V. G. Sharmin, D. V. Sharmin, Properties of the spherical image of a spatial strip in E^4,
University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences, 2018, Issue 1, 36–45

УДК 514.752
DOI 10.21685/2072-3040-2018-1-3

В. Г. Шармин, Д. В. Шармин

СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОГО ОБРАЗА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОЛОСЫ В E^4

Аннотация.

Актуальность и цели. Исследование свойств поверхностей в различных пространствах – одна из основных задач дифференциальной геометрии. Для поверхностей в евклидовом пространстве, имеющих коразмерность, большую единицы, возникают новые геометрические характеристики и свойства, которых не имеют гиперповерхности в этом пространстве. В частности, у двумерных поверхностей в четырехмерном евклидовом пространстве появляются коэффициенты кручения. Целью данной работы является изучение свойств сферического образа двумерной поверхности, оснащенной системой нормалей без кручения, в четырехмерном евклидовом пространстве.

Материалы и методы. Используются методы дифференциальной геометрии, разработанные Э. Картаном, К. Ш. Рамазановой и А. И. Фирсовым для исследования поверхностей, имеющих коразмерность больше единицы.

Результаты. Доказаны некоторые свойства сферического образа двумерной поверхности, оснащенной системой нормалей без кручения, а также получены достаточные условия того, что он является трехмерной поверхностью.

Выводы. Исследовано строение сферического образа двумерной поверхности, оснащенной системой нормалей без кручения при выполнении некоторых дополнительных условий.

Ключевые слова: евклидово пространство, двумерная поверхность, сферическое отображение, гауссова кривизна, коэффициенты кручения поверхности.

V. G. Sharmin, D. V. Sharmin

PROPERTIES OF THE SPHERICAL IMAGE OF A SPATIAL STRIP IN E^4

Abstract.

Background. The study of the properties of surfaces in various spaces is one of the main problems of differential geometry. Surfaces in Euclidean space, whose codimension is greater than one, are characterized by some new properties that do not have hypersurfaces in this space. In particular, two-dimensional surfaces in four-dimensional Euclidean space have torsion coefficients. This article is devoted to the study of the properties of a spherical image of a two-dimensional surface with a system normals without torsion in four-dimensional Euclidean space.

Materials and methods. The methods of differential geometry developed by E. Cartan, K. Sh. Ramazanova, and A. I. Firsov to study surfaces, whose codimension is greater than one.

Results. We have proved some properties of the spherical image of a two-dimensional surface with a system of normals without torsion, and also we have obtained sufficient conditions that this image is a three-dimensional surface.

Conclusions. We have investigated the structure of the spherical image of a two-dimensional surface with a system of normals without torsion, under certain additional conditions.

Key words: Euclidean space, two-dimensional surface, spherical mapping, Gaussian curvature, coefficients of torsion of the surface.

Введение

В работе [1] определена сферическая индикатриса произвольной пространственной кривой и изучены свойства этой индикатрисы. В монографии [2] установлена связь между геодезической кривизной пространственной полосы и геодезической кривизной ее сферического образа.

В. Т. Фоменко в статье [3] ввел понятие нормального кручения и провел полную классификацию поверхностей в четырехмерном пространстве постоянной кривизны, для которых нормальное кручение тождественно равно нулю.

И. И. Бодренко получила необходимое и достаточное условие того, что поверхность F^2 в E^4 имеет постоянное гауссово кручение $\chi \equiv \text{const} \neq 0$ [4].

В работе В. А. Есина [5] изучались свойства сферического отображения поверхности V^p в E^{p+2}, определенного с помощью орта данной нормали.

В ряде своих работ авторы настоящей статьи исследовали двумерные поверхности в E^4 и их сферические образы.

Так, в статье [6] выведена формула, позволяющая вычислять кривизну сферического образа двумерной поверхности в E^4, оснащенной системой нормалей без кручения, через геометрические характеристики исходной поверхности. В работе [7] результат был перенесен на многомерный случай.

Статья [8] посвящена обобщению формулы работы [6] на случай поверхности в четырехмерном евклидовом пространстве, имеющей ненулевые коэффициенты кручения.

В настоящей статье изучаются свойства сферического образа двумерной поверхности в E^4 при некоторых дополнительных условиях.

