А.Я.Казаков

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В ПЛОСКОМ СЛОЕ РАССЕИВАЮЩЕЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ ИЗЛУЧЕНИЕ СРЕДЫ

I. Основным средством исследования сред, рассеивающих и поглощающих излучение, служит изучение углового распределения и спектрального состава выходящего из них излучения. В связи с этим важно знать: какие физические характеристики среды и каким образом можно определить по угловому распределению выходящего излучения?

Для простоты будем считать, что при рассеянии излучения нет перераспределения по частоте. В этом случае перенос азимутально симметричного излучения в плоском слое рассеивающей и поглощающей излучение среды описывается уравнением:

$$\mu \frac{\partial I(\tau,\mu)}{\partial \tau} + I(\tau,\mu) = \frac{\lambda(\tau)}{2} \int_{-1}^{1} s(\tau,\mu,\mu') I(\tau,\mu') d\mu' + q(\tau), \qquad (I)$$

где $I(\tau,\mu)$ – интенсивность излучения на оптической глубине τ в направлении θ $(\mu = \cos\theta)$, $\lambda(\tau)$ – альбедо однократного рассеяния, $q(\tau)$ – мощность источников излучения, расположенных в среде, $s(\tau,\mu,\mu')$ – индикатриса рассеяния, $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$.

Это уравнение играет фундаментальную роль в теории звездных и планетных атмосфер, теории диффузии нейтронов и т.д. – см. [I], [2]. В большинстве физически интересных задач индикатриса рассеяния имеет вид:

$$s(\tau,\mu,\mu') = \sum_{m=0}^{L} b_m(\tau) P_m(\mu) P_m(\mu'), \quad b_0(\tau) \equiv 1, \qquad (2)$$

$P_m(\mu)$ – полиномы Лежандра.

Сформулируем цель работы. Пусть известно угловое распределение входящего в среду излучения, $I(0,\mu) = c(\mu)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, и угловое распределение выходящего из среды излучения, $I(0,-\mu) \doteq a(\mu)$, $0 < \mu \leqslant 1$ (мы рассматриваем полубесконечную среду, $T = \infty$). Выясним, что и как можно извлечь из этой информации о функциях $b_m(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $q(\tau)$? Что надо знать об этих функциях, чтобы найти поле излучения $I(\tau,\mu)$ и как это сделать?

Ниже излагается формализм, позволяющий дать ответ на эти вопросы. Более полное исследование решений поставленных задач будет приведено в другом месте. Наш метод вкратце заключается в следующем. Используя специфику уравнения (I) и выделяя физически интересные решения, мы строим специальное представление для решения уравнения (I) (см. формулы (6)). Уравнение (I) и граничные условия сводятся к интегральному уравнению и системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (см. (7), (8)). Решение задач можно получить, анализируя эту совокупность уравнений. Здесь мы будем считать, $L < \infty$. Методы, изложенные ниже, можно применять и при исследовании среды конечной оптической толщины, при переносе излучения без азимутальной симметрии, а также при $L = \infty$.

2. Будем пока считать, что функции $\lambda(\tau)$, $q(\tau)$, $b_m(\tau)$, $1 \leqslant m \leqslant L$, $I(\tau,\mu)$ нам неизвестны и получим из уравнения (I) и граничных условий соотношения, которым они удовлетворяют.

Физически приемлимо считать, что решение уравнения (I) удовлетворяет следующему ограничению:

Условие I.

$$I(\tau,\mu) = \int_{-1}^{\infty} \exp(-y\tau) W(y,\mu)\, dy, \tag{3}$$

где $W(y,\mu)$ – некоторая обобщенная функция (точное описание свойств $I(\tau,\mu)$ и $W(y,\mu)$, которые следуют из (3), см. в [3]).

Можно показать, что обратные задачи линейной теории переноса в их естественной постановке могут иметь больше чем одно формальное решение. Смысл условия I в том, что оно выделяет физически интересные решения.

Подставляя (3) в (I), находим:

$$\int_{-1}^{\infty}(1-y\mu)W(y,\mu)\exp(-y\tau)\,dy = \frac{\lambda(\tau)}{2}\sum_{m=0}^{L} b_m(\tau)P_m(\mu)\int_{-1}^{1} I(\tau,\mu)P_m(\mu)\,d\mu + q(\tau) \tag{4}$$

Дифференцируя (4) $(L+1)$ раз по μ, можно доказать, что существуют такие функции $d_k(y)$, что

$$(1-y\mu)W(y,\mu) = \sum_{k=0}^{L} d_k(y)\mu^k$$

Это соотношение мы перепишем в виде:

$$(1-y\mu)W(y,\mu) = p(y) + (1-y\mu)\sum_{k=0}^{L-1} r_k(y)P_k(\mu) \tag{5}$$

Из (5) следует:

$$W(y,\mu)=\frac{P(y)}{1-y\mu}+\sum_{k=0}^{L-1}r_k(y)P_k(\mu)+q(y)\,\delta(1-y\mu)$$

$$I(\tau,\mu)=\int_{-1}^{\infty}\frac{P(y)\exp(-y\tau)}{1-y\mu}dy+\sum_{k=0}^{L-1}R_k(\tau)P_k(\mu)+\frac{1}{\mu}q\left(\frac{1}{\mu}\right)\theta(\mu)\exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right),$$

