Степени *n* и *n*-е степени

П.КОЖЕВНИКОВ, В.СЕНДЕРОВ

Начнем со следующей задачи из задачника «Кванта».

Задача М2212. *Докажите, что для любого натурального $a \geq 3$ существуют бесконечно много натуральных n таких, что*

а) $a^n - 1$ делится на n; б) $a^n - 1$ делится на n^2.*

В этой заметке мы приведем ее решение, а также рассмотрим ее обобщения и близкие задачи.[1] Все рассматриваемые здесь числа предполагаются целыми.

Зафиксируем целое число a. Будем говорить, что натуральное число n является a-хорошим, если $a^n - 1$ делится на n. Множество всех a-хороших чисел обозначим $A_1(a)$. Множество всех натуральных чисел n, для которых $a^n - 1$ делится на n^2, обозначим $A_2(a)$ (читатель может назвать такие числа a-отличными, или, скажем, a-дважды хорошими). Вообще, для каждого натурального k через $A_k(a)$ обозначим множество натуральных чисел n, для которых $a^n - 1$ делится на n^k. Ясно, что $A_1(a) \supset A_2(a) \supset A_3(a) \supset \ldots \supset \{1\}$. Таким образом, в задаче М2212 утверждается, что при $a \geq 3$ множество а) $A_1(a)$; б) $A_2(a)$ бесконечно.

Цепочки хороших чисел

Решение I задачи а). Пусть n является a-хорошим числом, и $a^n - 1 = kn$. Здесь $k > 1$, так как при $a \geq 3$ имеем $a^n - 1 > n$. Если $t > 1$ – любой делитель k, то $a^{tn} - 1 = \left(a^n - 1\right)\left(a^{(t-1)n} + a^{(t-2)n} + \ldots + a^n + 1\right)$ делится на $a^n - 1$, а значит, и на tn. Таким образом, вместе с n число tn тоже является a-хорошим. Поэтому, начиная с a-хорошего числа $n = 1$, переходами $n \to tn$ получаем бесконечную возрастающую цепочку чисел из множества $A_1(a)$.

Приведем несколько другое решение пункта а). Используем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $x - 1$ делится на натуральное m, то $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1$ делится на m тогда и только тогда, когда t делится на m.*

Доказательство. Действительно, $x \equiv 1 \pmod{m}$, поэтому каждое из t слагаемых в сумме $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1$ дает остаток 1 при делении на m, т.е. $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1 \equiv t \pmod{m}$.

Упражнение 1. а) Пусть $x - y$ делится на натуральное m. Докажите, что если t делится на m, то $x^{t-1} + x^{t-2}y + x^{t-3}y^2 + \ldots + xy^{t-2} + y^{t-1}$ делится на m.

б) Докажите обратное утверждение в предположении $\text{НОД}(y, m) = 1$.

[1] Некоторые задачи предлагаются в виде упражнений, не все из которых простые.

Решение II задачи а). Пусть $n \in A_1(a)$, и t – делитель $a^n - 1$. Тогда $a^{tn} - 1 = \left(a^n - 1\right)\left(a^{(t-1)n} + a^{(t-2)n} + \ldots + a^n + 1\right)$. Первая скобка делится на n. Вторая скобка имеет вид $x^{t-1} + x^{t-2} + \ldots + x + 1$, где $x = a^n$. Так как $x - 1$ делится на t, то по лемме 1 вторая скобка делится на t. Итак, $a^{tn} - 1$ делится на tn, значит, вместе с $n \in A_1(a)$ число tn принадлежит множеству $A_1(a)$. Как и в первом решении, получаем бесконечную возрастающую цепочку чисел из $A_1(a)$.