1. Основные определения и формулы

Пусть F^2 есть C^3-регулярная поверхность в евклидовом пространстве E^4, которая задается вектор-функцией

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, u_2). \tag{1}$$

Во всех точках этой поверхности существуют касательная и нормальная плоскости. Зададим в каждой нормальной плоскости ортонормированный базис, состоящий из векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. На поверхности F^2 появятся два векторных поля $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. Пусть эти поля принадлежат классу C^2.

Определение. Поверхность F^2 вместе с полем нормалей $\mathbf{n}$ или $\mathbf{m}$ будем обозначать F_1^2 или F_2^2 соответственно и называть пространственной полосой.

Рассмотрим отображение

$$\upsilon_1 : F^2 \to S^3, \tag{2}$$

которое каждой точке M поверхности F^2 ставит в соответствие точку M' единичной гиперсферы S^3 такую, что вектор с началом в точке O и концом в точке M' равен вектору $\mathbf{n}(M)$, где точка O – центр гиперсферы S^3.

Аналогично определяется отображение $\upsilon_2 : F^2 \to S^3$.

Определение. Отображения υ_1 и υ_2 называются сферическими отображениями пространственных полос F_1^2 или F_2^2 соответственно.

Определение. Функции $p_1 = \mathbf{n}_{u_1} \cdot \mathbf{m}$ и $p_2 = \mathbf{n}_{u_2} \cdot \mathbf{m}$ называются коэффициентами кручения поверхности F^2, вычисленными в нормалях $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ [6].

Пусть $\varphi_1 = \sum\limits_{i,j=1}^{2} B_{ij} du_i du_j$ и $\varphi_2 = \sum\limits_{i,j=1}^{2} b_{ij} du_i du_j$ – вторые квадратичные формы поверхности F^2 в направлениях $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ соответственно, где $B_{ij} = \mathbf{r}_{u_i u_j} \cdot \mathbf{n}$, $b_{ij} = \mathbf{r}_{u_i u_j} \cdot \mathbf{m}$.

Определение. Поверхности Φ_1^2 и Φ_2^2 трехмерного евклидова пространства, у которых первая квадратичная форма совпадает с первой квадратичной формой поверхности F^2, а вторые квадратичные формы равны $\varphi^1 = \varphi_1 + \varphi_2$ и $\varphi^2 = \varphi_1 - \varphi_2$ соответственно, называются ассоциированными с поверхностью F^2 [9].

Определение. Говорят, что поверхности Φ_1^2 и Φ_2^2 трехмерного евклидова пространства образуют пару Бонне, если существует изометрия одной поверхности на другую такая, что линии кривизны переходят в линии кривизны [9].

Определение. Точка на поверхности F^2 называется аксиальной, если векторы $\mathbf{B} = (B_{11}, B_{12}, B_{22})$ и $\mathbf{b} = (b_{11}, b_{12}, b_{22})$ линейно зависимы [10].

Известно, что гауссова кривизна поверхности F^2 вычисляется по формуле

$$K = K_1 + K_2, \tag{3}$$

где $K_1 = \dfrac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$, $K_2 = \dfrac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$, $g_{ij} = \mathbf{r}_{u_i} \cdot \mathbf{r}_{u_j}$ [9]. Значение K не зависит от базиса нормальной плоскости [7].

В работе [9] А. И. Фирсовым получено необходимое и достаточное условие каноничности базиса нормальной плоскости:

$$B_{11}b_{22} - 2B_{12}b_{12} + B_{22}b_{11} = 0. \tag{4}$$

Определение. Величина $\chi = 2 \cdot \dfrac{a_1 - b_1}{2} \cdot \dfrac{a_2 - b_2}{2}$ называется гауссовым кручением поверхности F^2, где a_1, b_1 – главные значения тензора $B_{ij} = \mathbf{r}_{u_i u_j} \cdot \mathbf{n}$; a_2, b_2 – главные значения тензора $b_{ij} = \mathbf{r}_{u_i u_j} \cdot \mathbf{m}$ [11, 12].

Определение. Базис нормальной плоскости $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$, в котором коэффициенты кручения тождественно равны нулю, называется системой нормалей без кручения [9].

Определение. Поверхность, у которой система нормалей без кручения является канонической, называется поверхностью без кручения [9].

