5. А к с е н т ь е в Л.А. Об однолистной разрешимости обратных краевых задач.– В сб.: Тр.семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973, вып.10, с.11 - 24.

6. А в х а д и е в Ф.Г. К слабой и сильной проблемам однолистности в обратных краевых задачах.– В сб.: Тр. семин. по краевым задачам. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1973, вып. 10, с. 3-10.

7. Baernstein A. Integrals means, univalent functions and cirkular symmetrization. — Acta Math., 1975, v. 133, p. 139-169.

8. А к с е н т е ь в Л.А. Точные оценки гармонических в круге функций.– Изв.вузов. Матем., 1968, № 3, с.3 - 8.

9. Г р а д ш т е й н И.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– 4-е изд.,перераб. – М.: Физматгиз, 1962. - 1100 с.

10. А к с е н т ь е в Л.А. Достаточные условия однолистности решения обратной задачи теории фильтрации. - УМН, 1959, т.14, вып.4, с.133 - 140.

11. А к с е н т ь е в Л.А., Ш а б а л и н П.Л. Условия однолистности с квазиконформным продолжением и их применение.– Изв.вузов. Матем., 1983, № 2, с. 5 - 14.

12. Г о л у з и н Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. - 2-е изд. - М.: Наука, 1966.- 628 с.

13. А л ь ф о р с Л. Лекции по квазиконформным отображениям.– М.: Мир, 1969.– 183 с.

А.А.Золотарев

О КОНУСЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1 ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕСА НА АЛГЕБРЕ НЕЙМАНА

Пусть φ – точный нормальный полуконечный вес на алгебре Неймана $\mathcal{M}$. В данной работе доказывается, что конус $L_1(\varphi)^+$ положительных элементов пространства $L_1(\varphi)$, построенного А.Н.Шерстневым и Н.В.Труновым в работах [1 - 4], совпадает с замыканием конуса $\mathcal{M}^+$ положительных элементов алгебры $\mathcal{M}$. Сведения по теории пространств $L_1(\varphi)$ содержатся в [I – 4] и обзорной работе [5], мы будем пользоваться терминологией и обозначениями [3 – 5], не оговаривая этого особо.

Установим предварительно следующую лемму, являющуюся уточнением следствия из теоремы 3 в [3].

Л е м м а. Пусть $a \in L_1(\varphi)^+$, тогда $\|a\|_\varphi = \varphi(a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2.I в [6] имеет место равенство $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$, $x \in \mathfrak{M}_\varphi$, где γ осуществляет канонический изометрический изоморфизм $L_1(\varphi) \to \mathcal{M}_*$ [3]. Так как в обеих частях равенства стоят функционалы, непрерывные по норме пространства $L_1(\varphi)$, то $\gamma(a)(1) = \varphi(a)$, $a \in L_1(\varphi)$. Так как $a \in L_1(\varphi)^+$, то $\gamma(a) \in \mathcal{M}_*^+$ и $\|a\|_\varphi = \|\gamma(a)\|_{\mathcal{M}_*} = \gamma(a)(1)$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а. Элемент $a \in L_1(\varphi)$ положителен тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{M}_\varphi^+$ такая, что $\|x_n - a\|_\varphi \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости возьмем любую определяющую последовательность $(x_n) \subset \mathfrak{M}_\varphi$. Можно считать, что $(x_n) \subset \mathfrak{M}_\varphi^э$, поскольку инволюция $x \mapsto x^*$, $x \in \mathfrak{M}_\varphi$, продолжается до антилинейной изометрии пространства $L_1(\varphi)$ на себя, и из сходимости $x_n \to a$ в силу положительности a следует сходимость $x_n^* \to a$ и $\frac{1}{2}(x_n + x_n^*) \to a$ по норме пространства $L_1(\varphi)$. По определению нормы для элемента $\mathfrak{M}_\varphi^э$ для любого натурального n существует разложение

$$x_n = x_n^+ - x_n^-, \quad x_n^+, x_n^- \in \mathfrak{M}_\varphi^+,$$

$$\|x_n\|_\varphi \le \varphi(x_n^+) + \varphi(x_n^-) \le \|x_n\|_\varphi + \frac{1}{n}.$$

Мы имеем

$$\varphi(x_n) = \varphi(x_n^+ - x_n^-) \le \varphi(x_n^+) \le \varphi(x_n^+ + x_n^-) \le \|x_n\|_\varphi + \frac{1}{n}. \qquad (1)$$

Так как φ непрерывен по норме пространства $L_1(\varphi)$, то при $x_n \to a$ в $L_1(\varphi)$ имеем $\varphi(x_n) \to \varphi(a)$. По лемме, доказанной выше, $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_\varphi = \|a\|_\varphi = \varphi(a)$, поэтому крайние члены неравенства (I) имеют в пределе $\varphi(a)$, откуда

$\varphi(x_n^+)$ сходится к $\varphi(a)=\|a\|_\varphi$. Но $\varphi(x_n)\to\varphi(a)$, отсюда $\varphi(x_n^-)$ сходится к нулю. Так как $\|x_n^-\|_\varphi=\varphi(x_n^-)$, то $\|x_n^-\|_\varphi\to 0$. Таким образом, $\|x_n^+ - a\|_\varphi\to 0$, и утверждение доказано.

Следствие [4]. Положительный функционал на $L_1(\varphi)$, полученный продолжением по непрерывности функционала $\varphi:\mathcal{M}_\varphi\to\mathbb{C}$, точен.

Доказательство. Пусть $a\in L_1(\varphi)^+$, $\varphi(a)=0$, тогда существует последовательность $(x_n)\subset\mathcal{M}_\varphi^+$, $\|x_n-a\|_\varphi\to 0$. Но тогда $\|x_n\|_\varphi=\varphi(x_n)\longrightarrow\varphi(a)=0$, т.е. $a=0$.

Литература

1. Шерстнев А.Н. Об одном некоммутативном аналоге пространства L_1. – В сб.: Математический анализ. Казань, 1978, с.112 – 123.

2. Шерстнев А.Н. Каждый гладкий вес является ℓ-весом.– Изв.вузов. Матем., 1977, № 8, с. 88 – 91.

3. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, I.– Изв.вузов. Матем., 1978, № 7, с. 79 – 88.

4. Трунов Н.В., Шерстнев А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса, II.– Изв. вузов. Матем., 1978, № 12, с. 88 – 98.

5. Шерстнев А.Н. К общей теории меры и интеграла в алгебрах Неймана.– Изв.вузов. Матем., 1982, № 8, с.20–35.

6. Трунов Н.В. Локально конечные веса на алгебрах Неймана.– Казань, 1978. – 24 с. – Рукопись представлена Казанским университетом. Деп. в ВИНИТИ 26 декабря 1978, № 101-79.