Решение задачи б). Пусть $n \in A_2(a)$, и пусть $a^n - 1 > n^2$, т.е. $a^n - 1 = kn^2$, где $k > 1$. Если $t > 1$ – любой делитель k, то $a^{tn} - 1 = \left(a^n - 1\right)\left(a^{(t-1)n} + \ldots + a^n + 1\right)$. Первая скобка делится на tn^2. По лемме 1 вторая скобка делится на t, причем она очевидно больше t. Поэтому $a^{tn} - 1$ делится на $(tn)^2$, причем $a^{tn} - 1 > (tn)^2$.

Как и в задаче а), начиная с числа $1 \in A_2(a)$, переходами $n \to tn$ получаем бесконечную возрастающую цепочку чисел из $A_2(a)$.

Упражнение 2. Для пары чисел (a, b) и натурального k договоримся (здесь и далее) обозначать через $A_k(a, b)$ множество чисел n таких, что $a^n - b^n$ делится на n^k. В частности, $A_k(a) = A_k(a, 1)$. Докажите, что если a и b – натуральные, $a - b \geq 2$, то $A_2(a, b)$ бесконечно.[2]

Показатели по модулю

Чтобы узнать больше о хороших числах (т.е. о том, как устроены множества $A_k(a)$), нам потребуется следующее важное понятие *показателя числа по некоторому модулю*. Пусть дано число a и натуральное $d > 1$, так что $\text{НОД}(a, d) = 1$. Напишем d чисел 1, a, a^2, …, a^{d-1} и отыщем среди них два числа, имеющих равные остатки при делении на d (такие найдутся, так как ни одно из написанных чисел не делится на d, т.е. не имеет остаток 0). Пусть это числа a^k и a^l, где $0 \leq k < l \leq d - 1$. Тогда разность $a^l - a^k = a^k\left(a^{l-k} - 1\right)$ делится на d, и в силу $\text{НОД}(a, d) = 1$ получаем, что $a^{l-k} - 1$ делится на d. Приведенное выше красивое (и часто применяемое) рассуждение приводит к тому, что нашлось натуральное m ($m = l - k$) такое, что $a^m \equiv 1 \pmod{d}$. Наименьшее из таких натуральных m

[2] Как выяснилось после публикации М2212, это обобщение задачи содержится в книге Н.М.Седракяна «Теория чисел в задачах» (Ереван: Эдит Принт, 2007. Задача 10.5). Авторская идея решения также состоит в продолжении цепочки подходящих чисел n.

называется *показателем* числа a по модулю d. Как видно из предыдущих рассуждений, показатель a по модулю d всегда меньше d. Отметим, что $a \equiv 1 \pmod d$ означает, что показатель по модулю d равен 1.

Лемма 2. *Пусть число a и натуральное $d > 1$ таковы, что НОД$(a, d) = 1$. Пусть δ – показатель a по модулю d, k – натуральное. Тогда $a^k - 1$ делится на d, если и только если k делится на δ.*[3]

Доказательство. Разделим k на δ с остатком: $k = q\delta + r$, $r \in \{0, 1, \ldots, \delta - 1\}$. Так как $a^\delta \equiv 1 \pmod 1$, то $a^k \equiv a^r \pmod d$, откуда и следует нужное утверждение: если $r = 0$, то $a^r \equiv 1 \pmod d$, а если $r \in \{1, \ldots, \delta - 1\}$, то $a^r \not\equiv 1 \pmod d$ по определению δ.

Задача 1. *Пусть $n > 1$, $n \in A_1(a)$. Тогда $a - 1$ делится на наименьший простой делитель числа n.*

Решение. Пусть p – наименьший простой делитель n, а δ – показатель числа a по модулю p (этот показатель существует, причем $1 \le \delta < p$). По условию $a^n - 1$ делится на p. По лемме 2 получаем, что n делится на δ. Но как мы отмечали, $\delta < p$, и в силу выбора p имеем $\delta = 1$. Это и означает, что $a \equiv 1 \pmod p$.

Из задачи 1 вытекает, что в множестве $A_1(a)$ лишь одно число $n = 1$ взаимно просто с $a - 1$. В частности, при $a = 2$ получаем $A_1(a) = \{1\}$, что контрастирует с задачей М2212.

