& P_s$. Тогда $\bigvee_s (\tau(P_s) < \tau(P))$.

4. Определения простоты, полноты и принадлежности правильной формулы P классу \mathcal{R} даются параллельной индукцией по рангу формулы P . Одновременно доказывается разрешимость класса \mathcal{R} .

Для формул нулевого ранга понятия простоты и полноты не определяются. Далее, если $\tau(P) = 0$, то считается, по определению, что

$$P \in \mathcal{R} \iff \vdash P.$$

Отсюда следует, что принадлежность формулы P нулевого ранга классу \mathcal{R} устанавливается в конечное число шагов.

Пусть теперь $n > 0$ и понятия простоты и полноты определены для всех формул P , таких что $0 < \tau(P) < n$, а алгоритм разрешимости - для всех формул P ранга меньше n .

Формула $P = \& A_j \supset \bigvee d_i$ ранга n считается *н е п р о с т о й*, если для некоторого индекса s посылки вида (IV) формулы P выполняется условие

$$\& A_j \vdash \neg C_s \tag{2}$$

или для некоторого индекса s посылки вида (V) этой формулы имеет место включение

$$(C_s \& (\& A_j) \supset b_s) \in \mathcal{R}. \tag{3}$$

В противном случае формула считается *п р о с т о й*. Отметим, что ввиду замечания в п.3 формула в условии (3) приводится к конъюнкции правильных формул ранга меньше n , так что имеется конечная процедура для проверки простоты формулы P ранга n .

* Выводимость здесь и в дальнейшем понимается как выводимость в интуиционистском исчислении высказываний (см. [1], стр. 77, 83, 94).

В случае непростой формулы P положим $P \in \mathcal{R}$, если для некоторого индекса S из условий (2) или (3) выполняется включение

$$((\forall a)_S \& (\& A_j) \supset \forall d_i) \in \mathcal{R}. \quad (4)$$

Ввиду замечания п.3 для непростых формул ранга n имеется конечная процедура распознавания их принадлежности классу \mathcal{R} .

5. Через \mathcal{B}_P и \mathcal{T}_P обозначим соответственно классы различных элементарных конъюнкций и различных дизъюнктивных нормальных форм, составленных из переменных формулы P ^{*)}. Оба класса в силу своего определения конечны. Пусть далее a_1, \dots, a_m - все различные переменные, встречающиеся в посылках вида (У) формулы P на втором месте, a'_1, \dots, a'_m - какие-нибудь различные переменные, не входящие в формулу P . Если $S \in \mathcal{B}_P$, то через S' обозначим формулу, которая получается из S заменой каждого конъюнктивного члена a_i на $\neg a'_i$. Для каждого такого конъюнктивного члена a_i формулы S из \mathcal{B}_P построим формулу $\neg a'_i \supset a_i$ и через $\&^S (\neg a'_i \supset a_i)$ обозначим конъюнкцию всех таких формул. Через \bar{S} обозначим дизъюнкцию переменных, входящих в S' под знаком отрицания. ^{**)}

Правильная формула P ранга n называется **п о п о л н и м о й**, если найдутся такие списки формул $\{S_k\}$ из \mathcal{B}_P и $\{T_k\}$ из \mathcal{T}_P ($1 \leq k \leq \nu$) и список $\{t_{\ell k}\}$ ($1 \leq \ell \leq q_k, 1 \leq k \leq \nu$) основных переменных формулы P , что для всех k ($1 \leq k \leq \nu$) формулы Q_k , где

$$Q_k \Leftrightarrow (\&^{S_k} (\neg a'_i \supset a_i)) \& \Pi (S'_k \vee T_k) \& (\& A_j) \supset (\bigvee_{\ell=1}^{q_k} t_{\ell k}) \vee \bar{S}_k$$

- непростые, никакая формула вида $\Pi T_k \supset t_{\ell k}$ неэквивалентна

*) При этом предполагается, что каждая переменная может входить в элементарную конъюнкцию не более одного раза, дизъюнктивные члены не повторяются и порядок конъюнктивных и дизъюнктивных членов заранее фиксирован.

