Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. P. Kukin, Derivations of free Lie p-algebras,
Algebra Logika, 1981, Volume 20, Number 5, 555–562

https://www.mathnet.ru/eng/al1745

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.173
December 11, 2025, 20:57:00

Алгебра и логика, 20, № 5(1981), 555-562

УДК 519.48

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ СВОБОДНЫХ p-АЛГЕБР ЛИ

Г. П. КУКИН

Светлой памяти
Анатолия Илларионовича Ширшова

А. И. Ширшов [1] доказал основной результат о подалгебрах свободных алгебр Ли над полем F:

ТЕОРЕМА. Произвольная подалгебра свободной алгебры Ли является свободной алгеброй Ли.

Аналогичная теорема о p-алгебрах Ли была доказана Е. Виттом [3] (см. также [5]).

Теорема А. И. Ширшова является основой многих продвижений в теории алгебр Ли, в том числе в теории многообразий, теории свободных произведений, алгоритмических проблемах.

Наша работа посвящена изучению алгебры дифференцирований свободной p-алгебры Ли. Доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть A – почти свободная p-алгебра Ли без (ненулевых) алгебраических элементов. Тогда A является свободной p-алгеброй Ли.

Напомним, что почти свободной называется p-алгебра Ли, содержащая свободную p-подалгебру в качестве идеала конечной коразмерности.

Элемент p-алгебры Ли называется алгебраическим, если порожденная им p-подалгебра конечномерна.

Наша теорема аналогична теореме Столлингса [6] из теории групп.

§ 1. Предварительные результаты

Элемент f свободной p-алгебры Ли $L = L[x_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}]$ запишем

© Институт математики СО АН СССР, 1981

в виде линейной комбинации базисных p-правильных слов в алфавите $\{x_\alpha\}$ (см. [2]). Старшая однородная компонента f' элемента f называется его старшей частью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество $\{f_i\} \subset L[x_\alpha]$ называется приведенным, если старшая часть f_i' не принадлежит p-подалгебре, порожденной старшими частями остальных элементов $\{f_j', j \neq i\}$.

В [1] показано, что любая подалгебра свободной лиевой алгебры имеет приведенное множество свободных порождающих. Аналогичным свойством обладают p-подалгебры свободной p-алгебры Ли [5].

Ранг r p-подалгебры B коразмерности c в свободной p-алгебре Ли ранга n вычисляется по формуле из [5]:

$$r = (n-1)p^c + 1. \tag{1}$$

Без дополнительных ссылок мы будем пользоваться результатами [4, 5] об автоморфизмах свободных p-алгебр Ли. В частности, аналог теоремы П. Кона говорит, что группа автоморфизмов свободной p-алгебры Ли конечного ранга порождена элементарными автоморфизмами.

Свойства свободных произведений p-алгебр Ли см. в [7].

Записи $(((ab)\ldots)c)d$, $a\underbrace{b\ldots b}_{m}$ сокращают до $ab\ldots cd$, ab^m.

§ 2. Подготовительные леммы

ЛЕММА 1. Пусть множество элементов свободной p-алгебры Ли $\{r_\alpha, x_n\} \subseteq L[x_1, \ldots, x_n]$ приведенное. Тогда множество $\{r_\alpha x_n^t \mid t = 0, 1, 2, \ldots\}$ также приведенное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно считать, что элементы r_α однородные. Тогда $\{r_\alpha, x_n\}$ – свободные порождающие p-подалгебры $L[r_\alpha, x_n]$, порожденной этим множеством. Следовательно, $\{r_\alpha, x_n^t\}$ – свободные порождающие p-подалгебры M (p-идеала, порожденного в $L[r_\alpha, x_n]$ множеством $\{r_\alpha\}$).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть V – произвольная алгебра Ли, S – ее подалгебра, $\{a_i\}$ – база алгебры V по модулю S. Пусть I – идеал алгебры V, порожденный множеством $\{f_\alpha\}$, лежит в подалгебре S. Тогда множество

$\{f_\alpha a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} \mid \begin{matrix} m=1,2,\dots \\ k_i \geq 0 \end{matrix}\}$ порождает I как идеал подалгебры S.