2. Коэффициенты кручения сферического образа поверхности

Если якобиан отображения (2) отличен от нуля, то $\upsilon_1(F^2)$ является C^2-регулярной поверхностью, расположенной на единичной гиперсфере S^3 евклидова пространства E^4 и задаваемой вектор-функцией

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(u_1, u_2). \tag{5}$$

Базис касательной плоскости поверхности (5) образован векторами $\mathbf{n}_{u_1}$ и $\mathbf{n}_{u_2}$. Базис нормальной плоскости этой поверхности будут образовывать векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}_1 = \dfrac{[\mathbf{n}, \mathbf{n}_{u_1}, \mathbf{n}_{u_2}]}{\left|[\mathbf{n}, \mathbf{n}_{u_1}, \mathbf{n}_{u_2}]\right|}$. Так как $\mathbf{n}_{u_1} \cdot \mathbf{m}_1 = 0$ и $\mathbf{n}_{u_2} \cdot \mathbf{m}_1 = 0$, то справедливо следующее утверждение.

Свойство 1. Базис нормальной плоскости $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}_1 = \dfrac{[\mathbf{n}, \mathbf{n}_{u_1}, \mathbf{n}_{u_2}]}{\left|[\mathbf{n}, \mathbf{n}_{u_1}, \mathbf{n}_{u_2}]\right|}$ поверхности $\upsilon_1(F^2)$ является для этой поверхности системой нормалей без кручения.

3. Базис нормальной плоскости сферического образа поверхности

В некоторой точке поверхности F^2 может быть введена система координат так, что $g_{12} = B_{12} = 0$.

Выпишем для этого случая деривационные формулы [9]:

$$\mathbf{r}_{u_1u_1} = \frac{g_{11u_1}}{2g_{11}}\mathbf{r}_{u_1} - \frac{g_{11u_2}}{2g_{22}}\mathbf{r}_{u_2} + B_{11}\mathbf{n} + b_{11}\mathbf{m},$$

$$\mathbf{r}_{u_1u_2} = \frac{g_{11u_2}}{2g_{11}}\mathbf{r}_{u_1} + \frac{g_{22u_1}}{2g_{22}}\mathbf{r}_{u_2} + b_{12}\mathbf{m},$$

$$\mathbf{r}_{u_2u_2} = -\frac{g_{22u_1}}{2g_{11}}\mathbf{r}_{u_1} + \frac{g_{22u_2}}{2g_{22}}\mathbf{r}_{u_2} + B_{22}\mathbf{n} + b_{22}\mathbf{m},$$

$$\mathbf{n}_{u_1} = -\frac{B_{11}}{g_{11}}\mathbf{r}_{u_1} + p_1\mathbf{m},$$

$$\mathbf{m}_{u_1} = -\frac{b_{11}}{g_{11}}\mathbf{r}_{u_1} - \frac{b_{12}}{g_{22}}\mathbf{r}_{u_2} - p_1\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}_{u_2} = -\frac{B_{22}}{g_{22}}\mathbf{r}_{u_2} + p_2\mathbf{m},$$

$$\mathbf{m}_{u_2} = -\frac{b_{12}}{g_{11}}\mathbf{r}_{u_1} - \frac{b_{22}}{g_{22}}\mathbf{r}_{u_2} - p_2\mathbf{n}. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$\alpha = \frac{B_{11}}{g_{11}}, \;\; \beta = \frac{B_{22}}{g_{22}}. \tag{7}$$

Разложим вектор $\mathbf{m}_1$ по базису $\mathbf{r}_{u_1}$, $\mathbf{r}_{u_2}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{m}_1 = A\cdot\mathbf{r}_{u_1} + B\cdot\mathbf{r}_{u_2} + C\cdot\mathbf{n} + D\cdot\mathbf{m}. \tag{8}$$

Умножая скалярно равенство (8) поочередно на векторы $\mathbf{n}_{u_1}$, $\mathbf{n}_{u_2}$, $\mathbf{n}$ и учитывая, что $\mathbf{n}_{u_1}\cdot\mathbf{m}_1 = 0$, $\mathbf{n}_{u_2}\cdot\mathbf{m}_1 = 0$, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}_1 = 0$ и $|\mathbf{m}| = 1$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} -A\alpha g_{11} + Dp_1 = 0 \\ -B\beta g_{22} + Dp_2 = 0 \\ C = 0 \\ A^2 g_{11} + B^2 g_{22} + D^2 = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Легко видеть, что если $p_1 = p_2 = 0$, то $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}$.