**) Порядок членов в двух последних формулах определяется порядком соответствующих конъюнктивных членов в S .

интуиционистски никакой посылке вида (IV) формулы P ,

$$\& A_j \vdash \neg \bigvee_{k=1}^v S_k \quad (5)$$

и

$$\forall k (Q_k \in \mathcal{R}). \quad (6)$$

В случае выполнения этих условий дизъюнкция

$$\bigvee_{k=1}^v \bigvee_{l=1}^{q_k} (\bigwedge T_k = t_{lk}) \quad (7)$$

называется *пополняющей* для формулы P .

6. Существует конечная процедура для выяснения полноты формулы P . В самом деле, алгоритм распознавания простоты формул ранга n (п.4) позволяет отобрать из всех формул Q_k (их число конечно и ранг каждой равен n) непростые. Алгоритм распознавания принадлежности \mathcal{R} непростых формул ранга n (п.4) позволяет выделить из всех непростых формул Q_k те, для которых выполнено условие (6). Остальное очевидно.

7. Остается указать конечную процедуру для определения принадлежности \mathcal{R} простой формулы P ранга n . Примем, по определению, что простая формула P тогда и только тогда принадлежит \mathcal{R} , когда она полнота с пополняющей дизъюнкцией (7) и для всех k, l ($1 \leq k \leq v, 1 \leq l \leq q_k$).

$$\{(\bigwedge T_k = t_{lk}) \& (\& A_j) \supset \bigvee_i d_i\} \in \mathcal{R}. \quad (8)$$

Таким образом, вопрос о принадлежности простой полнотой формулы \mathcal{R} ранга n классу \mathcal{R} сводится к тому же вопросу для формул того же ранга и в тех же переменных, но с большим числом посылок вида (IV). Конечность применяемой процедуры вытекает из того, что существует только конечное число неэквивалентных посылок вида (IV) в переменных формулы P .

Построение разрешимого класса \mathcal{R} закончено.

§ 2. Реализуемость формул класса \mathcal{R}

Теорема. Каждая формула P класса регулярно реализуема.

Доказательство. Достаточно, очевидно, ограничиться правильными формулами. Доказательство будет вестись индукцией по рангу формулы.

1. Пусть P - правильная формула из \mathcal{R} и $\nu(P) = 0$. В этом случае формула P интуиционистски выводима и, следовательно, регулярно реализуема.

2. Пусть $n > 0$ и регулярно реализуемы все формулы P из \mathcal{R} ранга меньше n . Покажем, что это верно и для формул ранга n . Рассмотрим сначала случай, когда формула P не является простой. Тогда либо для некоторого индекса s посылки вида (IV) формула

$$\& A_j \supset \neg C_s \quad (9)$$

регулярно реализуема (в силу ее интуиционистской выводимости),

либо для некоторого индекса s посылки вида (V) формула

$C_s \& (\& A_j) \supset b_s$ регулярно реализуема (в силу предположения индукции). В последнем случае, очевидно, формула

$$\& A_j \supset (C_s \supset b_s) \quad (10)$$

также регулярно реализуема.

Однако в обоих этих случаях формула P равносильна по реализуемости формуле

$$(\forall a)_s \& (\& A_j) \supset \bigvee_i d_i, \quad (11)$$

которая регулярно реализуема по предположению индукции.

3. Остается рассмотреть случай простой пополнимой формулы с пополняющей дизъюнкцией (7). Очевидно, достаточно будет доказать регулярную реализуемость формулы

$$\& A_j \supset \bigvee_{k=1}^v \bigvee_{l=1}^{q_k} (\prod_k t_k \supset t_{lk}). \quad (12)$$

При этом можно опираться на регулярную реализуемость формул Q_k ($1 \leq k \leq v$) из (6), являющуюся следствием их простоты.

Заметим, что формула вида $\bigwedge_{j=1}^p A_j \supset \bigvee B_i$ регулярно реализуема тогда и только тогда, когда существует частично рекурсивная функция $f(n_1, \dots, n_p)$, такая что для любого арифметического примера этой формулы из того, что числа n_j ($1 \leq j \leq p$) реализуют соответствующие посылки формулы, следует, что

$(f(n_1, \dots, n_p))_u$ *^ж) дает при $u=0$ номер реализуемого члена заключения, а при $u=1$ - реализацию члена с этим номером.