Аналогичное утверждение для p-идеалов в p-алгебрах Ли также справедливо, причем можно считать, что $k_i < p$ для всех i.

Эта лемма – непосредственное следствие теоремы Биркгофа–Витта [8].

Пусть $L = L[x_1, \dots, x_n]$ – свободная p-алгебра Ли, B – ее p-подалгебра конечной коразмерности c. Выберем базу алгебры L по модулю B из правильных слов $\{a_1, \dots, a_c\}$ так, как это сделано в [5]. В частности, сумма степеней $\{a_i\}$ наименьшая из возможных, и $a_1 = x_n$, если $x_n \notin B$.

Пусть I – p-идеал алгебры L, лежащий в B. Выберем p-подалгебру $B_0 \subseteq B$ со следующими свойствами:

B_0 порождает идеал I в алгебре L, и приведенное множество $\{f_\alpha\}$ порождающих алгебры B_0 таково, что суммарная степень элементов является наименьшей из возможных.

ЛЕММА 3. В обозначениях, введенных выше, множество ненулевых элементов

$$\{f_\alpha a_1^{k_1} \dots a_m^{k_m} \mid m = 0, 1, 2, \dots, \ k_i \geq 0\}$$

является приведенным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно разобрать случай, когда элементы f_α подалгебры B однородны. Проведем индукцию по числу c. При $c=1$ утверждение вытекает из леммы 2.

Пусть теперь $c = C$, $C > 1$, а для меньших значений c лемма справедлива. При сделанных предположениях подалгебра B лежит в p-подалгебре $K = L[x_i x_n^t, \ x_n^p \mid 1 \leq i \leq n-1, 0 \leq t < p]$. По лемме 2, идеал I порожден в подалгебре K множеством

$$\{f_\alpha a_1^{k_1} = f_\alpha x_n^{k_1} \ (0 \leq k_i < p)\}.$$

Это множество является приведенным по лемме 1. Подалгебра B имеет в K коразмерность $C-1 < C$. Остается применить предположение индукции, и лемма доказана.

Идеал I p-алгебры V называется изолированным, если фактор-алгебра V/I не содержит ненулевых алгебраических элементов.

ЛЕММА 4. Пусть B – p-подалгебра конечной коразмерности c в свободной p-ал-

гебре Ли $L = L[x_1,\dots,x_n]$. Кроме того, пусть подалгебра B разложена в свободное произведение $B = B_1 * B_2$, причем $I = Ug_B(B_1)$ – изолированный p-идеал алгебры L. Тогда в обозначениях леммы 3 p-подалгебра B_1 порождена приведенным множеством $\{f_\alpha a_1^{k_1}\dots a_c^{k_c} \mid 0 \le k_i < p\}$.

Доказательство непосредственно вытекает из лемм 2, 3. Изолированность идеала I гарантирует, что все элементы $f_\alpha a_1^{k_1}\dots a_c^{k_c}$ отличны от нуля.

ЗАМЕЧАНИЕ. Обозначим через q ранг p-подалгебры B_0. Из леммы 4 получаем, что ранг p-подалгебры B_1 равен $q_1 = qp^c$, т. е. $qp^c < (n-1)p^c + 1$. Следовательно, $q \le n-1$. Применяя, если требуется, линейный автоморфизм алгебры L, получаем, что в запись порождающих f_α идеала I входят в первой степени разве лишь буквы $x_1,\dots,x_q\ (q \le n-1)$.

Основной в нашем построении является следующая

ЛЕММА 5. В условиях леммы 4 p-идеал I алгебры L порожден некоторым ее свободным множителем $L_1\ (L = L_1 * L_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по коразмерности c. Вначале покажем, как провести шаг индукции.