Упражнения

3. Найдите все пары натуральных чисел a, b такие, что $2^a - 1$ делится на b, а $2^b - 1$ делится на a.

4. Если НОД$(a - b, n) = 1$ и $n \in A_1(a, b)$, то $n = 1$. В частности, $A_1(a, a - 1) = \{1\}$.

Пусть $n \in A_1(a)$ и $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ – его разложение на простые множители. Пусть простые множители занумерованы в порядке возрастания, т.е. $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_k$. Как следует из задачи 1, $a - 1$ делится на p_1. Теперь для $m = p_2 \ldots p_k$ имеем $\left(a^{p_1}\right)^m - 1$ делится на m, т.е. $m \in A_1\left(a^{p_1}\right)$, и снова по задаче 1 получаем, что $a^{p_1} - 1$ делится на p_2. Продолжая далее, получаем, что $a^{p_1 p_2 \ldots p_i} - 1$ делится на p_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Возвращаясь ко второму решению задачи М2212, мы понимаем, что получена в явном виде цепочка a-хороших чисел $1 \to p_1 \to p_1 p_2 \to \ldots \to p_1 p_2 \ldots p_k = n$, ведущая от 1 до n.[4] Последние соображения помогают решить следующие две задачи.

Задача 2. *Если $n > 2$ и $n \in A_1(3)$, то n делится на 4.*

Решение. Пусть $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ – 3-хорошее число, где $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_k$ – простые числа. Как мы видели, $3 - 1$ делится на p_1, откуда $p_1 = 2$. Так как $n > 2$, то $k \ge 2$, и $3^{p_1} - 1 = 8$ должно делиться на p_2, откуда $p_2 = 2$.

Упражнение 5 (см. задачу М2067 в «Кванте» №6 за 2007 г.). Если $n \ge 2$ и $n \in A_1(10)$, то n делится на 3.

Задача 3. *Пусть $a \ne \pm 1$. Тогда для данного числа s множество $A_1(a)$ содержит лишь конечное количество чисел, в разложение которых на простые множители входит не более s простых чисел.*[5]

Решение. Пусть $n = p_1 p_2 \ldots p_k$ – a-хорошее число, где $k \le s$, и $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_k$ – простые числа. Как мы видели, $a - 1$ делится на p_1, значит, p_1 может принимать лишь конечное множество значений. Далее, $a^{p_1} - 1$ делится на p_2, значит, p_2 тоже может принимать лишь конечное множество значений. Продолжая так далее, получаем требуемое.

Следующие два упражнения дополняют картину для $a = 2$.

Упражнения

6. Как мы видели, при $n > 1$ число $2^n - 1$ не делится на n, значит, НОД$\left(2^n - 1, n\right) \le \frac{n}{2}$. Докажите, что равенство НОД$\left(2^n - 1, n\right) = \frac{n}{2}$ выполняется для бесконечного количества четных n.

7. Как видно из решения упражнения 6, существует возрастающая геометрическая прогрессия натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ такая, что последовательность k_n=НОД$\left(2^{a_n} - 1, a_n\right)$ стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Пользуясь теоремой Дирихле[6], докажите, что бесконечной возрастающей арифметической прогрессии с аналогичным свойством не существует.

Борьба за свободу... от квадратов

Натуральное число называется *свободным от квадратов*, если оно не делится ни на какой точный квадрат, больший 1. Иначе говоря, в разложении свободного от квадратов числа на простые сомножители каждое простое число присутствует не более чем в первой степени. Оказывается, возможно следующее усиление М2212.

Задача 4. *Пусть $a \ge 4$. Тогда $A_2(a)$ содержит бесконечно много свободных от квадратов чисел.*[7]

---

[3] Из этой леммы и малой теоремы Ферма следует, что показатель a по модулю простого числа p является делителем числа $p - 1$. Более общо, по теореме Эйлера, показатель a по модулю натурального $d > 1$ является делителем числа $\varphi(d)$, где $\varphi(d)$ обозначает количество натуральных чисел, меньших d и взаимно простых с d.