Учитывая реализуемость формул Q_k ($1 \leq k \leq v$), построим частично рекурсивную функцию $f(k, n_1, \dots, n_m, \tau, N)$ (здесь и ниже N обозначает список n_{m+1}, \dots, n_{m+p}), такую, что для каждого k ($1 \leq k \leq v$), если числа n_j ($1 \leq j \leq m_k, m_k \leq m$), τ , n_{m+j} ($1 \leq j \leq p$) реализуют соответствующие посылки какого-нибудь примера формулы Q_k , то $f(k, n_1, \dots, n_m, \tau, N)$ дает при $u=0$ номер реализуемого члена заключения, а при $u=1$ - реализацию члена с этим номером. Здесь p - общее число посылок формулы P , m - общее число переменных, входящих в посылки вида (\forall) формулы P на втором месте, m_k ($1 \leq k \leq v$) - число конъюнктивных членов в формуле $\bigwedge_{i=1}^{s_k} (\neg a_i \supset a_i)$.

4. Пусть $q(k)$ - примитивно рекурсивная функция, такая что $q(k) = q_k$ при $k \leq v$. Пусть, далее, $\psi(x)$ - примитивно рекурсивная функция, которая по каждому x выдает номер одноместной примитивно рекурсивной функции, тождественно равной x . Введем следующие частично рекурсивные функции:

$$q(N) \approx \approx \nu n \{ (1 \leq (n)_0 \leq v) \& [1 \leq (f((n)_0, (n)_1, \dots, (n)_m, 0, N)) \leq q((n)_0)] \}^{**} \quad (I3)$$

*^ж) Примитивно рекурсивная функция $(x)_u$ по каждому натуральному x дает показатель, с которым u -ое простое число входит в разложение x .

**^ж) По поводу ν -оператора см. [I], стр.309.

$$\varphi_u(N) = (f((g(N))_0, (g(N))_1, \dots, (g(N))_m, 0, N))_u \quad (u=0,1) \quad (I4)$$

$$h(N) \approx \psi(\varphi_1(N)). \quad (I5)$$

5. Пусть теперь рассматривается произвольный арифметический пример формулы (I2) (для упрощения записи большие и малые буквы означают в последующих рассуждениях соответствующие замкнутые арифметические формулы). Предположим, что для каждого j ($1 \leq j \leq p$) число n_{m+j} реализует A_j . Для доказательства реализуемости формулы (I2) достаточно будет показать, что функции (I3), (I4) и (I5) в этом случае определены, для чисел $k = (g(N))_0$, $l = \varphi_0(N)$ выполняются неравенства $1 \leq k \leq v$, $1 \leq l \leq q_k$ и число $h(N)$ реализует формулу

$$\prod T_k \supset t_{lk}. \quad (I6)$$

Ввиду условия (5) не может не найтись k ($1 \leq k \leq v$), такого что формула S_k реализуема. Рассмотрим формулу Q_k , в которую вместо переменных формулы P подставлены те же формулы арифметики, что и в формулу P , а вместо всех переменных a'_i подставлена формула $1=0$. Ясно, что формула Q_k будет при этой подстановке реализуема и число 0 будет реализацией формулы $\prod (S'_k \vee T_k)$. Так как, ввиду реализуемости S_k , все переменные a_i в конъюнкции $\&^{S_k} (\bigwedge a'_i \supset a_i)$ реализуемы, то не могут не найтись такие числа n_1, \dots, n_{m_k} , которые реализуют соответствующие члены этой конъюнкции. Значит, (для любых n_{m_k}, \dots, n_m) $(f(k, n_1, \dots, n_{m_k}, n_{m_k+1}, \dots, n_m, 0, N))_u$ дает при $u=0$ номер реализуемого члена заключения формулы Q_k , а при $u=1$ - реализацию этого члена. Ввиду реализуемости S_k дизъюнкция \bar{S}_k нереализуема, поэтому $1 \leq (f(k, n_1, \dots, n_{m_k}, n_{m_k+1}, \dots, n_m, 0, N))_0 \leq q_k$. Значит, не может не найтись такого n , что условие в фигурных скобках (I3) выполнено. В силу принципа А.А.Маркова такое n найдется. Это означает, что функции (I3), (I4), (I5) определены и $1 \leq (g(N))_0 \leq v$, $1 \leq \varphi_0(N) \leq q_k$.