Пусть $a_1 = x_n \notin B$. В силу предыдущего замечания, порождающие f_α подалгебры B_0 имеют вид $f_\alpha = r_\alpha + \gamma_\alpha x_\alpha$, где $\gamma_\alpha \in F$, $r_\alpha \in K$ – элементы p-подалгебры K с порождающими $\{x_i x_n^\tau,\ x_n^p\ (1 \le i \le n-1,\ 0 \le \tau < p)\}$, $\deg r_\alpha > 1\ (1 \le \alpha \le q < n)$.

Пусть $\{h_\beta = h_\beta^k + \gamma_\beta x_n\}$ – приведенное множество порождающих подалгебры B_2, причем $h_\beta^k \in K$. Рассмотрим p-подалгебру $\tilde{B}_2$ с порождающими $\{h_\beta^k\}$ и p-подалгебру $\tilde{B} = B_1 * \tilde{B}_2$. Очевидно, что $I \subseteq \tilde{B}$, $I = Ug_{\tilde{B}}(B_1)$.

Подалгебра $\tilde{B}$ удовлетворяет условиям леммы, а ее коразмерность в подалгебре K равна $c-1 < c$. Таким образом, доказательство леммы сводится к случаю $c = 1$. Более того, такой же переход, как от подалгебры B_2 к подалгебре $\tilde{B}_2$, позволяет считать, что при $c = 1$ подалгебра B_2 однородна.

Итак, B – p-подалгебра коразмерности 1. С точностью до автоморфизма алгебры L, она порождена элементами $x_j x_n^r + \gamma_{jr} x_n$,

$x_n^p + \gamma x_n$, а p-подалгебра B_1 порождена элементами

$$f_i x_n^t \ (1 \leq i \leq q, \quad 0 \leq t < p, \quad q < n-1).$$

Здесь $f_j = x_j + s_j$, s_j не содержит слагаемых степени 1.

Подалгебра B_2 порождена однородными элементами

$$b_{\ell m} = x_\ell x_n^m + e_{\ell m}, \quad b = x_n^p + e$$

$$(q+1 \leq \ell \leq n-1, \ 0 \leq m < p, e_{\ell 0} = 0, \ e_{\ell m}, e$$

не содержит слагаемых $x_\ell x_n^t$).

Не уменьшая общности, можно считать, что никакая старшая часть $g \in \{b, b_{\ell m}\}$ не принадлежит p-подалгебре, порожденной старшими частями элементов $f_i x_n^t$ и теми из $b, b_{\ell m}$, которые отличны от g.

Приведем к противоречию предположение, что какой-либо из элементов e, $e_{\ell m}$ (например $e_{n-1m}, m \neq 0$) отличен от нуля. Рассмотрим случай, когда $e_{\ell m}$ не является p-многочленом от x_1. (Если это не так, то в приводимых ниже рассуждениях вместо f_1 следует взять элемент $f_1 x_n \in I$.)

Элементы $f_1 = x_1 + s_1$, $f_1 x_{n-1}$ принадлежат идеалу I. Свободными порождающими алгебры I являются $h_r = f_i x_n^\tau v$, где v – произвольное ассоциативное слово от операторов правого умножения на элементы $b, b_{\ell m}$. Выражение элемента $f_1 x_{n-1}$ через порождающие $\{h_r\}$ содержит слагаемое

$$f_1 b_{n-1m} = f_1(x_{n-1} x_n^m + e_{n-1m}) = x_1 x_{n-1} + \ldots + x_1 e_{n-1m}.$$

Раскроем скобки в произведениях $f_j x_n^\tau v$ и получим их выражение в виде линейной комбинации p-правильных слов от $\{x_\alpha\}$. Старшее слагаемое из $x_1 e_{n-1m}$ не имеет подобных среди слагаемых сумм $f_j x_n^\tau v$, поскольку модуль с порождающими $x_1, \ldots, x_q$ над подалгеброй, порожденной $e, e_{\ell m}$, при наших предположениях свободен. Итак, элемент $f_1 x_{n-1}$ не принадлежит идеалу I. Противоречие. Следовательно, p-подалгебра B_2 порождена элементами $x_\ell x_n^m$, $x_n^p (q+1 \leq \ell \leq n-1, m < p)$.

