1995. Т. 31, № 10. С. 1691 — 1696

УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ *)

А. П. Хромов

Дифференциальный оператор

$$l[y] = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) y^{(k)}, \quad p_k(x) \in L[0,1], \tag{1}$$

с нормированными краевыми условиями [1, с. 65 — 66]

$$U_i(y) = \sum_{j=0}^{x_i} [a_{ij} y^{(j)}(0) + b_{ij} y^{(j)}(1)] = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$|a_{i,x_i}| + |b_{i,x_i}| > 0, \quad n-1 \geq x_1 \geq \ldots \geq x_n \geq 0, \quad x_k > x_{k+2}. \tag{2}$$

примечателен тем, что с помощью фундаментального результата Биркгофа [2] об асимптотике решений уравнения $l[y] = \lambda y$ при больших $|\lambda|$ удается провести довольно глубокий анализ спектральных свойств. К настоящему времени накоплено много результатов, и в настоящей работе дается не претендующий на полноту обзор основных результатов, отражающий точку зрения автора по данному вопросу и опирающийся в основном на результаты саратовских математиков.

1. Сначала рассмотрим случай регулярных по Биркгофу краевых условий [1, с. 66 — 73]. Я. Д. Тамаркиным [3] (см. также [4]) получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $S_m^{(1)}(f)$ и $S_m^{(2)}(f)$ — частичные суммы разложений Фурье по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) каких-нибудь операторов L_1 и L_2 вида (1) — (2) с регулярными краевыми условиями (m — число членов). Тогда существуют целые h_1 и h_2 такие, что при любых $f(x) \in L[0,1]$ и $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо*

$$\lim_{m\to\infty} \|S_{2m+h_1}^{(1)}(f) - S_{2m+h_2}^{(2)}(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0. \tag{3}$$

Если у операторов L_1 и L_2 a_{ix_i} и b_{ix_i} совпадают для всех $i = 1, \ldots, n$, то в (3) можно положить $\delta = 0$. Если один из операторов является оператором $y^{(n)}$ с периодическими краевыми условиями $y^{(i)}(0) = y^{(i)}(1)$ ($i = 0, \ldots, n-1$), то $S_{2m}(f) = \sigma_m(f)$ представляет собой частичную сумму обычного тригонометрического ряда Фурье и, таким образом, справедлива

Теорема 2. *Если L — оператор (1), (2) с регулярными краевыми условиями, то существует целое h такое, что при любых $f(x) \in L[0,1]$ и $\delta \in (0, 1/2)$ справедливо* $\lim_{m\to\infty} \|S_{2m+h}(f) - \sigma_m(f)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0$.

Эти результаты легли в основу огромного направления исследований сходимости спектральных разложений под названием теорем равносходимости.

Дополнением к теореме 2 служит следующая

Теорема 3. *Если оператор (1), (2) самосопряженный, то имеет место заключение теоремы 2.*

*) По материалам математической школы "Понтрягинские чтения — V" (25 — 29 апреля 1994 г., Воронеж).

Данный результат следует из справедливости гипотезы Камке о регулярности самосопряженных краевых условий. Этот факт для n четных получен С. Салафом [6] и для n нечетных — А. М. Минкиным [5].

Рассмотрим теперь равносходимость на всем отрезке в следующей постановке: каким условиям должна удовлетворять разлагаемая функция $f(x)$, чтобы соотношение (3) имело место при $\delta = 0$ для любых фиксированных операторов L_1 и L_2 с произвольными регулярными краевыми условиями? Разумно считать, что $f(x) \in \overline{D}_{\mathcal{L}_1} \cap \overline{D}_{\mathcal{L}_2}$ ($\overline{D}_{\mathcal{L}_1}$ — замыкание по метрике $C[0,1]$ области определения $D_{\mathcal{L}_1}$ оператора $\mathcal{L}_1$). Таким образом, $f(x)$ следует считать произвольной из $C[0,1]$, удовлетворяющей краевым условиям для операторов L_1 и L_2, которые не содержат производных, и множество таких $f(x)$ обозначим через D.

