А.Ф.Галимянов

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО ПОРЯДКУ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА

В работе рассматривается приближенное вычисление сингулярного интеграла

$$S(x,t)=\int_{-1}^{1}\frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)\ln\left|\frac{\tau-t}{c}\right|}\,, \qquad (1)$$

где $x(\tau)$ – плотность, удовлетворяющая некоторым условиям, $c>2$, причем интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим произвольную систему узлов

$$-1=t_0<t_1<\ldots<t_{N-1}<t_N=1\,,\ N=1,2,\ldots . \qquad (2)$$

Интеграл (1) будем вычислять с помощью квадратурных формул вида

$$S_N x=S_N(x,t)=\sum_{k=0}^{N}A_k(t)\,x(t_k),\ -1\leq t\leq 1\,, \qquad (3)$$

где $A_k=A_k^{(N)}$ – произвольные непрерывные функции на $[-1,1]$.

Следуя [1], введем оптимальную оценку погрешности класса квадратурных формул (2), (3):

$$V_N(F)=\inf_{\{t_k,A_j\}_{k,j=0}^{N}}\ \sup_{x\in F}\|S(x,t)-S_N(x,t)\|_{C[-1,1]}\,.$$

О п р е д е л е н и е [1]. Квадратурная формула

$$S_N^{\circ}(x,t)=\sum_{k=0}^{N}A_k^{\circ}(t)\,x(t_k^{\circ}),\ -1\leq t\leq 1\,,$$

называется оптимальной по порядку на классе $F\subset C[-1,1]$, если выполняется условие

$$\sup_{x\in F}\|R_N^{\circ}x\|\asymp V_N(F),\ R_N^{\circ}x=S(x,t)-S_N^{\circ}(x,t).$$

Для сингулярного интеграла (1) верна следующая лемма, аналогичная лемме 18 главы 3 [1].

Л е м м а. Пусть плотность $x(t)\in C[-1,1]$, причем ее модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega(x,t)\,dt}{t\cdot \ln(c/t)} < \infty .$$

Тогда для любого $t\in[-1,1]$ и $\varepsilon\in[0,1]$ для сингулярного интеграла (1) справедлива оценка

$$|S(x,t)| \le 4\,\|x\|_C\cdot \ln\left|\ln\left|\frac{c}{\varepsilon}\right|\right| + 2\int_0^{\varepsilon}\frac{\omega(x,t)\,dt}{t\cdot\ln(c/t)} +$$

$$+\, x(t)\cdot \ln\left|\frac{\ln\left|\frac{1-t}{c}\right|}{\ln\left|\frac{1+t}{c}\right|}\right| .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что

$$S(x,t) = x(t)\ln\left|\frac{\ln\left|\frac{1-t}{c}\right|}{\ln\left|\frac{1+t}{c}\right|}\right| + S_1(t) + S_2(t) + S_3(t), \qquad (4)$$

где

$$S_1(t) = \int_{-1}^{t-\varepsilon}\frac{x(\tau)-x(t)}{(\tau-t)\ln\left|\frac{\tau-t}{c}\right|}\,d\tau ,$$

$$S_2(t) = \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon}\frac{x(\tau)-x(t)}{(\tau-t)\ln\left|\frac{\tau-t}{c}\right|}\,d\tau ,$$

$$S_3(t) = \int_{t+\varepsilon}^{1}\frac{x(\tau)-x(t)}{(\tau-t)\ln\left|\frac{\tau-t}{c}\right|}\,d\tau .$$

Рассмотрим случай, когда $0\le t\le 1$. (Случай $-1\le t\le 0$ получается аналогично.) Исследуя два подслучая $0\le t\le 1-\varepsilon$ и $1-\varepsilon\le t\le 1$ и оценивая каждое слагаемое из (4), получаем утверждение леммы.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Пусть $F=H_\omega^r=H_\omega^r[-1,+1]$, где при $r=0$ выполняется неравенство

$$\int_0^{\delta}\frac{\omega(\tau)\,d\tau}{\tau\cdot\ln(c/\tau)} \le d_1\,\omega(\delta)\,|\ln|\ln(c/\delta)||,\quad 0<\delta<1 . \qquad (5)$$

