В. С. Рябенький, О ядрах спектров семейств операторов, *Докл. АН СССР*, 1969, том 185, номер 2, 275–277

Доклады Академии наук СССР
1969. Том 185, № 2

УДК 517.949.2+517.948.35 *МАТЕМАТИКА*

В. С. РЯБЕНЬКИЙ

О ЯДРАХ СПЕКТРОВ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ

(*Представлено академиком А. Н. Тихоновым 9 VII 1968*)

Рассмотрим семейство операторов $\{R_N\}$, переводящих нормированные пространства U_N размерности $N, N = 1, 2, \ldots,$ в себя. Будем предполагать, что операторы R_N ограничены в совокупности:

$$\|R_N\| < C. \tag{1}$$

Определение 1. Следуя ([1]), будем говорить, что комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству семейства операторов $\{R_N\}$, если существует $\varepsilon > 0$ и N_0 такие, что для всех N, $N > N_0$, и всех u, $u \in U_N$, выполнено неравенство

$$\|R_N u - \lambda u\| \geqslant \varepsilon \|u\|.$$

Спектром семейства операторов $\{R_N\}$ будем называть дополнение резольвентного множества до всей комплексной плоскости.

Теорема 1. *Спектр семейства операторов $\{R_N\}$ есть замкнутое множество.*

Определение 2. Пусть $\{\varepsilon_N\}$ — какая-нибудь невозрастающая стремящаяся к нулю последовательность чисел. Назовем $\{\varepsilon_N\}$-ядром спектра семейства операторов $\{R_N\}$ множество $\Lambda_{\{\varepsilon_N\}}$, определенное следующим образом:

$$\Lambda_{\{\varepsilon_N\}} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{N>k} \Lambda_N},$$

где Λ_N — множество точек λ, для которых неравенство $\|R_N u - \lambda u\| \leqslant \varepsilon_N \|u\|$ имеет нетривиальное решение u, а $\overline{\bigcup \Lambda_N}$ — замыкание множества $\bigcup \Lambda_N$.

Теорема 2. *$\{\varepsilon_N\}$-ядро спектра семейства операторов $\{R_N\}$ лежит в круге $|\lambda| \leqslant C$, где C введено в* (1), *замкнуто, непусто и принадлежит спектру семейства операторов $\{R_N\}$.*

Теорема 3. *Совокупность $\{\varepsilon_N\}$-ядер спектра, построенных для всевозможных невозрастающих последовательностей $\{\varepsilon_N\}$, сходящихся к нулю, совпадает со всем спектром.*

Определение 3. Пусть $a, a \geqslant 1,$— некоторая постоянная. Будем называть ядром с показателем a спектра семейства операторов $\{R_N\}$ пересечение $\{\varepsilon_N\}$-ядер, $\varepsilon_N = N^{-k}a^{-N}$, построенных при всех натуральных k. Ядро с показателем $a = 1$ будем называть иногда арифметическим ядром спектра.

Определение 4. Будем называть абсолютным ядром спектра семейства операторов $\{R_N\}$ пересечение всех вообще $\{\varepsilon_N\}$-ядер.

Теорема 4. *Ядро с показателем a, $a \geqslant 1$, и абсолютное ядро замкнуты. Если $a_1 \geqslant a_2$, то ядро с показателем a_1 содержится в ядре с показателем a_2. Абсолютное ядро совпадает с $\{\varepsilon_N\}$-ядром при $\varepsilon_N \equiv 0$.*

Определение 5. Будем называть радиусом спектра (радиусом ядра) семейства операторов $\{R_N\}$ радиус наименьшего замкнутого круга с центром в точке $\lambda = 0$, содержащего спектр (ядро спектра).

Теорема 5. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *существует число* $A = A(\varepsilon)$, *не зависящее от* N *и такое, что*

$$\| R_N^m \| \leqslant A(\varepsilon)(\rho + \varepsilon)^m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где ρ — *радиус спектра семейства операторов* $\{R_N\}$.

Теорема 6. *Пусть* ρ — *радиус* $\{\varepsilon_N\}$-*ядра спектра. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует номер* N_0, $N_0 = N_0(\varepsilon)$, *такой, что при* $N > N_0$ *выполнено неравенство*

$$\| R_N^m \| \leqslant (\rho + \varepsilon)^{m+1} / \varepsilon_N, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Теорема 7. *Пусть* ρ — *радиус* $\{\varepsilon_N\}$-*ядра спектра. Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *и любом* N_0 *найдется* N, $N > N_0$, *такое, что*

$$\| R_N^m \| \geqslant (\rho - \varepsilon)^m \left(1 - \frac{\varepsilon_N (C + \varepsilon)^m}{(\rho - \varepsilon)^m} \left(\min m, \frac{1}{1 - (\rho + \varepsilon)/C}\right)\right),$$

где C — *число, введенное в* (1).