Теорема 4 [7]. *Пусть $n = 2$ и $f(x) \in D$. Пусть функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ имеют вид $\Phi_1(x) = a_1 f(x) + a_2 f(1-x)$, $\Phi_2(x) = a_3 f(x) + a_4 f(1-x)$ и продолжены нулем на $[-1,0]$ *). Для того чтобы имело место (3) при $\delta = 0$, необходимо и достаточно, чтобы обычные тригонометрические ряды Фурье функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ по системе $\{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ сходились равномерно на некотором отрезке $[-\gamma, 0]$, где $\gamma > 0$.*

Приведем схожий результат для произвольного n, полученный недавно А. М. Минкиным. Обозначим через $\tilde{\mathcal{L}}[0,1]$ множество всех функций из $\mathcal{L}[0,1]$, для которых точки 1 и 0 являются точками Лебега, и через $J_r(g)$ интеграл

$$J_r(g) = \Big(\int_{1/r}^{x} + \int_{-x}^{-1/r}\Big)\frac{1}{\xi}\exp(ir\xi)g(\xi)d\xi, \quad 1/r \le x \le 1.$$

Теорема 5. *Пусть n четно, $f(x) \in \tilde{\mathcal{L}}[0,1]$ и удовлетворяет краевым условиям нулевого порядка для операторов L_1 и L_2. Для того чтобы имело место соотношение* (3) *при $\delta = 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{r\to\infty} \|J_r(d_k)\exp(-r\nu_k x)\|_{C[1/r,1]} = 0 \quad (k = 0, \dots, n+1),$$

где $\nu_k = \left|\sin\frac{2\pi}{n}\left[\frac{k}{4}\right]\right|$, $d_k(x)$ на [0,1] *есть некоторые линейные комбинации функций $f_0(x)$ и $f_0(1-x)$ и на* [-1,0] *функций $f_0(-x)$ и $f_0(1+x)$, $f_0(x) = f(x) - (xf(1) + (1-x)f(0))$ с коэффициентами, выражаемыми явно через старшие коэффициенты в краевых условиях операторов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.*

Случай n нечетного сводится к четному возведением операторов в квадрат и использованием следующего факта: дифференциальный оператор L регулярен по Биркгофу тогда и только тогда, когда регулярен по Биркгофу его квадрат.

Если в дифференциальном выражении (1) есть коэффициент $p_{(n-1)}(x)$ при $y^{(n-1)}$ и $p_{(n-1)}(x) \in C^{n-1}[0,1]$, то, как хорошо известно, существует замена $y(x) = \varphi(x)z(x)$ такая, что уже в дифференциальном выражении для z этот коэффициент пропадает. Если же $p_{(n-1)}(x) \notin C^{n-1}[0,1]$, то положение усложняется. Приведем следующий результат, принадлежащий В. С. Рыхлову [8]. Обозначим: $H_1^{\alpha}[0,1] = \{f(x) \in \mathcal{L}[0,1] | \omega_1(f,\delta) = O(\ln^{-\alpha}(1/\delta)),\ \alpha > 0\}$, $H_{\infty}^{\alpha}[0,1] = \tilde{H}_{\infty}^{\alpha}[0,1]$ $(0 \le \alpha \le 1)$, $H_{\infty}^{\alpha}[0,1] = \tilde{H}_{\infty}^{\alpha}[0,1] \cup V[0,1]$ $(\alpha > 1)$, $\tilde{H}_{\infty}^{\alpha}[0,1] = \{f(x) \in C[0,1] | \omega(f,\delta) = O(\ln^{-\alpha}(1/\delta)),\ \alpha > 0\}$, $H_1^0[0,1] = \mathcal{L}[0,1]$, $\tilde{H}_{\infty}^0[0,1] = L_{\infty}[0,1]$, $\omega(f,\delta)$ ($\omega_1(f,\delta)$) — модули непрерывности в $C[0,1]$ ($\mathcal{L}[0,1]$).

Теорема 6. *Если выполняется одно из условий :* а) $p_{n-1}(x) \in H_{\infty}^{\alpha}[0,1]$, $f(x) \in H_1^{\beta}[0,1]$, $\alpha + \beta > 1$; б) $p_{n-1}(x) \in L_r[0,1]$, $f(x) \in L_q[0,1]$, $1/r + 1/q < 1$; в) $p_{n-1}(x) \in H_1^{\alpha}[0,1]$, $f(x) \in H_{\infty}^{\beta}[0,1]$, $\alpha + \beta > 1$; *то имеет место* (3).

На примерах показывается точность условий теоремы.

Большой вклад в проблему равносходимости внесен В. А. Ильиным. Им получены теоремы равносходимости в иных терминах, а именно в терминах поведения собственных значений и собственных функций, и поэтому здесь не приводим соответствующие результаты.