Свойство 2. Если базис нормальной плоскости $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ поверхности F^2 является системой нормалей без кручения, то

$$\frac{B_{11}}{g_{11}} = \frac{B_{22}}{g_{22}} \text{ или } b_{12} = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Запишем уравнение Риччи для поверхности F^2 [9]:

$$p_{1u_2} - p_{2u_1} = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 & g_{22} \\ B_{11} & 0 & B_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Поскольку $p_1 = p_2 = 0$, то определитель из (11) равен нулю.

4. Свойства сферического образа пространственной полосы в E^4

Пусть поверхность F^2 оснащена системой нормалей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ без кручения.

Пользуясь деривационными формулами (6), вычислим коэффициенты вторых квадратичных форм поверхности $\upsilon_1(F^2)$ в направлении нормалей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}_1$:

$$\tilde{B}_{11} = -\alpha B_{11},\quad \tilde{B}_{12} = 0,\quad \tilde{B}_{22} = -\beta B_{22},$$

$$\tilde{b}_{11} = -\alpha b_{11},\quad \tilde{b}_{12} = -\alpha b_{12} = -\beta b_{12},\quad \tilde{b}_{22} = -\beta b_{22}. \tag{12}$$

Свойство 3. Нормали $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ поверхности F^2 являются каноническими тогда и только тогда, когда каноническими являются нормали $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}_1$ поверхности $\upsilon_1(F^2)$.

Доказательство следует из равенств (12), свойства 1 и определения канонических нормалей.

Свойство 4. Для того чтобы точка на поверхности F^2 была аксиальной, необходимо и достаточно, чтобы ее сферический образ на поверхности $\upsilon_1(F^2)$ являлся аксиальной точкой.

Доказательство. Из определения аксиальной точки следует, что на поверхности F^2 в такой точке $b_{12} = 0$ и $\dfrac{b_{11}}{B_{11}} = \dfrac{b_{22}}{B_{22}}$. Тогда из формул (12) следует доказательство свойства 4.

Пользуясь определением гауссова кручения, получаем, что гауссово кручение поверхности F^2 равно нулю тогда и только тогда, когда $B_{11} = B_{22}$ или $b_{11} = b_{22}, b_{12} = 0$.

Гауссово же кручение поверхности $\upsilon_1(F^2)$ равно нулю тогда и только тогда, когда $\dfrac{B_{11}^2}{g_{11}} = \dfrac{B_{22}^2}{g_{22}}$ или $\dfrac{B_{11}b_{11}}{g_{11}} = \dfrac{B_{22}b_{22}}{g_{22}}$, $b_{12} = 0.$

Свойство 5. Если $\alpha = \beta$, то для того чтобы гауссово кручение в некоторой точке поверхности F^2 было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы гауссово кручение в соответствующей точке поверхности $\upsilon_1(F^2)$ тоже было равно нулю.

Свойство 6. Если $\alpha = \beta$ и $b_{12} = 0$, то гауссовы кручения χ_{F^2} и $\chi_{\upsilon_1(F^2)}$ поверхностей F^2 и $\upsilon_1(F^2)$ соответственно связаны равенством $\chi_{\upsilon_1(F^2)} = \alpha\beta\chi_{F^2}$.

5. Локальное строение сферического образа пространственной полосы в E^4

Пусть поверхность F^2 оснащена полем нормалей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ без кручения и $K_1 \neq 0$.

Предположим, что на поверхности F^2 имеется аксиальная точка M_0. Тогда в силу определения аксиальной точки в точке M_0 имеем $b_{12} = 0$ и $\dfrac{b_{11}}{B_{11}} = \dfrac{b_{22}}{B_{22}}$. В точке M_0 поверхности F^2 возможен один из вариантов:

1) $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$;

2) $K_1 < 0$ и $K_2 < 0$;

3) $K_1 \neq 0$ и $K_2 = 0$.

Гауссова кривизна ее сферического образа $\upsilon_1(F^2)$ вычисляется по формуле [6]:

$$\tilde{K} = 1 + \frac{K_2}{K_1}, \tag{13}$$

поэтому в точке $\upsilon_1(M_0)$ гауссова кривизна не меньше 1.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть поверхность F^2 оснащена полем нормалей **n** и **m** без кручения и $K_1 \neq 0$. Если на поверхности F^2 существует аксиальная точка, то найдется такая окрестность $U(M_0)$, что гауссова кривизна $\tilde{K}$ поверхности $\upsilon_1(U(M_0))$ не меньше 1.