[4] Получаем, в частности, что любое a-хорошее число можно получить именно так, как описано во втором решении задачи М2212. Кстати, цепочку a-хороших чисел из первого решения задачи М2212 можно сконструировать «с конца»: пусть $n \in A_1(a)$, а δ – показатель числа a по модулю n, тогда $\delta \in A_1(a)$ (или $t \in A_1(a)$, где t – любое число такое, что $n \vdots t \vdots \delta$).

[5] Утверждение этой задачи противоположно ошибочному утверждению, напечатанному на странице 48 книги В.Серпинского «250 задач по элементарной теории чисел» (М.: Просвещение, 1968).

[6] Теорема Дирихле утверждает, что в возрастающей арифметической прогрессии $\{a + nd \mid n \in \mathbb{N}\}$, где a и d – натуральные и взаимно простые, встречается бесконечно много простых чисел. Доказательство этой теоремы не элементарно. На самом деле, для решения задачи достаточно воспользоваться лишь частным случаем теоремы Дирихле для прогрессии $\{1 + nd \mid n \in \mathbb{N}\}$, доказательство которого проще.

[7] Аналогичный вопрос про $A_1(a)$ предлагался на летних сборах команды России перед международной математической олимпиадой.

Решение.

Лемма 3. *Если $a-1$ делится на нечетное простое p, то $s = a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1$ не делится на p^2.*

Доказательство. Случай $a = 1$ очевиден. Если $a - 1 = p^{\alpha}k$, где k не делится на p, то $a^p - 1 = \left(1 + p^{\alpha}k\right)^p - 1$. Разложение по биному дает

$$a^p = \left(1 + p^{\alpha}k\right)^p = 1 + p \cdot p^{\alpha}k + \frac{p(p-1)}{2} \cdot p^{2\alpha}k^2 + \ldots = 1 + p^{\alpha+1}k + p^{\alpha+2}l,$$

где l – целое. Видим, что $a^p - 1$ не делится на $p^{\alpha+2}$ (делится ровно на $(\alpha+1)$-ю степень p), значит, $s = \dfrac{a^p - 1}{a - 1}$ не делится на p^2.

Лемма 4. *Пусть $a \geq 2$, p – нечетное простое число. Тогда число $s = a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a^2 + a + 1$ имеет хотя бы один нечетный простой делитель, не являющийся делителем $a - 1$.*

Доказательство. Пусть $d = \text{НОД}(a-1, s)$. Тогда, по лемме 1, p делится на d. Если $d = 1$, то утверждение леммы очевидно. Если же $d = p$ и s не является степенью p, то утверждение леммы также верно. Но по лемме 3 (отметим, что s нечетно при любом a) s не делится на p^2, значит, $s = p^m$ невозможно, ибо $s > p$.

Так же, как и в решении задачи М2212,б), начинаем строить цепочку $1 \to p_1 \to p_1p_2 \to \ldots \to p_1p_2\ldots p_k \to \ldots$ чисел из $A_2(a)$, где $p_1, p_2, \ldots$ – попарно различные простые числа. При четном $a \geq 4$ начало цепочки будет $1 \to p_1$, где p_1 – нечетный простой делитель $a - 1$; при нечетном $a \geq 5$ положим $p_1 = 2$, т.е. начало цепочки будет иметь вид $1 \to 2 \to 2p_2$, где p_2 – нечетный простой делитель $a^2 - 1$ (так как $a \geq 5$, такое p_2 найдется).