Следствие. *Из теорем 3 и 7 вытекает известная* [1] *теорема, утверждающая, что для равномерной по* m *и* N *ограниченности норм операторов* R_N^m *необходимо, чтобы спектр семейства операторов* $\{R_N\}$ *лежал в единичном круге* $|\lambda| \leqslant 1$.

Заметим, что в теореме 7 нельзя положить $\varepsilon = 0$.

Обсудим вопрос о том, в какой мере спектр семейства операторов $\{R_N\}$ не зависит от выбора норм в пространствах U_N.

Теорема 8. *Абсолютное ядро спектра семейства операторов не зависит от выбора норм в пространствах* U_N.

Теорема 9. *При заданном семействе операторов* $\{R_N\}$, *собственные значения которых ограничены в совокупности, последовательность норм в пространствах* U_N *можно выбрать так, чтобы операторы* R_N *оказались ограничены в совокупности и чтобы спектр семейства операторов* $\{R_N\}$ *совпадал со своим абсолютным ядром.*

Теорема 10. *Пусть* R_N — *унитарные операторы в унитарных пространствах* U_N. *Тогда спектр семейства операторов* $\{R_N\}$ *лежит на единичной окружности и совпадает со своим абсолютным ядром.*

Теорема 11. *Пусть* R_N — *эрмитовы операторы в унитарных пространствах* U_N, *ограниченные в совокупности. Тогда спектр семейства операторов* $\{R_N\}$ *вещественный и совпадает со своим абсолютным ядром.*

Вообще говоря, спектр семейства ограниченных в совокупности операторов $\{R_N\}$ не исчерпывается своим абсолютным ядром, как мы покажем ниже, опираясь на пример из [1], гл. VI, § 1. Сопоставляя это с теоремой 9, видим, что спектр семейства операторов зависит, вообще говоря, от выбора норм в пространствах U_N.

Теорема 12. *Пусть при каждом* N *в пространстве* U_N *заданы две нормы* $\|\cdot\|_N^{(1)}$ и $\|\cdot\|_N^{(2)}$, *причем существует число* s, *не зависящее от* N *и такое, что при всех достаточно больших значениях* N *справедливы неравенства*

$$\begin{gathered}\sup_{\|u\|^{(1)}=1} \|u\|_N^{(2)} \leqslant N^s \inf_{\|u\|^{(1)}=1} \|u\|_N^{(2)}, \\ \sup_{\|u\|^{(2)}=1} \|u\|_N^{(1)} \leqslant N^s \inf_{\|u\|^{(2)}=1} \|u\|_N^{(1)}.\end{gathered} \tag{2}$$

Пусть, далее, операторы R_N ограничены в совокупности в каждой из этих норм. Тогда ядра с любым показателем a, $a \geqslant 1$, спектра семейства операторов $\{R_N\}$ в обеих последовательностях норм совпадают.

Условие (2) соблюдается для любой пары норм, употребляемых обычно в теории разностных схем: $\|u\| = \max |u_k|$; $\|u\| = \left(\sum_k |u_k|^p\right)^{1/p}$ и т. д.

Пример. Рассмотрим спектр семейства операторов $\{R_N\}$ ([1], гл. VI, § 1). Оператор R_N определим так: этот оператор ставит в соответствие $(N+1)$-мерному вектору $u = (u_0, u_1, \ldots, u_N)$ с нормой $\|u\| = \max |u_k|$ некоторый вектор $v = (v_0, v_1, \ldots, v_N)$ по формулам

$$v_n = (1-\xi)u_n + \xi u_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1; \qquad v_N = 0,$$

где ξ — некоторая положительная постоянная. Это семейство операторов возникает при замене краевой задачи для уравнения $u_t - u_x = 0$ разностным аналогом. В [1] показано, что спектр семейства операторов $\{R_N\}$ состоит из замкнутого круга радиуса ξ с центром в точке $\lambda = 1 - \xi$ и из точки $\lambda = 0$. Можно показать, что ядро с показателем a состоит из замкнутого круга с центром в той же точке $\lambda = 1 - \xi$ и с радиусом ξ / a, а также из точки $\lambda = 0$. Полагая $a = 1$, видим, что арифметическое ядро спектра совпадает со всем спектром. Абсолютное ядро спектра этого семейства операторов состоит из двух точек $\lambda = 0$ и $\lambda = 1 - \xi$.

Можно построить пример такого семейства операторов, арифметическое ядро спектра которого не совпадает со всем спектром.

Поступило
4 VI 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. К. Годунов, В. С. Рябенький, Введение в теорию разностных схем, М., 1962.