М. Г. Любарский, Об аналитических почти-периодических функциях Левитана, *Докл. АН СССР*, 1972, том 206, номер 3, 529–531

Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 3

УДК 517.86

МАТЕМАТИКА

М. Г. ЛЮБАРСКИЙ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ЛЕВИТАНА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 III 1972)

В 1938 г. Б. М. Левитан [1] построил обобщение теории почти-периодических (п.п.) функций Г. Бора, рассмотрев более широкий класс функций, которые впоследствии стали называться п.п. в смысле Левитана (L. п.п.). Теория L.п.п. функций во многом аналогична теории Г. Бора. В настоящей заметке рассматриваются аналитические L.п.п. функции и переносятся на этот класс функций основные понятия и теоремы теории аналитических п.п. функций Г. Бора.

Доказательства ряда теорем из теории аналитических п.п. функций Г. Бора существенно основываются на ограниченности этих функций во всякой внутренней полосе. Подобные рассуждения не применимы к аналитическим L.п.п. функциям, которые не только, вообще говоря, не ограничены, но могут расти сколь угодно быстро. Поэтому построение аналитических L.п.п. функций требует применения других методов теории аналитических функций.

1. Условимся обозначать через (a, b) открытую полосу $\{z\colon a < \operatorname{Im} z < b\}$, а через $[a, b]$ — замкнутую $\{z\colon a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant b\}$.

Опираясь на определения Б. М. Левитана [1] и Б. Я. Левина [2] в форме, приданной им А. Райхом [3], определим аналитические L.п.п. функции с помощью одного из следующих двух эквивалентных определений.

Назовем вещественное число τ $(\varepsilon - N)$-смещением функции $f(z)$, заданной в полосе $[a, b]$, если

$$\sup_{|\operatorname{Re} z|\leqslant N}\ \sup_{a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b} |f(z+\tau)-f(z)|<\varepsilon.$$

Определение 1. Функция $f(z)$, аналитическая в полосе (a, b) и непрерывная в замкнутой полосе $[a, b]$, называется п.п. в смысле Левитана в этой замкнутой полосе, если каждой паре чисел $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ можно сопоставить относительно плотное множество E такое, что множество $E - E$ состоит только из $(\varepsilon - N)$-смещений функции $f(z)$.

Пусть $f(z)$ — произвольная функция, заданная в полосе $[a, b]$. Назовем последовательность вещественных чисел (t_k), $k = 1, 2, \ldots$, сходящейся по функции $f(z)$ к числу t_0, если для любого вещественного x

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup_{\substack{\operatorname{Re} z = x\\ a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b}} |f(z+t_k)-f(z+t_0)| = 0.$$

Последовательность (t_k), $k = 1, 2, \ldots$, назовем условно сходящейся по функции $f(z)$, если при любом вещественном x

$$\lim_{\min\{k,\, l\}\to\infty}\ \sup_{\substack{\operatorname{Re} z = x\\ a\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant b}} |f(z+t_k-t_l)-f(z)| = 0.$$

Определение 2. Аналитическая в полосе (a, b) и непрерывная в замкнутой полосе $[a, b]$ функция $f(z)$ называется п.п. в смысле Левитана в этой замкнутой полосе, если любая последовательность вещественных чисел содержит подпоследовательность, сходящуюся условно по функции $f(z)$.

Аналитические L.п.п. функции можно рассматривать и в открытой полосе.

Определение 3. Функция $f(z)$, аналитическая в полосе (a, b), называется п.п. в смысле Левитана в этой полосе, если она является п.п. в смысле Левитана в любой замкнутой внутренней полосе $[a_1, b_1]$, $a < a_1 < b_1 < b$.

В дальнейшем мы не будем рассматривать эти функции, так как их свойства легко вытекают из свойств L.п.п. функций в замкнутой полосе.

2. Из теории п.п. функций известно, что с помощью произвольного счетного числового модуля M на вещественной оси можно ввести новую топологию Ω_M, задаваемую согласованной с операцией сложения метрикой, так что сходимость последовательности чисел в этой топологии совпадает со сходимостью на модуле M. Подобные топологии называются боровскими компактификациями оси, так как они превращают вещественную ось в предкомпактную топологическую группу.

Если функция $f(z)$ есть аналитическая L.п.п. функция в полосе $[a, b]$, то из определений 1 и 2 легко вытекает, что семейство

$$\{f_y(x) = f(iy + x)\}, \quad a \leqslant y \leqslant b, \tag{1}$$

состоит из L.п.п. функций. Каждой функции $f_y(x)$ из этого семейства отвечает счетный числовой модуль, который мы обозначим через M_y.

Определение 4. Модулем функции $f(z)$, п.п. в смысле Левитана в полосе $[a, b]$, назовем модуль $M_f = \sum\limits_{a \leqslant y \leqslant b} M_y$.

Знак суммы обозначает здесь арифметическую сумму числовых множеств.