Рассмотрим автоморфизм λ подалгебры $B = L[f_j x_n^\tau, x_\ell x_n^m, x_n^p]$, при котором из элемента f_j (соответственно $f_j x_n^\tau$) вычитаются слагаемые g – одночлены от $\{x_\ell x_n^m, x_n^p\}$ (соответственно $g x_n^\tau$). Автоморфизм λ индуцирован автоморфизмом Λ алгебры L, так как слагаемые g, $g x_n^\tau$ – это одночлены в алфавите $\{x_\ell, x_n, q+1 \leq \ell \leq n-1\}$.

Пусть после произведенных преобразований множество

$$\{ f_j x_n^{\tau}, \ x_\ell x_n^m, \ x_n^p \}$$

не является приведенным. Тогда найдется автоморфизм μ алгебры B, который понижает степень элемента $f_{j_0} x_n^{\tau_0}$, не изменяя остальных элементов. Тогда, по лемме 1, не является приведенным и множество $\{ f_j, x_\ell x_n^m, x_n^p \}$. Найдется автоморфизм μ_1 алгебры B, при котором

$$\mu_1 : f_{j_0} x_n^{\tau} \to [f_{j_0} + \varphi (f_{i \neq j_0}, x_\ell x_n^m, x_n^p)] x_n^{\tau}$$

($\deg f_{j_0}^{\mu_1} < \deg f_{f_0}$, а остальные элементы неподвижны).

Серией таких автоморфизмов μ_i алгебры B переведем множество $\{ f_j \} \subseteq \{ f_j x_n^{\tau} \}$ в множество $\{ x_j \} \subseteq \{ x_j x_n^{\tau} \}$.

Совершим обратный переход. На каждом шаге автоморфизм μ_i^{-1} индуцирован автоморфизмом алгебры L, при котором элементы x_ℓ, x_n остаются неподвижными,

$$f_j^{\mu_1 \cdots \mu_u} = f_j^{\mu_1 \cdots \mu_{u+1}} + \varphi (f_{i \neq j}^{\mu_1 \cdots \mu_u}, x_\ell x_n^m, x_n^p) =$$
$$= f_j^{\mu_1 \cdots \mu_{u+1}} + \psi (f_{i \neq j}^{\mu_1 \cdots \mu_u}, x_\ell, x_n).$$

Итак, с точностью до автоморфизма алгебры L, идеал $I = Ug_B(B_1)$ порожден в L подалгеброй $L_1 = L[x_1, \ldots, x_q]$.

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы

а) Вначале рассмотрим случай, когда ρ-алгебра A из формулировки теоремы конечно-порождена. Представим ее в виде $A = L/I$, где $L = L[x_1, \ldots, x_n]$ – свободная ρ-алгебра Ли наименьшего возможного ранга. Обозначим через B^{φ} свободную ρ-подалгебру, которая является идеалом конечной коразмерности в алгебре A. Пусть B – полный прообраз идеала B^{φ} в алгебре L при естественном эпиморфизме $\varphi : L \to A$.

По теореме Ширшова-Витта, ρ-подалгебра B конечной коразмерности в L является свободной и имеет конечный ранг (1). Поскольку фактор-алгебра $B / B \cap I$ свободна, то найдется такое разложение алгебры B в свободное произведение ρ-алгебр Ли $(B = B_1 * B_2)$, что $B \cap I$ ρ-идеал алгебры B, порожденный B_1. В силу условий теоремы ρ-под-

алгебры $I \cap B$ и B_1 изолированы. По лемме 5, существует такое разложение алгебры $L = L_1 * L_2$, что ее ρ-идеал $B \cap I$ порожден множителем L_1. Если $L_1 \neq 0$, то алгебра L_2 обладает свойствами алгебры L, но имеет меньший ранг. Противоречие. Если же $L_1 = 0$, то $B \cap I = 0$. Но тогда $I = 0$, так как идеал $B \cap I$ имеет в I конечную коразмерность. Следовательно, A – свободная ρ-алгебра Ли.