6. Остается показать, что число $h(N)$ реализует формулу

(I6), где $k = (g(N))_0$, $l = \varphi_0(N)$. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда формула T_k реализуема. Если в формулу Q_k подставить вместо переменных формулы P те же формулы арифметики, что и в формулу P , а вместо переменных a'_i , входящих в конъюнкцию $\&^{s_k} (\bigwedge a'_i \supset a_i)$ формулу $0 = 0$, то реализациями членов этой конъюнкции будут любые числа; число 0 по-прежнему (в силу реализуемости формулы T_k) будет являться реализацией формулы $\Pi(S'_k \vee T_k)$. Поэтому $\varphi_1(N)$ дает реализацию члена заключения формулы Q_k с номером $l = \varphi_0(N)$, т.е. формулы t_{ek} . Значит, $h(N)$ реализует формулу (I6). Теорема доказана.

§ 3. Принадлежность интуиционистски выводимых формул классу \mathcal{R}

Теорема. Всякая интуиционистски выводимая формула содержится в классе \mathcal{R} .

Доказательство. Отметим прежде всего, что для алгоритма \mathcal{A}_1 п. I § I справедливо следующее утверждение: формула P тогда и только тогда выводима в интуиционистском исчислении, когда в этом исчислении выводима формула $\mathcal{A}_1(P)$. То же самое утверждение справедливо и для алгоритма \mathcal{A}_2 п. 3 § I. Достаточно поэтому доказать теорему для правильных формул. Доказательство будет вестись индукцией по рангу формулы P .

1. Пусть ранг правильной формулы P равен нулю. Справедливость теоремы в этом случае вытекает из п. 4 § I.

2. Пусть теперь $n > 0$ и всякая интуиционистски выводимая формула ранга меньше n содержится в \mathcal{R} . Нужно показать, что это верно и для формул ранга n . Докажем сначала, что имеет место следующая

Лемма. Если правильная формула P положительного ранга интуиционистски выводима, то либо найдется такой номер S посылки вида (IV), что $\& A_j \vdash C_s$, либо найдется такой номер S посылки вида (V), что $\& A_j \vdash (C_s \supset b_s)$ и $(C_s \& (\& A_j) \supset b_s) \in \mathcal{R}$

Заметим, что $\vdash P \Leftrightarrow \Sigma \vdash \forall d_i$, где здесь и ниже Σ обозначает список всех посылок формулы (1). Поэтому по теореме Генцена об устранимости сечений* выводима секвенция $\Sigma \rightarrow \forall a_i$. Будем рассматривать произвольные секвенции вида

$$\Sigma \rightarrow \forall a \quad (I7)$$

и секвенции вида

$$\Sigma \rightarrow \& a \quad (I8)$$

в которых заключениями служат дизъюнкции или конъюнкции некоторых переменных формулы P . К таким секвенциям (не являющимся аксиомами) могут быть применены только четыре правила:

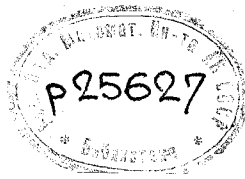
$$1^{\circ}. \frac{\Gamma \rightarrow A \text{ или } \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B}; \quad 2^{\circ}. \frac{\neg A, \Gamma \rightarrow A}{\neg A, \Gamma \rightarrow \Theta};$$

$$3^{\circ}. \frac{A \supset B, \Gamma \rightarrow A \text{ и } B, A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta}{A \supset B, \Gamma \rightarrow \Theta}; \quad 4^{\circ}. \frac{\Gamma \rightarrow A \text{ и } \Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \& B}$$