Тогда

$$V_N\left(H_\omega^r\right) \asymp \frac{\ln \ln N}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)$$

и существует квадратурная формула вида (3) с равноотстоящими узлами

$$t_k = t_k^\circ = -1 + 2k/N \;, \quad k=\overline{0,N}\,, \tag{6}$$

оптимальная по порядку на классе F.

Доказательство. Докажем нижнюю оценку. Из леммы 17 главы 3 [1] при $[a,b]=[-1,+1]$ следует существование $\theta \in [-1,1]$ и $\theta_j \in [-1,1]$, $j=\overline{0,m}$, где $\theta_j - \theta_{j-1} = 1/(N+1)$, $j=\overline{1,m}$, при этом $t_k \notin [\theta_{j-1},\theta_j]$, $k=\overline{0,N}$, $j=\overline{1,m}$, $m \geqslant (N+1)/6$, и выполняются неравенства $\theta < t-\theta < 3j/(N+1)$, $t\in(\theta_{j-1},\theta_j)$, $j=\overline{1,m}$.

Введем

$$x_0(t) = \left\{ S_{r+1,j}(t) \text{ при } t\in[\theta_{j-1},\theta_j];\; 0 \text{ при } t\notin[\theta_{j-1},\theta_j],\, j=\overline{1,m}\right\},$$

где $S_{r+1,j}(t)$ – сплайн из леммы 15 главы 3 [1] на отрезке $[\theta_{j-1}, \theta_j]$. Известно, что

$$x_0 \in H_\omega^r[-1,1]\,, \; x_0(t_k)=0,\; k=\overline{0,N}\,.$$

Тогда

$$V_N\left(H_\omega^r\right) \geqslant S(x_0,\theta) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{x_0(t)\,dt}{(t-\theta)\ln\left|\frac{t-\theta}{c}\right|}\,.$$

Используя леммы 15,17 из главы 3 [1], находим

$$V_N\left(H_\omega^r\right) \geqslant \frac{d_2}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j \ln\frac{j}{c}} \geqslant d_3\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)\frac{\ln\ln N}{N^r}\,,$$

где постоянные d_k $(k=1,2,\ldots)$ не зависят от N.

Докажем верхнюю оценку. Воспользуемся леммой 19 главы 3 [1] при $a=t_{k-1}^\circ$, $b=t_k^\circ$. Положим

$$S_{r+1}(t) = S_{r+1,k}(t)\,,\; t\in[t_{k-1}^\circ, t_k^\circ]\,,\; k=\overline{1,N}\,, \tag{7}$$

где узлы t_i° определены в (6). Тогда из доказанной выше леммы при $\varepsilon = 1/N$ находим

$$|S(x-S_{r+1};t)| \le 4\,\|x-S_{r+1}\|_C \cdot \ln\ln cN + $$
$$+2\int_0^{1/N}\frac{\omega(x-S_{r+1};t)}{t\ln(c/t)}\,dt + |x-S_{r+1}(t)|\cdot\left|\ln\left|\frac{\ln\left|\frac{1-t}{c}\right|}{\ln\left|\frac{1+t}{c}\right|}\right|\right|. \qquad (8)$$

Пусть $t\in[t^\circ_{k-1},t^\circ_k]$, $k=\overline{1,N}$, тогда по лемме 19 главы 3 [1] имеем
$$|x(t)-S_{r+1,k}(t)| \le d_4\cdot\min\left\{|t-t^\circ_{k-1}|^r\omega(t-t^\circ_{k-1}),\right.$$
$$\left.(t^\circ_k-t)^r\omega(t^\circ_k-t)\right\} \le \frac{d_5}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Для первого слагаемого из (8) находим
$$4\|x-S_{r+1}\|_C\,\ln\ln cN \le \frac{d_6\ln\ln N}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right). \qquad (9)$$