Следствие 1. Если поверхность F^2 состоит из аксиальных точек, то ее сферический образ $\upsilon_1(F^2)$ является трехмерным, т.е. существует гиперплоскость E^3 такая, что $\upsilon_1(F^2) \subset E^3 \cap S^3$.

Следствие 2. Если поверхность F^2 состоит из аксиальных точек и является поверхностью без кручения, то ее сферический образ лежит на единичной двумерной сфере $S^2 \subset S^3$.

Теорема 2. Пусть поверхность F^2 является поверхностью без кручения. Если в некоторой точке M_0 поверхности F^2 $|b_{ii}| < |B_{ii}|$, $b_{12} = 0$, то найдется такая окрестность $U(M_0)$, что гауссова кривизна $\tilde{K}$ поверхности $\upsilon_1(U(M_0))$ положительна.

Доказательство. Условие каноничности нормалей в точке M_0 имеет вид

$$\frac{b_{11}}{B_{11}} = -\frac{b_{22}}{B_{22}}. \tag{14}$$

Если $b_{11} = b_{22} = 0$, то точка M_0 является аксиальной. Значит, согласно теореме 1, утверждение доказано.

Пусть $b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$, тогда K_1 и K_2 имеют разные знаки. Тогда, если $|b_{ii}| < |B_{ii}|$, $b_{12} = 0$, в точке M_0 получим $|K_1| > |K_2|$. В точке $\upsilon_1(M_0)$ гауссова кривизна положительна. Учитывая непрерывность гауссовой кривизны, получаем утверждение теоремы.

Теорема 3. Пусть для поверхности F^2 справедливо неравенство

$$\frac{K_2}{K_1} > -1, \tag{15}$$

тогда ее сферический образ либо лежит в некоторой гиперплоскости, либо ассоциированные с ним поверхности составляют пару Бонне.

Доказательство. Исходя из условия (15) и формулы (13), получаем, что гауссова кривизна поверхности $\upsilon_1(F^2)$ положительна. Таким образом, поверхность $\upsilon_1(F^2)$ удовлетворяет условиям теоремы 6 [9], что и доказывает теорему.

Замечание 1. Теорема 3 применима к поверхностям, удовлетворяющим условиям теоремы 1 или теоремы 2.

Замечание 2. Примером поверхности, неудовлетворяющей условию теоремы 3, является плоский тор в E^4

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\phi, \psi) = (\cos\phi, \sin\phi, \cos\psi, \sin\psi). \tag{16}$$

Сферическим образом плоского тора, если система нормалей $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$ каноническая, является плоский тор. Гауссовы кривизны плоского тора и его сферического образа равны нулю. Для плоского тора не существует гиперплоскости такой, что плоский тор принадлежит этой гиперплоскости.

Заключение

Таким образом, доказаны некоторые свойства сферического образа поверхностей с системой нормалей без кручения в четырехмерном евклидовом пространстве.

Библиографический список

1. **Выгодский, М. Я.** Дифференциальная геометрия / М. Я. Выгодский. – М. ; Л. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – 512 с.
2. **Бакельман, И. Я.** Введение в дифференциальную геометрию «в целом» / И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор. – М. : Наука, 1973. – 440 с.
3. **Фоменко, В. Т.** Классификация двумерных поверхностей с нулевым нормальным кручением в четырехмерном пространстве постоянной кривизны / В. Т. Фоменко // Математические заметки. – 2004. – Т. 75, № 5. – С. 744–756.
4. **Бодренко, И. И.** Характеристический признак поверхностей с постоянным гауссовым кручением в E^4 / И. И. Бодренко // Вестник Волгоградского государственного университета. Сер. 1. – 2013. – № 2. – С. 13–17.
5. **Есин, В. А.** О сферическом отображении поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ / В. А. Есин // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Мат. Физ. – 2008. – № 15. – С. 55–57.
6. **Шармин, В. Г.** Сферическое отображение пространственной полосы / В. Г. Шармин // Исследования по теории поверхностей постоянной кривизны. – Л. : Изд-во ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1987. – С. 98–100.
7. **Шармина, Т. Н.** Связь гауссовой кривизны двумерной поверхности в $(n + 2)$-мерном евклидовом пространстве с гауссовой кривизной ее сферического образа / Т. Н. Шармина, В. Г. Шармин // Альманах современной науки и образования. – 2010. – № 1 (32). Ч. 1. – С. 33–36.
8. **Шармин, В. Г.** Кривизна сферического образа двумерной поверхности с ненулевым кручением в E^4 / В. Г. Шармин, Т. Н. Шармина // Вестник Бурятского университета. Математика, информатика. – 2017. – № 1. – С. 3–9.
9. **Фирсов, А. И.** Канонические нормали поверхности большой коразмерности / А. И. Фирсов // Вестник Московского университета. Сер. 1: Механика. Математика. – 1976. – № 2. – С. 37–42.
10. **Схоутен, И. А.** Введение в новые методы дифференциальной геометрии / И. А. Схоутен, Д. Я. Стройк. – М. : ГИИЛ, 1948. – Т. 2. – 348 с.