Применение правила 1° к секвенции вида (I7) дает секвенции вида (I7). Применение правила 4° к секвенции вида (I8) дает секвенции вида (I8). Применение правила 3° к секвенции вида (I7) или (I8) с формулой вида (II) в качестве $A \supset B$ дает секвенцию вида (I8). Поэтому в доказательстве секвенции $\Sigma \rightarrow \forall d_i$ на некотором месте встретится либо применение правила 2° , либо применение правила 3° с формулой вида (IV) или (5) в качестве $A \supset B$. Отметим первое (в некоторой ветви дерева доказательства) такое применение и разберем возможные случаи.

(а) В случае применения правила 2° для некоторого индекса ℓ , являющегося номером посылки вида (III), секвенция $\Sigma \rightarrow \forall \ell$ дока-

* В доказательстве леммы используется генценовская система G3 из [1].



зуба. Тем самым, $\& A_j \vdash B_c$. Так как, очевидно, $\& A_j \vdash \neg B_c$, то $\& A_j \vdash A$, где A - любая формула. Поскольку $n > 0$, формула P содержит посылки вида (IV) или (V). Если P содержит посылки вида (IV), то пусть s - номер какой-нибудь такой посылки. Тогда $\& A_j \vdash C_s$. Если формула P не содержит посылок вида (IV), то пусть s - номер какой-нибудь посылки вида (V). Тогда $\& A_j \vdash (C_s \supset b_s)$, т.е. $\vdash C_s \& (\& A_j) \supset b_s$. Значит, $\vdash \alpha_2(C_s \& (\& A_j) \supset b_s)$. Последняя формула есть конъюнкция правильных формул P_t меньшего ранга. Следовательно, каждая формула P_t , будучи выводимой, принадлежит \mathcal{R} (в силу предположения индукции). Отсюда получаем, что и формула $C_s \& (\& A_j) \supset b_s$ принадлежит \mathcal{R} .

(б) В случае применения правила \exists^0 с посылкой вида (IV) или (V) в качестве $A \supset B$ получаем, что либо для некоторого номера s посылки вида (IV) доказуема секвенция $\& A_j \rightarrow \neg B_s$, либо для некоторого номера s посылки вида (V) доказуема секвенция $\& A_j \rightarrow (C_s \supset b_s)$. Значит, либо $\& A_j \vdash \neg B_s$, либо $\& A_j \vdash (C_s \supset b_s)$, и мы возвращаемся к случаям, рассмотренным в п. (а). Лемма доказана.

3. Пусть теперь $\vdash P$ и s - номер посылки вида (IV) или (V), найденный по лемме. Рассмотрим выводимую формулу $(\forall a_s) \& (\& A_j) \supset \forall d_i$. Формула $\alpha_2((\forall a_s) \& (\& A_j) \supset \forall d_i)$ также выводима и является конъюнкцией правильных формул P_t ранга меньше n . Значит, все формулы P_t выводимы и по предположению индукции принадлежат \mathcal{R} . Следовательно, формула P , ввиду условия (4) п.4 § I, также принадлежит \mathcal{R} . Теорема доказана.

Замечание. Анализ доказательства теоремы показывает, что включив в класс \mathcal{R} только непростые формулы, удовлетворяющие условию (4), мы получили бы в точности класс интуиционистски выводимых формул.

§ 4. Примеры формул, принадлежащих \mathcal{R} .

I. Покажем, что формула Роуза [2] принадлежит \mathcal{R} . Рассмотрим правильную формулу

$$\&_{j=1}^n A_j \supset d_2 \vee d_1 \quad (I9)$$

с нижеперечисленными посылками

(II)	(III)	(IV)	(V)
1. $a \supset d$	4. $\neg(a \& \bar{a})$	8. $\neg \bar{a} \supset a$	12. $(d_2 \supset d) \supset d_2 \vee d_1$
2. $b \supset d$	5. $\neg(b \& \bar{b})$	9. $\neg \bar{b} \supset b$	
3. $d \supset a \vee b$	6. $\neg(d \& d_1)$	10. $\neg d \supset d_1$	
	7. $\neg(d_1 \& d_2)$	11. $\neg d_1 \supset d_2$	