Оценим второе слагаемое правой части (8). Пусть $r\geq 1$. Находим
$$\omega(x-S_{r+1},t) \le \|x'-S'_{r+1}\|_C \le \frac{d_7\,t}{N^{r-1}}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right),\ 0<t\le 2.$$

Поэтому
$$2\int_0^{1/N}\frac{\omega(x-S_{r+1},t)}{t\ln(c/t)}\,dt \le \frac{2d_7}{N^{r-1}}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)\int_0^{1/N}\frac{dt}{\ln(c/t)} \le$$
$$\le \frac{2d_7}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

При $r=0$, используя лемму 19 главы 3 [1], получаем
$$\omega(x-S_{r+1},t) \le \omega(x,t)+\omega(S_{r+1},t) \le d_8\,\omega(x,t),\ 0\le t\le 2.$$

Отсюда
$$2\int_0^{1/N}\frac{\omega(x-S_{r+1},t)}{t\ln(c/t)}\,dt \le 2d_8\int_0^{1/N}\frac{\omega(x,t)}{t\ln(c,t)}\,dt,\ r=0. \qquad (10)$$

Оценим третье слагаемое правой части (8). Аналогично [1] при $r\geq 1$ и $N\geq 3$ получаем (полагая $t=1-\delta$; $t_{N-1}\le t\le t_N\le 1$, $0\le\delta\le 2/N$)
$$|x(t)-S_{r+1}(t)|\,\ln\left|\frac{\ln\left|\frac{1-t}{c}\right|}{\ln\left|\frac{1+t}{c}\right|}\right| \le d_9\,\delta^r\omega(\delta)\,|\ln|\ln^2\delta|| \le$$
$$\le \frac{d_{10}\cdot\ln\ln N}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

При $r\geq 1$, $N\geq 3$ получим окончательно
$$|S(x-S_{r+1};t)| \le \frac{d_{11}\cdot\ln\ln N}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right),\ r\geq 1. \qquad (11)$$

Пусть $r=0$. Используя (8), (9), (10), находим

$$|S(x-S_{r+1};t)| \le d_{12}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)\ln\ln N + 2d_8 \int_0^{1/N} \frac{\omega(x,t)\,dt}{t\ln(c/t)}, r=0,$$

в силу (5) имеем

$$|S(x-S_{r+1};t)| \le (d_{12}+2d_8\cdot d_1)\,\omega\left(\frac{1}{N}\right)\ln\ln N,\ r=0. \qquad (12)$$

Из (11) и (12) следует требуемая оценка

$$V_N(H_\omega^r) \le \sup_{x\in H_\omega^r} \| S(x-S_{r+1};t)\| \le \frac{d_{13}\cdot\ln\ln N}{N^r}\,\omega\left(\frac{1}{N}\right).$$

Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1 и свойства интерполяционных сплайнов первого порядка, легко доказывается

Теорема 2. Квадратурная формула

$$S(x;t) \approx S(S_N^1 x;t),\ -1<t<1,$$

где $S_N^1 x = S_N^1(x,t)$ – сплайн первого порядка, интерполирующий функцию $x(t)$ в узлах (6), оптимальна по порядку на классе $F=H_\omega^r$ при $r=0, r=1$ и любых модулях непрерывности $\omega=\omega(\delta)$, $0<\delta<2$.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.– Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1980.– 232 с.

П.М.Зиновьев, Ф.Ф.Майер

УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ БЕСКОНЕЧНОГО ИСКОМОГО КОНТУРА

В теории обратных краевых задач (ОКЗ) (см. [1, гл.I; 2, § 33]) важное место занимает исследование однолистности их