Теорема 1. *Модуль M_f счетен. Сходимость последовательности чисел по функции $f(z)$ совпадает со сходимостью в топологии Ω_{M_f}.*

Следствие. *Для того чтобы аналитическая в полосе (a, b) и непрерывная в замкнутой полосе $[a, b]$ функция $f(z)$ была п.п. в смысле Левитана и отвечающий ей числовой модуль принадлежал модулю M, необходимо и достаточно, чтобы семейство функций* (1) *было равностепенно непрерывным в топологии Ω_M.*

3. Класс аналитических L.п.п. функций можно охарактеризовать как замыкание в некоторой топологии множества всех тригонометрических полиномов.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(z)$, заданная в полосе $[a, b]$, была аналитической L.п.п. функцией в этой полосе и отвечающий ей числовой модуль принадлежал модулю M, необходимо и достаточно, чтобы каждой паре чисел $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ можно было поставить в соответствие тригонометрический полином с показателями из M и число $\delta > 0$ такие, что*

$$\sup_{|\mathrm{Re}\, z| \leqslant N} \sup_{a \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant b} |f(z + \tau) - P(z + \tau)| < \varepsilon,$$

где τ — любое δ-смещение полинома $P(z)$ в полосе $[a, b]$.

4. Теория рядов Фурье для L.п.п. функций, развитая в ([1], [2]), во многом отлична от аналогичной теории для п.п. функций. В частности, не каждой L.п.п. функции можно сопоставить ряд Фурье. С другой стороны, одной L.п.п. функции может отвечать несколько различных рядов Фурье. Важно отметить, что, несмотря на это, теорема единственности сохраняется.

Для аналитических L.п.п. функций будем рассматривать ряды Дирихле.

Определение 5. Говорят, что функции $f(z)$ в полосе $[a, b]$ отвечает ряд Дирихле

$$f(z) \sim \sum_{(k)} a_k e^{i\lambda_k z}, \tag{2}$$

если каждой функции из семейства (1) отвечает ряд Фурье

$$f_y(x) \sim \sum_{(k)} a_k e^{-\lambda_k y} e^{i\lambda_k x}, \tag{3}$$

где коэффициенты a_k от y не зависят.

Условие теоремы, устанавливающей существование ряда Дирихле, должно обеспечить, во-первых, существование ряда Фурье у каждой функции из семейства (1), а во-вторых, возможность выбрать из рядов Фурье, отвечающих функции $f_y(x)$, ряд вида (3). Сформулируем одну из таких теорем.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — аналитическая L.п.п. функция в полосе $[a, b]$, и для любого y, $a \leqslant y \leqslant b$, выполнено условие*

$$\sup_{t>0} \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} |f(iy+x)|^2 dx < +\infty.$$

Тогда функции $f(z)$ отвечает по крайней мере один ряд Дирихле.

В. А. Марченко ([4]) показал, что, зная ряд Фурье L.п.п. функции, можно восстановить эту функцию. Следующая теорема показывает, что аналитические L.п.п. функции также восстанавливаются по своему ряду Дирихле.

Теорема 4. *Пусть $f(z)$ — аналитическая L.п.п. функция в полосе $[a, b]$ с рядом Дирихле* (2).

Тогда существует зависящая от параметра $\sigma > 0$ последовательность чисел (C_k^σ), $k = 1, 2, \ldots$, обладающая следующим свойством: любым $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ отвечают $\sigma > 0$, $m_\sigma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\sup_{|\mathrm{Re}\, z| \leqslant N} \ \sup_{a \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant b} \left| f(z+\tau) - \sum_{k=1}^{m_\sigma} c_k^\sigma a_k e^{i\lambda_k (z+\tau)} \right| < \varepsilon,$$

где τ — любое $(\delta - 1/\delta)$-смещение функции $f(z)$ в полосе $[a, b]$.

Теорема 5. *Пусть $f(t)$ — ограниченная L.п.п. функция, определенная на вещественной оси. Для того чтобы существовала голоморфная функция конечной степени Δ в полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$, имеющая на вещественной оси предельные значения, совпадающие со значениями $f(t)$, необходимо и достаточно, чтобы среди рядов Фурье, отвечающих функции $f(t)$, существовал такой ряд, что точная нижняя граница показателей Фурье этого ряда была равна $-\Delta$. При этом функция $f(z)$ будет L.п.п. функцией в полуплоскости $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$.*

Теорема 6. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в полосе (a, b) такая, что при некотором c, $a < c < b$, функция $f_c(x) = f(ic + x)$ является L.п.п. функцией с модулем, принадлежащим модулю M. Для того чтобы функция $f(z)$ являлась L.п.п. функцией в любой внутренней полосе $[a_1, b_1]$, $a < a_1 < b_1 < b$, необходимо и достаточно, чтобы любой тройке чисел a_1, b_1, $a < a_1 < b_1 < b$, x, $-\infty < x < +\infty$, можно было сопоставить окрестность нуля U, принадлежащую топологии Ω_M, такую, что функция $f(z)$ ограничена на множестве $\{z\colon \mathrm{Re}\, z - x \in U;\ a_1 \leqslant \mathrm{Im}\, z \leqslant b_1\}$.*

Автор пользуется случаем поблагодарить Б. Я. Левина, предложившего тему этой работы и неоднократно помогавшего ценными советами.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
22 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Зап. Харьковск. матем. общ., 15, 1, 2, 3 (1938). [2] Б. Я. Левин, Укр. матем. журн., № 1, 49 (1948). [3] A. Reich, Math. Zs., 116, 218 (1970). [4] В. А. Марченко, ДАН, 53, № 1, 7 (1946).