Пусть нами уже построена цепочка $1 \to \ldots \to p_1p_2\ldots p_{k-1} \to p_1p_2\ldots p_k$ чисел из $A_2(a)$, где p_k – нечетное простое число. Положим $p = p_k$, $m = p_1p_2\ldots p_{k-1}$, $n = p_1p_2\ldots p_k$. Согласно построению цепочки, $a^{p_1\ldots p_{i-1}} - 1$ делится на $(p_1\ldots p_{i-1})^2 p_i$, $i = 2, \ldots, k$, в частности, $a^m - 1$ делится на pm^2. Для продолжения цепочки $n \to nt$ будем выбирать число $t = p_{k+1}$ простым нечетным делителем числа $\dfrac{a^n - 1}{a^m - 1} = a^{(p-1)m} + a^{(p-2)m} + \ldots + a^m + 1$, на который не делится $a^m - 1$ (такое t найдется по лемме 4), тогда pm^2 тоже не делится на t, и, значит, $n = pm$ не делится на t. Итак, наша цепочка чисел из $A_2(a)$ может быть продолжена до бесконечности.

Множества $A_k(n)$ для $k \geq 3$ и LTE-лемма

Как мы видели, множества $A_1(a)$ и $A_2(a)$ для «почти всех» чисел a бесконечны. А насколько велики множества $A_k(a)$ при $k \geq 3$? Ниже мы получим некоторые результаты в этом направлении.

Задача 5. *Пусть $a \neq \pm 1$. Тогда найдется натуральное k такое, что $A_k(a) = \{1\}$.*

Решение.

Лемма 5 (LTE-лемма). *Для простого $p \geq 3$ и числа $a \equiv 1 \pmod p$ справедливо $\nu_p\left(a^n - 1\right) = \nu_p(a-1) + \nu_p(n)$, где $\nu_p(x)$ обозначает наибольшее число t такое, что x делится на p^t.*[8,9]

Доказательство. Предположим, что лемма верна для некоторого показателя n, тогда согласно лемме 3 она верна и для показателя np, а согласно лемме 1 – и для показателя nt, где t не делится на p. Очевидно, лемма верна при $n = 1$, поэтому указанными переходами $n \to np$, $n \to nt$ докажем ее для произвольного показателя.

Сформулируем также вариант LTE-леммы для $p = 2$.[10]

Лемма 6. *Для $a \equiv 1 \pmod 4$ справедливо $\nu_2\left(a^n - 1\right) = \nu_2(a-1) + \nu_2(n)$.*

Доказательство. Строим доказательство так же, как и в лемме 5. Предположим, что лемма верна для некоторого показателя n. Из условия следует, что $\nu_2\left(a^n + 1\right) = 1$, поэтому лемма верна и для показателя $2n$, а согласно лемме 1 – и для показателя nt, где t нечетно.

Упражнение 8 (LTE-лемма). а) Для простого $p \geq 3$ и чисел a и b, не делящихся на p и таких, что $a \equiv b \pmod p$, справедливо $\nu_p\left(a^n - b^n\right) = \nu_p(a-b) + \nu_p(n)$.

б) Для нечетных a и b таких, что $a \equiv b \pmod 4$, справедливо $\nu_2\left(a^n - b^n\right) = \nu_2(a-b) + \nu_2(n)$.

Перейдем теперь к решению задачи 5. Для $a = 2$ имеем $A_1(2) = \{1\}$. Случай $a = 0$ очевиден. Пусть теперь $|a - 1| > 1$.

1) Рассмотрим случай четного a. Пусть α – наибольший из всех показателей, с которыми простые сомножители входят в разложение $a - 1$. Выберем $k \geq \alpha + 2$ и предположим, что $n \in A_k(a)$, $n > 1$. По задаче 1, n делится на p, где p – некоторый простой делитель $a - 1$. Пусть $\nu_p(n) = \beta$, $\beta \geq 1$. Так как $a - 1$ не делится на $p^{\alpha+1}$, то, согласно лемме 5, $a^n - 1$ не делится на $p^{\alpha+1+\beta}$. Но $a^n - 1$ должно делиться на n^k, следовательно, на $p^{k\beta}$. Отсюда $k\beta \leq \alpha + \beta$, следовательно, $\alpha \geq (k-1)\beta \geq k - 1$ и $k \leq \alpha + 1$ в противоречие с выбором k.