где $\theta(\mu)$ - функция Хевисайда, $\delta(x)$ - функция Дирака,

$$R_k(\tau)=\int_{-1}^{\infty}r_k(y)\exp(-y\tau)dy.$$

Обозначим

$$B(\tau)=\int_{-1}^{\infty}P(y)\exp(-y\tau)dy.$$

Тогда, используя граничное условие $I(0,\mu)=C(\mu)$, находим:

$$I(\tau,\mu)=\sum_{k=0}^{L-1}R_k(\tau)P_k(\mu)+\int_0^{\tau}B(v)\exp\left(-\frac{\tau-v}{\mu}\right)\frac{dv}{\mu}+\exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\left[C(\mu)-\sum_{k=0}^{L-1}R_k(0)P_k(\mu)\right],\ 0<\mu\leq 1,$$

(6)

$$I(\tau,\mu)=\sum_{k=0}^{L-1}R_k(\tau)P_k(\mu)-\int_{\tau}^{\infty}B(v)\exp\left(-\frac{\tau-v}{\mu}\right)\frac{dv}{\mu},\ -1\leq\mu<0.$$

Из предшествующих выкладок следует, что функция $I(\tau,\mu)$ связана однозначным соответствием с набором функций $B(\tau)$, $R_k(\tau)$, $0\leq k\leq L-1$. Из второго граничного условия получаем:

$$\sum_{k=0}^{L-1}R_k(0)P_k(\mu)-\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{v}{\mu}\right)B(v)\frac{dv}{\mu}=a(-\mu),\ -1\leq\mu<0. \quad (7)$$

Подставляя (6) в уравнение (I) и выписывая отдельные гармоники уравнения (I), приходим к системе уравнений:

$$\delta_{k,0}(B(\tau)-q(\tau))+R_k(\tau)+\frac{k+1}{2k+1}R'_{k+1}(\tau)+\frac{k}{2k+1}R'_{k-1}(\tau)=\frac{\lambda(\tau)b_k(\tau)}{2}\Big\{R_k(\tau)+$$

$$+\int_0^{\infty}B(v)h_k(\tau,v)dv+\frac{2k+1}{2}\int_0^1\exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\left[C(\mu)-\sum_{s=0}^{L-1}R_s(0)P_s(\mu)\right]P_k(\mu)d\mu\Big\}, \quad (8)$$

$$k=0,1,\ldots L,$$

где

$$h_k(\tau,v)=\frac{2k+1}{2}\int_0^{\operatorname{sgn}(\tau-v)}\exp\left(-\frac{\tau-v}{\mu}\right)P_k(\mu)\frac{d\mu}{\mu},\quad R_{-1}(\tau)=R_L(\tau)=0.$$

3. Для $(2k+3)$ функций $B(\tau), R_k(\tau)$, $0\leq k\leq L-1$, $\lambda(\tau)$, $q(\tau)$, $b_m(\tau)$, $1\leq m\leq L$ у нас есть $(L+2)$ уравнения - система уравнений (8) и уравнение (7). Как нетрудно убедиться, в них заключена вся информация нашей задачи - и гра-

ничные условия и уравнение (I). Возможны следующие имеющие физический смысл ситуации, когда число уравнений равно числу неизвестных.

А. Известна индикатриса рассеяния, т.е. функции $b_m(\tau)$, $1 \leq m \leq L$, и либо функция $\lambda(\tau)$, либо функция $q(\tau)$. Можно попытаться определить из системы (7)-(8) $I(\tau,\mu)$ и ту из функций $\lambda(\tau)$, $q(\tau)$, которая неизвестна.

В. Известны $\lambda(\tau)$, $q(\tau)$ и $b_m(\tau)$ при $1 \leq m < L$, $m \neq \ell$. Можно искать $I(\tau,\mu)$ и $b_\ell(\tau)$.

С. Известны $\lambda(\tau)$, $q(\tau)$ и то, что все функции $b_m(\tau)$ не зависят от τ. Можно искать $I(\tau,\mu)$ и индикатрису рассеяния, т.е. набор констант b_m.

Д. Имеется набор граничных данных, $a_s(\mu)$, $c_s(\mu)$, $1 \leq s \leq L+2$. Можно искать $\lambda(\tau)$, $q(\tau)$, $b_m(\tau)$, $1 \leq m \leq L$, и отвечающие этим граничным данным $I_s(\tau,\mu)$.

4. Рассмотрим возможность А. Для ее анализа существенна

ТЕОРЕМА. Решение, удовлетворяющее условию I, поставленной в А обратной задачи, если оно существует, единственно.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть известно решение этой обратной задачи, функции $I_1(\tau,\mu)$, $\lambda_1(\tau)$ (для определенности считаем, что известна $q(\tau)$). Мы докажем, что если есть еще одно решение, то $I_2(\tau,\mu)=I_1(\tau,\mu)$, $\lambda_2(\tau)=\lambda_1(\tau)$.