---

*) Постоянные a_i определены в [7].

Если рассмотреть сходимость разложений по с.п.ф. в $L_2[0,1]$, то оказывается (результат Г. М. Кессельмана и В. П. Михайлова), что система с.п.ф. дифференциального оператора (1) с регулярными краевыми условиями (2) образует базис Рисса.

2. Обозначим через $G(x,t,\lambda)$ ядро резольвенты оператора (1), (2), т. е. ядро интегрального оператора $(L-\lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор. При регулярных краевых условиях вне некоторых окрестностей собственных значений справедлива следующая минимально возможная оценка:

$$G(x,t,\lambda) = O(|\lambda|^{(1-n)/n}), \tag{4}$$

где $O(\ldots)$ равномерна по x и t. Автор, по-видимому, впервые систематически исследовал сходимость спектральных разложений в том случае, когда оценка (4) заменена произвольной степенной:

$$G(x,t,\lambda) = O(\lambda^a). \tag{5}$$

А. А. Шкаликов назвал такие операторы слабо нерегулярными (у автора такие операторы определяются через граничные условия и коэффициенты дифференциального выражения).

Теорема 7 [9]. *Если* $f(x) \in D_{L^q}$, *где* $q > a+1$, *то* $\lim\limits_{m\to\infty} \|f(x) - S_{2m}(f)\|_{C[0,1]} = 0$.

Показатель q точен. Значит, в этом случае соотношение (3) для любых L_1 и L_2 уже не имеет места. Однако если брать L_1 и L_2 с одним и тем же показателем a в (5), то для некоторых классов таких операторов можно указать точный отрезок, на котором все-таки равносходимость имеет место (теорема 6 из [9]).

Рассмотрим вопрос о суммируемости разложений по с.п.ф. Средние по Риссу порядка α имеют вид

$$\Omega_r(f,\alpha) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\Big(1-\frac{\lambda^4}{r^4}\Big)^{\alpha} d\lambda \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda)f(t)dt,$$

где $\Gamma_r = \{|\lambda| = r\}$ — круговой контур такой, что $r^{1/n}$ находится на положительном расстоянии от $|\rho_s|$ ($\rho_s^n = \lambda_s$ — собственные значения).

Теорема 8 [9]. *Для любой* $f \in L[0,1]$ *и любого* $\delta \in (0,1/2)$

$$\lim_{r\to\infty} \|\Omega_r^{(1)}(f,\alpha) - \Omega_r^{(2)}(f,\alpha)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где $\Omega_r^{(j)}$ — *средние по Риссу операторов* L_j $(j=1,2)$, $\alpha \ge \max\{n(a_1+1)-1,\ n(a_2+1)-1\}$ *и* a_j — *показатели в* (5) *операторов* L_j $(j=1,2)$.

Таким образом, в случае слабо нерегулярных операторов имеет место равносуммируемость по Риссу достаточно высокого порядка.

3. Простейшим, но важным классом операторов с сильно нерегулярными краевыми условиями являются операторы с распадающимися краевыми условиями, когда условия (2) задаются в количестве m только в нуле и в количестве $n-m$ только в единице, причем $m \ne n-m$ (для определенности считаем, что $n < 2m$). В этом случае функция Грина $G(x,t,\lambda)$ при больших $|\lambda|$ имеет уже экспоненциальный рост, и такой рост имеет место, вообще говоря, при любом $\arg\lambda$. Это обстоятельство создает основные и специфические трудности в спектральном анализе таких операторов.

Джексон [10] первым рассмотрел такие операторы и показал, что разлагаемая в равномерно сходящийся ряд по с.п.ф. оператора y''', $y(0) = y'(0) = y(1) = 0$ функция необходимо является бесконечно дифференцируемой. Затем Гопкинс [11] усилил этот результат, показав, что разлагаемая функция $f(x)$ необходимо является аналитической, причем $f^{(3k+s)}(0) = 0$ ($k = 0,1,2,\ldots$; $s = 0,1$), и дал обращение этого результата, т.е. получил теорему о разложении по с.п.ф. Далее этот результат Гопкинса распространялся на некоторые классы операторов с аналитическими коэффициентами в работах [12 — 14]. Для произвольных неаналитических коэффициентов результаты Гопкинса впервые были обобщены нами [15а), б)], а в [15в)] было получено окончательное решение вопроса о сходимости разложений по с.п.ф. Приводим соответствующий результат.

