А. И. Виноградов, Круговой метод и модулярная теория, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1993, том 205, 3–5

А.И.Виноградов

КРУГОВОЙ МЕТОД И МОДУЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ

В теории чисел со времен Харди-Литтлвуда-Рамануджана [I] хорошо известен разрывной интеграл

$$\delta_{n,m} = \int_0^1 e^{2\pi i\alpha(n-m)}\,d\alpha\,, \tag{I}$$

который переводит аддитивные задачи на язык кругового метода.

В настоящее время, начиная с работы [2], бурно развиваются спектральные методы в теории чисел, особенно в исследовании различных арифметических сверток типа $\tau(n^2 \pm 1)$, где τ – функция числа делителей.

На самом деле это второй этап развития кругового метода для бинарных задач. Чтобы понять это, достаточно переписать основную формулу суммирования Кузнецова [2], (2.I4), как представление для символа Кронокера:

$$\frac{\delta_{n,m}}{\pi^2}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} r\cdot th(\pi r)\cdot h(r)\,dr = -\sum_{c=1}^{\infty}\frac{S(n,m;c)}{c}\cdot\varphi\left(\frac{4\pi\sqrt{n\cdot m}}{c}\right) + \tag{2}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\rho_j(n)\cdot\overline{\rho_j(m)}}{ch\,\pi\varkappa_j}\,h(\varkappa_j) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^{ir}\cdot\frac{\sigma_{2ir}(n)\,\sigma_{-2ir}(m)}{|\zeta(1+2ir)|^2}\,h(r)\,dr\,.$$

Правая часть (2) является, фактически, правой частью (I), для которой произведено разбиение интервала (0.I) дугами Фарея. При этом модулярный аналог больших дуг порождает сумму сумм Клоостермана в (2), а малые дуги переведены на язык спектральных коэффициентов ρ_j. При этом произвольная функция h играет роль рубежа между большими и малыми дугами.

Этот феномен объясняется довольно просто, если вспомнить, что аналогом разрывного интеграла (I) в модулярной теории является интеграл по единичной полосе:

$$\delta_{n,m}\cdot\frac{\Gamma(s-1)}{(4\pi n)^{s-1}} = \iint\limits_{\Pi} e^{2\pi i(nz-m\bar{z})}\cdot(\mathrm{Im}\,z)^s\,d\mu(z)$$

$$z = x + iy\ ; \quad \Pi = \left\{ -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant +\tfrac{1}{2}\ ,\ 0 < y \leqslant \infty \right\} \tag{3}$$

$$d\mu(z) = \frac{dx \cdot dy}{y^2} \quad .$$

Разбиению интеграла (I) дугами Фарея соответствует сворачивание единичной полосы в (3) на фундаментальную область F группы $SL(2,\mathbb{Z})$. Действительно, если $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, то справедливо равенство

$$\sigma z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c\cdot(cz+d)} \quad . \tag{4}$$

Из равенства (4) видно, что модулярное преобразование σ переменной z в точности соответствует выделению дуги Фарея вокруг рациональной точки $\frac{a}{c}$, когда z пробегает фундаментальную область F .

Переход в комплексную плоскость автоматически решает проблему уравнивания дуг, которая впервые четко возникла в работе Клоостермана [3]. Решая ее, он и получил свои, ныне знаменитые, суммы.

На модулярном языке суммы Клоостермана $S(n,m;c)$ возникают автоматически при разложении рядов Пуанкаре в ряд Фурье. Подробности можно найти в работе [2].

Основное достижение модулярного подхода (2) к дугам Фарея, по сравнению с классикой (I), состоит в явном выражении малых дуг через коэффициенты ρ_j дискретного спектра оператора Лапласа.

Полагая в равенстве (2) $n=p$ - простое, $m=x^2+1$, $x \in \mathbb{Z}$ мы получаем в левой части (2) уравнение

$$p = x^2 + 1 \ , \tag{5}$$

а в правой стороне (2) - явную формулу для числа решений уравнения (5), когда x пробегает целые числа. Хотя современных знаний о структуре спектра все еще не достаточно для того, чтобы получить асимптотику числа решений уравнения (5), тем не менее становится понятно, что надо требовать от него, чтобы решить эту проблему. Нужны три условия.

I) Гипотеза Римана для рядов Гекке:

$$L_j(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_j(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{\rho_j(p)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

2) Аналитическая продолжимость в критическую полосу дзета-функций сверток

$$\zeta_{+j}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\rho_j(n^2+1)}{n^s} \qquad (6)$$

3) Интерференция при суммировании по спектральному индексу j.

По аналогии с уравнением (5) точно так же можно трактовать проблему "близнецов" на языке уравнения

$$P_1\cdot P_2=x^2-1\,. \qquad (7)$$

В этом случае вместо свертки (6) возникает свертка

$$\zeta_{-j}(s)=\sum\frac{\rho_j(n^2-1)}{n^s}\,. \qquad (8)$$

Отметим, что проблема продолжимости сверток (6) и (8) для коэффициентов непрерывного спектра $\tau(n^2\pm1)$ сейчас решена. Для свертки (6) это сделано в работе [4], для (8) - в [5].

Литература

1. H a r d y G.H. and L i t t l e w o o d J.E. Some problems of "Partitio Numerorum". Proc.London Math.Soc.,1924(2), v.22.
2. К у з н е ц о в Н.В. Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника. Мат.сборн., 1980, т.111, № 3, с.331-383.
3. K l o o s t e r m a n H.D. On the representation of numbers in the from $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$. Acta Math., 1926, v.49, p.407-464.
4. Б ы к о в с к и й В.А. Спектральное разложение некоторых автоморфных функций и их теоретико-числовые приложения. Зап. научн.семин.ЛОМИ, 1984, т.134, с.15-34.
5. В и н о г р а д о в А.И., Т а х т а д ж я н Л.А. Дзета-функция аддитивной проблемы делителей и спектральное разложение автоморфного лапласиана. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1984, т.134, с.84-117.