11. **Рамазанова, К. Ш.** Теория кривизны X_2 в E_4 / К. Ш. Рамазанова // Известия вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 137–143.
12. **Картан, Э.** Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Изд-во МГУ, 1960. – 307 с.

References

1. Vygodskiy M. Ya. *Differentsial'naya geometriya* [Differential geometry]. Moscow; Leningrad: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1949, 512 p.
2. Bakel'man I. Ya., Verner A. L., Kantor B. E. *Vvedenie v differentsial'nuyu geometriyu «v tselom»* [Introduction to differential geometry "in general"]. Moscow: Nauka, 1973, 440 p.
3. Fomenko V. T. *Matematicheskie zametki* [Mathematical notes]. 2004, vol. 75, no. 5, pp. 744–756.
4. Bodrenko I. I. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. 1* [Bulletin of Volgograd State University. Series 1]. 2013, no. 2, pp. 13–17.
5. Esin V. A. *Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser.: Mat. Fiz.* [Proceedings of BelSU. Mathematics. Physics]. 2008, no. 15, pp. 55–57.
6. Sharmin V. G. *Issledovaniya po teorii poverkhnostey postoyannoy krivizny* [Research on the theory of surfaces of constant curvature]. Leningrad: Izd-vo LGPI im. A. I. Gertsena, 1987, pp. 98–100.
7. Sharmina T. N., Sharmin V. G. *Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya* [Almanac of modern science and education]. 2010, no. 1 (32), part 1, pp. 33–36.
8. Sharmin V. G., Sharmina T. N. *Vestnik Buryatskogo universiteta. Matematika, informatika* [Bulletin of Buryat University. Mathematics, computer science]. 2017, no. 1, pp. 3–9.
9. Firsov A. I. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. 1: Mekhanika. Matematika* [Bulletin of Moscow State University. Mechanics. Mathematics]. 1976, no. 2, pp. 37–42.
10. Skhouten I. A., Stroyk D. Ya. *Vvedenie v novye metody differentsial'noy geometrii* [Introduction into new methods of differential geometry]. Moscow: GIIL, 1948, vol. 2, 348 p.
11. Ramazanova K. Sh. *Izvestiya vuzov. Matematika* [University proceedings. Mathematics]. 1966, no. 6, pp. 137–143.
12. Kartan E. *Rimanova geometriya v ortogonal'nom repere* [Riemannian geometry in the orthogonal frame]. Moscow: Izd-vo MGU, 1960, 307 p.

Шармин Валентин Геннадьевич
кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра алгебры и математической логики, Тюменский государственный университет (Россия, г. Тюмень, ул. Володарского, 6)

E-mail: sharmin@utmn.ru

Sharmin Valentin Gennad'evich
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, sub-department of algebra and mathematical logic, Tyumen State University (6 Volodarskogo street, Tyumen, Russia)

Шармин Дмитрий Валентинович
кандидат педагогических наук, доцент, кафедра математики и информатики, Тюменский государственный университет (Россия, г. Тюмень, ул. Володарского, 6)

E-mail: dsharmin@mail.ru

Sharmin Dmitriy Valentinovich
Candidate of pedagogical sciences, associate professor, sub-department of mathematics and informatics, Tyumen State University (6 Volodarskogo street, Tyumen, Russia)

УДК 514.752

Шармин, В. Г.

Свойства сферического образа пространственной полосы в E^4 / В. Г. Шармин, Д. В. Шармин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1 (45). – С. 36–45. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-1-3.