Покажем, что формула (I9) пополнима ^{*}). Положим $S_1 = a \& \neg d_1$,
 $S_2 = b$, $S_3 = d_1$, $T_1 = d_1$, $T_2 = T_3 = b \vee d_1$, $q_1 = 1$, $q_2 = q_3 = 2$,
 $t_{11} = d_2$, $t_{12} = t_{13} = d_2$, $t_{22} = t_{23} = d_1$, $\bar{S}_1 = d_1$, \bar{S}_2 , \bar{S}_3
 - пустые дизъюнкции. Тогда $\bigwedge_{j=1}^{12} A_j \vdash \neg \neg((a \& \neg d_1) \vee b \vee d_1)$, т.е.
 условие (5) п.5 § I выполнено. Далее, формулы

$$\neg \neg((a \& \neg d_1) \vee d_1) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1,$$

$$\neg \neg(b \vee (b \vee d_1)) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1,$$

$$\neg \neg(d_1 \vee (b \vee d_1)) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1,$$

все непростые и принадлежат \mathcal{R} в силу своей интуиционистской выводимости. Мы получаем, что формула $(\neg \neg d_1 \supset d_2) \vee (\neg \neg(b \vee d_1) \supset d_2) \vee \vee(\neg \neg(b \vee d_1) \supset d_1)$ есть (с точностью до элиминации повторяющихся членов) пополняющая дизъюнкция формулы (I9), т.к. ни один ее дизъюнктивный член не эквивалентен ни одной посылке вида (IV) формулы (I9).

Поскольку интуиционистски выводимы все три формулы
 $(\neg \neg d_1 \supset d_2) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1$, $(\neg \neg(b \vee d_1) \supset d_2) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1$,

$$(\neg \neg(b \vee d_1) \supset d_1) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset d_2 \vee d_1,$$

^{*}) Доказательства простоты пополнимых формул во всех примерах опущены.

то все они принадлежат \mathcal{R} . Поэтому формула (19) также принадлежит \mathcal{R} .

Формула (19) является приведенной формой формулы Роуза (формула Роуза получается из формулы (19), если переменные a, b, d, d_1, d_2 заменить соответственно формулами $\neg \tilde{a}, \neg \tilde{b}, \neg \tilde{a} \vee \tilde{b}, \neg(\neg \tilde{a} \vee \neg \tilde{b})$, а затем опустить выводимые посылки).

2. Докажем, что \mathcal{R} принадлежит следующая формула Янкова [3]:

$$((\neg a \supset a) \supset a \vee \neg a) \& ((\neg b \supset b) \supset b \vee \neg b) \& \neg(a \& b) \& \neg(\neg a \& \neg b) \supset \neg a \vee \neg b$$

Приведенная форма этой формулы имеет вид

$$\bigwedge_{j=1}^{12} A_j \supset a_1 \vee b_1 \quad (20)$$

с нижеперечисленными посылками:

(III)	(IV)	(V)
1. $\neg(a \& a_1)$	7. $\neg a \supset a_1$	II. $(a_2 \supset a) \supset a \vee a_1$
2. $\neg(b \& b_1)$	8. $\neg b \supset b_1$	12. $(b_2 \supset b) \supset b \vee b_1$
3. $\neg(b_1 \& b_2)$	9. $\neg b_1 \supset b_2$	
4. $\neg(a_1 \& a_2)$	10. $\neg a_1 \supset a_2$	
5. $\neg(a \& b)$		
6. $\neg(a_1 \& b_1)$		

Покажем, что формула (20) пополнима. Положим $S_1 = a \& \neg a_1$, $S_2 = b \& \neg b_1$, $T_1 = \neg a_2$, $T_2 = \neg b_2$, $\bar{S}_1 = a_1$, $\bar{S}_2 = b_1$, $q_1 = q_2 = 1$, $t_{11} = a$, $t_{12} = b$. Условие $\bigwedge_{j=1}^{12} A_j \vdash \neg(a \& \neg a_1 \vee b \& \neg b_1)$ выполнено. Далее, обе формулы

$$(\neg a' \supset a) \& \neg(\neg a' \& \neg a_1 \vee \neg a_2) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset a \vee a_1,$$

$$(\neg b' \supset b) \& \neg(\neg b' \& \neg b_1 \vee \neg b_2) \& (\bigwedge_{j=1}^{12} A_j) \supset b \vee b_1$$