Теорема 9 [15в)]. *Если ряд* $\sum_k a_k\varphi_k(x)$ *по с.п.ф. дифференциального оператора* (1) *с нерегулярными распадающимися краевыми условиями сходится равномерно на* $[x_0, x_1]$ $(0 \le x_0 \le x_1 \le 1)$, *то* а) *ряды* $\sum_k a_k \frac{d^s}{dx^s} l^j[\varphi_k]$ $(j = 0, 1, \ldots;\ s = 0, \ldots, n-1)$ *сходятся абсолютно и равномерно на каждом отрезке* $[0, a]$ $(0 < a < x_1)$; б) *справедливы оценки*

$$\frac{d^s}{dx^s} l^j[f] = O\left(\frac{1 + x_1 - a}{(a - x)\cos(m\pi/n)}\right)^{jn+s} (jn+s)!,\quad x \in [0, a]\ (s = 0, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots); \tag{6}$$

в) *функции* $f(x)$, $l[f]$, $l^2[f]$, ... *удовлетворяют краевым условиям в точке* 0.

Обратно, если $f(x) \in L[0,1]$ *и выполняются условия* б) *и* в), *то ряд Фурье* $f(x)$ *по с.п.ф. сходится равномерно на всяком отрезке* $[0, a]$, *где* $a < x_1$.

Отметим, что функции, удовлетворяющие оценкам типа (6), являются операторно-аналитическими функциями М. К. Фаге [16].

Так как в сходящиеся ряды разлагаются весьма узкие классы функций, то приобретают особую важность вопросы полноты систем с.п.ф. и суммируемости разложений по с.п.ф. каким-нибудь методом для более широких классов функций. В ряде случаев удается установить факты суммируемости по Абелю в форме, впервые предложенной В. Б. Лидским [17]. Средние по Абелю порядка α определяются по формуле

$$U(x, t, \alpha) = -\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} \exp(-(-\lambda)^\alpha t) \int_0^1 G(x, t, \lambda) f(t)\,dt,$$

где λ^α — та ветвь, для которой $\lambda^\alpha > 0$ при $\lambda > 0$. Если $2m - n \le 2$, то установлено [18], что для $f(x) \in D_L$ верно равенство

$$\lim_{t \to +0} \|U(f, t, \alpha) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0, \quad 1/n < \alpha < 1/2. \tag{7}$$

В работе [19] этот результат распространен на случай $2m - n \le 4$, но лишь когда $p_k(x)$ — константы, и на примере показано, что при $2m - n > 5$ сходимость средних по Абелю уже не имеет места. В работе [20] даны следующие усиления результатов статьи [19].

Теорема 10. *Пусть* $p_k(x)$ *аналитичны в четырехугольнике с вершинами* 0, 1, $(1 - \exp(2\pi i/n))^{-1}$, $(1 - \exp(-2\pi i/n))^{-1}$ *и непрерывны вплоть до границы. Существует натуральное* p *такое, что для всякой* $f \in D_L$, *справедливо* (7) *при* $1/n < \alpha < 1/(2m - n)$ *и* $3m - 2n \le 4$ *при четном* n *и* $3m - 2n \le 3$ *при нечетном* n.

Теорема 11. *Система с.п.ф. оператора* (1) *с нерегулярными распадающимися краевыми условиями полна в* $L_2[0,1]$.

Этот результат впервые был аннонсирован М. В. Келдышем (см. [1, с. 102 — 103]). Доказательство (в случае целых аналитических коэффициентов) дано в [21]. В наиболее трудном случае, когда $p_k(x) \in L[0,1]$, доказательство полноты получено А. А. Шкаликовым [22].

Все результаты этого пункта имеют место и в несколько более общем случае полураспадающихся краевых условий, когда условия в точке 1 заменяются произвольными условиями типа (2).

4. Простейшим примером сильно нерегулярного оператора с нераспадающимися краевыми условиями является оператор

$$y''',\quad U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0\ \ (i = 1, 2, 3)\ \ (a_1 + a_1 + a_3 = 0,\ a_i \ne 0).$$

Экспоненциальный рост $G(x, t, \lambda)$ наблюдается (в отличие от п. 3) как при $t \le x$, так и при $t > x$. Нам принадлежат следующие результаты [23].

Обозначим через T_x $(x > 1/3)$ правильный треугольник с центром в точке $1/3$ и одной из вершин в точке x.