б) Теперь ρ-алгебра Ли A порождена бесконечным множеством элементов. Пусть B^{φ} – максимальная свободная ρ-подалгебра, являющаяся идеалом в A. Как и прежде, $A = L/I$, где $L = L[x_\alpha]$ – свободная ρ-алгебра Ли, B – полный прообраз подалгебры B^{φ} в L. Пусть одночлены $s_1, \ldots, s_c$ составляют базу алгебры L по модулю B. Буквы из записи элементов $\{s_i\}$ – это $\{x_i, \ldots, x_n\}$. Обозначим через L_2 ρ-подалгебру, которая порождена множеством $x_1, \ldots, x_n$ и является свободным множителем алгебры

$$L = L_1[x_\beta] * L_2, \quad x_\beta \notin \{x_1, \ldots, x_n\}.$$

По построению множества $\{s_i\}$ для любого элемента x_β найдется такой элемент $f_\beta \in L_2$ (f_β – линейная комбинация s_i), что $\tilde{x}_\beta = x_\beta - f_\beta \in B$. Тогда $L = L_2 * L_3$, а ρ-подалгебра L_3 порождена $\{\tilde{x}_\beta\}$, $L_3 \subseteq B$.

Рассмотрим фактор-алгебру $L/\mathcal{J} \cong L_2$ алгебры L по ρ-идеалу $\mathcal{J}$, порожденному множителем L_3. Ее фактор-алгебра $A_2 = L_2/I \cap L_2$ удовлетворяет условию теоремы и конечно-порождена. В силу первой части доказательства, A_2 – это свободная ρ-алгебра Ли. Поскольку свободная ρ-подалгебра (идеал) B^{φ} выбиралась максимальной, то $B^{\varphi} \supseteq A_2$, $B \supseteq L_2$. Итак, $B \supseteq L_2$, $B \supseteq L_3$, т. е. $B = L$.

Теорема полностью доказана.

Утверждение об обычных алгебрах Ли, аналогичное нашей теореме, несправедливо даже при сильных дополнительных предположениях.

Пусть, например, V – это свободная алгебра Ли со свободными порождающими v_1, v_2. Рассмотрим ее расширение $\tilde{V}$ с помощью дифференцирования d:

$$v_1 d = v_2, \qquad v_2 d = v_1 v_2.$$

Алгебра $\tilde{V}$ не является свободной, так как обладает идеалом V конечной коразмерности, который конечно-порожден как подалгебра. Легко проверить, что в алгебре $\tilde{V}$ выполнено следующее условие, более сильное, чем отсутствие (слабо) алгебраических элементов:

для любых линейно-независимых элементов $a, b \in \tilde{V}$ элементы ab^m $(m \geq 0)$

линейно-независимы.

Литература

1. А. И. ШИРШОВ, Подалгебры свободных лиевых алгебр, Матем. сб., 33, № 2(1953), 441-452.

2. А. И. ШИРШОВ, О свободных кольцах Ли, Матем. сб., 45, № 2 (1958), 113-122.

3. E.WITT, Die Unterringe der freien Lieschen Ringe, Math.Z., 64, N 2 (1956), 195-216.

4. Г. П. КУКИН, Примитивные элементы свободных алгебр Ли, Алгебра и логика, 9, № 4(1970), 458-472.

5. Г. П. КУКИН, О подалгебрах свободных p-алгебр Ли, Алгебра и логика, 11, № 1(1972), 59-86.

6. J.R.STALLINGS, On torsion-free groups with infinitely many ends, Ann. Math., 88 (1963), 312-334.

7. Г. П. КУКИН, О свободных произведениях ограниченных алгебр Ли, Матем. сб., 95, № 1(1974), 53-83.

8. А. Г. КУРОШ, Лекции по общей алгебре, Наука, М., 1973.

Поступило 29 июля 1981 г.