— непростые и интуиционистски выводимы. Значит, обе они принадлежат \mathcal{R} . Поэтому формула

$$(\exists a_2 \supset a) \vee (\exists b_2 \supset b)$$

является пополняющей дизъюнкцией формулы (20). Наконец, обе формулы

$$(\exists a_2 \supset a) \& (\bigwedge_{j=1}^n A_j) \supset a_1 \vee b_1, \quad (\exists b_2 \supset b) \& (\bigwedge_{j=1}^n A_j) \supset a_1 \vee b_1,$$

принадлежат \mathcal{R} в силу своей интуиционистской выводимости. Отсюда получаем, что формула (20) принадлежит \mathcal{R} .

3. Формула Кипниса [4], которую мы сейчас рассмотрим, имеет следующий вид:

$$L = \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq 6} \neg(p_i \& p_j) \right) \& \left(\left(\bigvee_{i=1}^6 \neg p_i \right) \supset C \right) \supset C,$$

где $C = \neg q_1 \vee (\neg r_1 \supset (\neg q_2 \vee (\neg r_2 \supset \neg q_3)))$. Приведенная форма имеет вид $\bigwedge_{j=1}^n A_j \supset t$, с нижеперечисленными посылками:

(II)	(III)	(IV)	(V)
1. $\bar{q}_1 \supset t$	9-14. $\neg p_i \supset t$ <small>(1 \leq i \leq 6)</small>	20-34. $\neg(p_i \& p_j)$ <small>(1 \leq i < j \leq 6)</small>	40. $(\bar{r}_1 \supset \bar{q}_2) \supset \bar{r}_1$
2. $\bar{r}_1 \supset t$	15. $\neg q_1 \supset \bar{q}_1$	35. $\neg(q_1 \& \bar{q}_1)$	41. $(\bar{r}_2 \supset \bar{q}_3) \supset \bar{r}_2$
3. $t \supset \bar{q}_1 \vee \bar{r}_1$	16. $\neg q_2 \supset \bar{q}_2$	36. $\neg(q_2 \& \bar{q}_2)$	
4. $\bar{r}_1 \& \bar{r}_1 \supset \bar{q}_2$	17. $\neg q_3 \supset \bar{q}_3$	37. $\neg(q_3 \& \bar{q}_3)$	
5. $\bar{q}_2 \supset \bar{q}_2$	18. $\neg r_1 \supset \bar{r}_1$	38. $\neg(r_1 \& \bar{r}_1)$	
6. $\bar{r}_2 \supset \bar{q}_2$	19. $\neg r_2 \supset \bar{r}_2$	39. $\neg(r_2 \& \bar{r}_2)$	
7. $\bar{q}_2 \supset \bar{q}_2 \vee \bar{r}_2$			
8. $\bar{r}_2 \& \bar{r}_2 \supset \bar{q}_3$			

Мы покажем, что $\left(\bigwedge_{j=1}^n A_j \supset t \right) \in \mathcal{R}$.

Можно проверить, что формула $\bigwedge_{j=1}^n A_j \supset t$ выполнима и для любых i, j ($1 \leq i < j \leq 6$) дизъюнкция $(\exists p_i \supset \bar{q}_1) \vee (\exists p_i \supset \bar{r}_1) \vee (\exists p_j \supset \bar{q}_1) \vee (\exists p_j \supset \bar{r}_1)$ является пополняющей - достаточно положить $s_1 = T_1 = \neg p_i$, $s_2 = T_2 = \neg p_j$, $\bigvee_{i=1}^6 p_i = \bigvee_{i=2}^6 p_i = \bar{q}_1 \vee \bar{r}_1$. Произведем пятикратное попол-