Теорема 12. *Если ряд по с.п.ф. сходится в точке* $x = \alpha$, *где* $\alpha \in [0, 1/3]$ *(или равномерно на* $[\alpha, \beta]$, *где* $1/3 \le \alpha < \beta \le 1$), *то он сходится абсолютно и равномерно внутри*

$T_{1-2\alpha}$ (или T_α) к аналитической функции. Сумма $f(x)$ этого ряда удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Phi(f,x) = af(\omega_1 x) + bf(\omega_2 x) + f(1-x) = 0,$$

где $a = 3^{-1}(a_1 + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon)$, $b = 3^{-1}(a_1 + a_2\varepsilon + a_3\varepsilon^2)$, $\varepsilon = \exp(2\pi i/3)$, $\omega_1 = \exp(-\pi i/3)$, $\omega_2 = \bar{\omega}_1$.

Теорема 13. *Пусть $f(x)$ регулярна в T_α при $\alpha > 1/3$ и выполняется $\Phi(f,x) = 0$, когда $\omega_1 x$, $\omega_2 x$, $1-x \in T_\alpha$. Тогда $f(x)$ разлагается в ряд по с.п.ф., сходящийся равномерно в $(0, 5(1-\alpha), \alpha)$.*

Недавно О. Ю. Дмитриев перенес эти результаты на случай оператора $y^{(n)}$ с произвольными краевыми условиями в сильно нерегулярных случаях. Из-за громоздкости не приводим соответствующие результаты. Случай произвольного оператора (1) с такими краевыми условиями остается открытым.

5. Все нерегулярные задачи являются следствием вырождения экспоненциального квазиполинома, представляющего собой характеристический определитель, построенный из решений уравнения $l[y] = \lambda y$, имеющих экспоненциальную асимптотику. Именно это обстоятельство затрудняет изучение нерегулярных задач п. 4 в общем случае. Однако если рассматривать уравнение $l[y] = \lambda p(x) y$ с условиями (2), то во многих случаях вес (например, знакопеременный вес) дает экспоненциальный рост $G(x,t,\lambda)$ без вырождения характеристического определителя. Поэтому представляет интерес изучение таких операторов. Приведем результаты по сходимости спектральных разложений операторов первого и второго порядка со знакопеременной весовой функцией, полученные недавно А. П. Гуревичем и нами.

Теорема 14. *Если ряд $\sum a_k \varphi_k(x)$ по с.п.ф. краевой задачи*

$$y' = \lambda p(x) y, \quad y(0) = y(1), \tag{8}$$

где $p(x) = 1$ при $x \in [0,\alpha]$ и $p(x) = -1$ при $x \in (\alpha, 1]$, $\alpha < 1/2$, сходится равномерно на $[0,1]$, то его сумма $f(x)$ при $x \in [0,\alpha]$ удовлетворяет соотношениям

$$f(x) = f(1-x) = f(2\alpha - x). \tag{9}$$

Обратно, если $f(x) \in C[0,1]$, $\bigvee_0^1(f) < \infty$ и выполняются (9), то $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на $[0,1]$ ряд по с.п.ф. (8).

Теорема 15. *Пусть ряд $\sum a_k \varphi_k(x)$ по с.п.ф. краевой задачи*

$$y'' = \lambda p(x) y, \quad y(0) + ay(1) = y'(0) + aiy'(1) = 0, \tag{10}$$

где $p(x) = -1$ при $x \in [0,\alpha]$ и $p(x) = 1$ при $x \in [\alpha, 1]$, сходится в точке 0. Тогда ряды $f_1(x) = \sum a_k \varphi_{k,1}(x)$ и $f_2(x) = \sum a_k \varphi_{k,2}(x)$, где $\varphi_{k,1}(x)$ ($\varphi_{k,2}(x)$) — аналитические продолжения $\varphi_k(x)$ во всю комплексную плоскость с $[0,\alpha]$ ($[\alpha,1]$), сходятся абсолютно и равномерно в плоскостях Q_1 : $0 < \mathrm{Re}(x\exp(-i\theta)) < 2\alpha\sin\theta$, Q_2 : $0 < \mathrm{Re}[(x+1-2\alpha)\exp i(\pi/2-\theta)] < 2\alpha\sin\theta$ соответственно, $\theta = \mathrm{arctg}(\alpha/(1-\alpha))$, причем выполняются соотношения

$$f_1(x) + af_2(1+ix) = 0 \quad (x \in Q_1), \tag{11}$$

$$(1-i)f_1(\alpha + i(1-\alpha) - x) - 2aif_1(x) + (1+i)f_1(x - \alpha + i(1-\alpha)) = 0, \quad x \in [0,\alpha], \tag{12}$$

$$a(i-1)f_1(\alpha + i(1-\alpha) - x) - a(i+1)f_1(x + \alpha - (1-\alpha)i) - 2f_1(x) = 0, \quad x \in [0,(1-\alpha)i]. \tag{13}$$