2) Пусть теперь a нечетно. Пусть α_1 – наибольший из всех показателей, с которыми нечетные простые сомножители входят в разложение $a - 1$. Положим $\nu_2\left(a^2 - 1\right) = \alpha_2$ (отметим, что $\alpha_2 \geq 3$ и α_2 конечно, так

---

8 Здесь полагаем $\nu_p(0) = \infty$.

9 Эту лемму или более общее утверждение упражнения 8 называют LTE-леммой (Lifting The Exponent – «подъем показателя») или леммой об уточнении показателя, а иногда – леммой Гензеля. Она является мощным средством для решения задач (см., например, решение задачи М2032 в «Кванте» №4 за 2007 г.). С ее помощью можно, например, следующим образом решить задачу М2212,а), явно указывая цепочки a-хороших чисел: если $a - 1$ не равно степени 2, то любая степень простого нечетного делителя числа $a - 1$ является a-хорошим числом; если же $a - 1 = 2^k$, то $a^4 - 1$ делится на $4p$ (p – некоторое нечетное простое число), и тогда числа вида $4p^m$ – a-хорошие.

10 Обратите внимание на отличие от случая нечетного p. Можно привести примеры, показывающие, что это отличие существенно.

как $a \neq \pm 1$). Пусть $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Выберем $k \geq \alpha + 2$ и предположим, что $n \in A_k(a)$, $n > 1$. По задаче 1, n делится на p, где p – некоторый простой делитель $a-1$. Если p нечетно, получаем противоречие так же, как и в случае 1). Предположим, что $p = 2$, $n = 2t$ и $\nu_2(t) = \beta$, $\beta \geq 0$. Тогда, согласно лемме 6, $a^n - 1 = \left(a^2\right)^t - 1$ не делится на $2^{\alpha+1+\beta}$. Но $a^n - 1$ должно делиться на $n^k = (2t)^k$, а следовательно, и на $2^{k+k\beta}$. Отсюда $k + k\beta \leq \alpha + \beta$, следовательно, $\alpha \geq k + (k-1)\beta \geq k$ и $k \leq \alpha$ в противоречие с выбором k.

Итак, в последней задаче показано, что при $a \neq \pm 1$ в последовательности множеств $A_1(a) \supset A_2(a) \supset \ldots$ на некотором шаге $A_k(a)$ становится равным $\{1\}$. Более точный ответ на вопрос о конечности или бесконечности множеств $A_k(a)$ при $a \neq \pm 1$ и $k \geq 3$ авторам не известен.[11] Идея продолжения цепочек чисел из $A_k(a)$ при $a \geq 3$ уже не работает: например, для бесконечно многих a имеется цепочка из двух чисел, принадлежащих $A_3(a)$ или $A_4(a)$, которую невозможно продолжить.

Упражнение 9. Докажите, что для каждого $k \geq 2$ найдется бесконечно много натуральных a таких, что $A_{k+1}(a) = \{1\}$, но $A_k(a)$ содержит некоторое $n > 1$.

Задача 6. $A_3(a) = \{1\}$ *тогда и только тогда, когда* $a-1$ *– нечетное свободное от квадратов число.*

Решение. Если $a-1$ четно, то $a^2 - 1$ делится на 8, значит, $2 \in A_3(a)$.

Пусть теперь $a-1$ нечетно, и $a-1$ делится на p^2, где p – некоторое нечетное простое. Тогда, по лемме 1, $a^p - 1 = (a-1)\left(a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1\right)$ делится на p^3, значит, $p \in A_3(a)$.