нения (с подходящим чередованием пар формул $\{S_1, S_2\}$), мы получим формулы вида

$$L_k = \left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i+k}}^4 (\prod_{i=1}^k p_i \supset m_i) \right) \& \left(\bigwedge_{j=1}^4 \right) \supset t, \quad (21)$$

где $m_i = \bar{q}_1$ или $m_i = \tilde{c}_i$. Достаточно, следовательно, доказать, что все формулы (21) принадлежат \mathcal{R} . Это очевидно для случая, когда \bar{q}_1 встречается в первых посылках не менее чем дважды, поскольку такие формулы выводимы интуиционистски. Учитывая это обстоятельство, а также симметрию исходной формулы относительно переменных p_i , можно ограничиться рассмотрением формулы

$$\left(\bigwedge_{i=1}^4 (\prod_{i=1}^k p_i \supset \tilde{c}_i) \right) \& \left(\bigwedge_{j=1}^4 A_j \right) \supset t = \bigwedge_{j=1}^4 A'_j \supset t. \quad (22)$$

Если мы покажем, что формула

$$\tilde{c}_1 \& \left(\bigwedge_{j=1}^4 A'_j \right) \supset \tilde{q}_2 \quad (23)$$

принадлежит \mathcal{R} , то формула (22) окажется непростой, и ее принадлежность \mathcal{R} будет вытекать из того, что формула $\tilde{c}_1 \& \left(\bigwedge_{j=1}^4 A'_j \right) \supset t$ будучи интуиционистски выводимой, принадлежит \mathcal{R} .

Применяя алгоритм \mathcal{O} к формуле (23), мы найдем правильную формулу $\bigwedge_{j=1}^4 A''_j \supset \tilde{q}_2$, где $\bigwedge_{j=1}^4 A''_j$ получается из $\bigwedge_{j=1}^4 A'_j$ следующим образом: посылка 4 заменяется на $\tilde{c}_1 \supset \tilde{q}_2$, посылка 38 - на $\neg \tilde{c}_1$, посылка 40 - на $\tilde{q}_2 \supset \tilde{c}_1$, посылка 18 устраняется и добавляются посылки $\prod_{i=1}^4 p_i \supset \tilde{c}_i$ ($1 \leq i \leq 4$). Итак, остается показать, что формула

$$\bigwedge_{j=1}^4 A''_j \supset \tilde{q}_2 \quad (24)$$

принадлежит \mathcal{R} .

Можно проверить, что формула (24) дополнима и для любых i, j ($1 \leq i < j \leq 4$) дизъюнкция $(\prod_{i=1}^4 p_i \supset \tilde{q}_2) \vee (\prod_{i=1}^4 p_i \supset \tilde{c}_2) \vee (\prod_{i=1}^4 p_i \supset \tilde{q}_2) \vee (\prod_{i=1}^4 p_i \supset \tilde{c}_2)$ является пополняющей - достаточно положить $S_1 = T_1 = \prod_{i=1}^4 p_i$, $S_2 = T_2 = \prod_{i=1}^4 p_i$, $\bigvee_{i=1}^4 t_{e_1} = \bigvee_{i=1}^4 t_{e_2} = \tilde{q}_2 \vee \tilde{c}_2$. Произведя трехкратные пополнения (с подходящим чередованием пар формул $\{S_1, S_2\}$), мы получим формулы вида

$$\left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^k (\bigvee_{p_i} \supset n_i) \right) \& \left(\bigwedge_{j=1}^n A_j \right) \supset \tilde{q}_2, \quad (25)$$

где $n_i = \bar{q}_2$ или $n_i = \tilde{r}_2$. Все формулы (25) принадлежат \mathcal{R} в силу своей интуиционистской выводимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Клини С.К., Введение в метаматематику, М., 1957.
2. Rose G.F., Propositional calculus and realizability. "Trans. Amer. Math. Soc.", 1953, 175, 1-19.
3. Янков В.А., О реализуемых формулах логики высказываний. "Докл. АН СССР", 1963, 151, 5, 1035-1037.
4. Кипнис М.М. О реализациях предикатных формул. Настоящий сборник, 40-48.