Теорема 16. *Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$, удовлетворяют краевым условиям в (10) и а) аналитически продолжены в T_1 и T_2, где T_1 — треугольник в x-плоскости с вершинами $(-1/2, i/2)$, $(1/2, i/2)$, $(1/2, -i/2)$, а T_2 — образ T_1 при отображении $w = 1+ix$; б) выполняются: (11) при $f_1 = f_2 = f$, $\alpha = 1/2$ и $x \in T_1$; (12) при $f_1 = f$, $\alpha = 1/2$ и $x \in [0, 1/2]$; (13) при $f_1 = f$, $\alpha = 1/2$ и $x \in [0, i/2]$. Тогда $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся на $[0,1]$ ряд по с.п.ф. краевой задачи (10) при $\alpha = 1/2$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 95 — 01 — 00156).

Литература

1. *Неймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.

2. *Birkhoff G. D.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9. P. 219 — 231.

3. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.

4. *Stone M. H.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. Vol. 28. P. 695 — 761.

5. *Минкин А. М.* // Мат. заметки. 1977. Т. 22, вып. 6. С. 835 — 846.

6. *Salaff S.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. Vol. 134, N 2. P. 355 — 373.

7. *Хромов А. П.* // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов, 1975. Вып. 5, ч. 2. С. 3 — 20.

8. *Рыхлов В. С.* // Дифференциальные уравнения и теория функций. Саратов, 1981. Вып. 2. С. 57 — 75.

9. *Хромов А. П.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 6. С. 1294 — 1297.

10. *Jackson D.* // Proced. Amer. Acad. 1915. Vol. 51. P. 383 — 417.

11. *Hopkins J. W.* // Trans. Amer. Math. Soc. 1919. Vol. 20. P. 395 — 406.

12. *Ward L. E.* а)// Ann. Math. 1925. Vol. 26. P. 21 — 36; б)// Trans. Amer. Math. Soc. 1927. Vol. 29. P. 716 — 745; в)// Trans. Amer. Math. Soc. 1932. Vol. 34. P. 417 — 434; г)// Amer. J. Math. 1935. Vol. 57. P. 345 — 365.

13. *Seifert G.* а)// Pacif. J. of Math. 1952. Vol. 2. P. 395 — 406; б)// Quart. Appl. Math. 1951. Vol. 9. P. 210 — 218.

14. *Eberhard W.* а)// Math. Zs. 1964. Vol. 86. P. 45 — 53; б)// I. Math. Zs. 1964. Vol. 86. P. 206 — 214; II. Math. Zs. 1965. Vol. 90. P. 126 — 137.

15. *Хромов А. П.* а)// Докл. АН СССР. 1963. Т. 152. С. 1324 — 1326; б)// Мат. сб. 1966. Т. 70 (112). С. 310 — 329; в)// Мат. заметки. 1976. Т. 19, вып. 5. С. 763 — 772.

16. *Фаге М. К.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1958. Т. 7. С. 227 — 268.

17. *Лидский В. Б.* // Тр. Моск. мат. о-ва. 1962. Т. 11. С. 3 — 35.

18. *Хромов А. П.* // Обыкновенные дифференциальные уравнения и разложения в ряды Фурье. Саратов, 1968. Вып. 1. С. 29 — 41.

19. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* // Функц. анализ и его приложение. 1978. Т. 12, № 4. С. 24 — 40.

20. *Трушин И. Ю.* О суммировании разложений по собственным функциям конечномерных возмущений вольтеррова оператора. Саратов, 1990. Деп. в ВИНИТИ 15.05.90, № 2618 — В90.

21. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1973.

22. *Шкаликов А. А.* // Функц. анализ и его приложение. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 69 — 80.

23. *Хромов А. П.* // Исследование по теории операторов. Уфа, 1988. С. 182 — 193.

г. Саратов

Поступила в редакцию
15 мая 1995 г.