Пусть $a-1$ нечетно и свободно от квадратов. Предположим, что $n \in A_3(a)$, $n > 1$. Тогда, по задаче 1, $a-1$ делится на p (но не на p^2), где p – наименьший простой делитель n. Пусть $n = p^\beta x$, где x не делится на p, $\beta \geq 1$. Тогда, по лемме 5, $a^n - 1$ не делится на $p^{2+\beta}$. Но n^3 делится на $p^{3\beta}$. Отсюда $1 + \beta \geq 3\beta$ – противоречие.

[11] Есть основания предполагать, что $A_3(a)$ конечно для любого $a \neq \pm 1$ (ср. с задачей М2212).

Упражнения

10. Докажите, что а) $A_3(3) = \{1, 2\}$; б) $A_3(5) = \{1, 2\}$.

11. Докажите, что для каждого p найдется $a > 1$ такое, что для бесконечного множества натуральных n $\text{НОД}\left(a^n - 1, n^3\right) \geq pn^2$.

Делимость $a^n + 1$ на степени n

Определим множество $A_k^+(a)$ как множество натуральных n таких, что $a^n + 1$ делится на n^k. В заключение мы предлагаем в виде упражнений ряд утверждений о множествах $A_k^+(a)$. Большинство этих упражнений решается с помощью идей, изложенных выше. Это происходит хотя бы потому, что нечетные числа множества $A_k^+(a)$ – это в точности нечетные числа множества $A_k(-a)$.

Упражнения

12. Для любого $a > 1$ множество $A_1^+(a)$ бесконечно, причем если $a \neq 2^k - 1$, то $A_1^+(a)$ содержит бесконечно много нечетных чисел.

13. Если $a = 2^k - 1$, то все числа $n > 1$ из множества $A_1^+(a)$ – четные.

14. а) Докажите, что при $a = 2^k - 1$ справедливо $A_2^+(a) = \{1\}$, и обратно, если $a \neq 2^k - 1$, то $A_2^+(a)$ содержит некоторое $n > 1$.

б) Если $a = 2^k - 1$, где $k > 1$, то найдется $n > 1$, для которого $a^{2n} + 1$ делится на $2n^2$.

15. а) Если $a \geq 3$, $a \neq 2^k - 1$, то $A_2^+(a)$ бесконечно.

б) Если $a = 2^k - 1$, где $k > 1$, то существует бесконечно много n, для которых $a^{2n} + 1$ делится на $2n^2$.

16. Пусть $a \geq 3$. Тогда а) $A_1^+(a)$ содержит бесконечно много свободных от квадратов чисел;

б) при $a \neq 2^k - 1$ множество $A_2^+(a)$ содержит бесконечно много свободных от квадратов чисел.

17. Пусть $n \in A_1^+(2)$ и $n > 3$. Докажите, что n делится на 9.

18 (Международная математическая олимпиада, 1990 г.). Докажите, что $A_2^+(2) = \{1, 3\}$.

19. а) Пусть натуральные $a > 3$ и b таковы, что $2^a + 1$ делится на b, а $2^b + 1$ делится на a. Докажите, что ab делится на 27.

б) Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел (a, b) таких, что $2^a + 1$ делится на b, $2^b + 1$ делится на a, но ab не делится на 81.

НАМ ПИШУТ

Еще раз об описанных четырехугольниках

Приведем короткое решение следующей популярной задачи.[1]

Задача 1. *а) В треугольнике ABC на стороне BC взяты точки D и E. Докажите, что если окружности, вписанные в треугольники ABD и ACE, равны, то и окружности, вписанные в треугольники ABE и ACD, также равны (рис.1).*

б) В треугольнике ABC на стороне BC взяты точки D и E. Пусть K – точка пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABD и ACE. Докажите, что K также является точкой пересечения общих внешних касательных к окружностям, вписанным в треугольники ABE и ACD (рис.2).

[1] Это решение было опубликовано в 1989 году в журнале Mathematics Magazine (см. статью: H.Demir, C.Tezer. «More on incircles»).