Индексами 1, 2 будем отмечать функции, относящиеся к соответствующим решениям. Из (7) получаем:

$$B_2(\tau)=B_1(\tau)+\sum_{r=0}^{L-1}\varkappa_r\tau^r,$$
$$R_{2k}(0)=R_{1k}(0)-\frac{2k+1}{2}\sum_{r=0}^{L-1}\varkappa_r(-1)^r r!\int_{-1}^{1}P_k(\mu)\mu^r d\mu. \tag{9}$$

С одной стороны, если заданы $R_k(0)$, $B(\tau)$, то $\lambda(\tau)$, $R_k(\tau)$ из системы (8) находятся (как мы увидим в дальнейшем) единственным образом, по крайней мере, при $0 \leq \tau \leq \delta$ для некоторого $\delta > 0$. С другой стороны, прямой подстановкой в систему (8) можно проверить, что набор функций $\lambda_1(\tau)$,

$$R_{2k}(\tau)=R_{1k}(\tau)-\frac{2k+1}{2}\sum_{r=0}^{L-1}\varkappa_r\sum_{s=0}^{r}C_s^r(-1)^s\tau^{r-s}s!\int_{-1}^{1}P_k(\mu)\mu^s d\mu \tag{10}$$

удовлетворяет системе (8) с функцией $B_2(\tau)$ и начальным данным (9). Таким образом, функции $\lambda_1(\tau)$, $R_{2k}(\tau)$, описанные формулами (10), есть единственное решение системы уравнений (8) с начальными данными (9) и функцией $B_2(\tau)$. Но $I_2(\tau,\mu)$, построенная по $B_2(\tau)$, $R_{2k}(\tau)$ с помощью (6), совпадает с

$I_1(\tau,\mu)$, построенной по $B_1(\tau)$, $R_{1k}(\tau)$. Теорема доказана.

Из теоремы следует, что решение задачи не зависит от выбора начальных данных $R_k(0)$. Мы возьмем $R_k(0)=0$, $k=0,\ldots$ $\ldots(L-1)$. Из уравнения (7), единственным образом для любого выбора $R_k(0)$, определяется $B(\tau)$. Следуя [4], находим:

$$B(\tau)=\frac{e^{\tau}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\tau^{s-1}}{\Gamma(s)}ds\int\limits_{0}^{\infty}\frac{v^{s-1}}{v+1}a\left(\frac{1}{v+1}\right)dv,\quad 0<c<1. \tag{II}$$

Если нам известна функция $\lambda(\tau)$, то уравнения с номерами $k=1,\ldots$ $\ldots L$ системы (8) представляют собой систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $R_k(\tau)$. Нетрудно убедиться, что специфический вид этой системы позволяет проинтегрировать ее в квадратурах и по начальным данным $R_k(0)$ единственным образом найти $R_k(\tau)$. Уравнение с номером $k=0$ системы (8) превращается в тривиальное уравнение для $g(\tau)$. Если мы ищем $\lambda(\tau)$ и $I(\tau,\mu)$, исключение $\lambda(\tau)$ из системы (8) приводит ее к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для функций $R_k(\tau)$. Решая ее с нашими начальными данными, находим функции $\lambda(\tau)$ и $I(\tau,\mu)$ единственным образом, по крайней мере, при $0\leqslant\tau\leqslant\delta$ для некоторого $\delta>0$.

Анализ ситуации В по аналогичной схеме приводит к подобным результатам: задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка размерности L с выбранными начальными данными, например, $R_k(0)=0$. Решение существует и единственно в смысле условия I.

5. Исследуем ситуацию С. Положим $R_k(0)=0$. Определив $B(\tau)$ из (II), из уравнений с номерами $k=1,\ldots L$ системы (8) находим функции $R_k(\tau,b_1,b_2,\ldots b_L)$. Подставляя их в уравнение с номером $k=0$ системы (8), получаем уравнение вида:

$$F(\tau,b_1,b_2,\ldots b_L)=0 \tag{I2}$$

Из теоремы единственности, доказательство которой аналогично приведенному в п.4, следует, что уравнение (I2) не зависит от начальных данных $R_k(0)$. Взяв достаточное число точек τ_n, можно определить набор констант b_m, $1\leqslant m\leqslant L$, причем решение не обязательно единственно, единственна для конкретной задачи совокупность решений уравнения (I2).

ПРИМЕР. $a(\mu)=c(\mu)=A$.

Из формулы (II) следует: $B(\tau)=A$.

Нетрудно получит тождество:

$$\int_0^\infty h_K(\tau,\upsilon)d\upsilon+\int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)P_K(\mu)d\mu=0, \quad K=1,2,\dots L.$$

Выбрав $R_K(0)=0$, получим, что уравнения системы (8) с номерами $K=1,2,\dots L$ принимают вид:

$$R_K(\tau)+\frac{K+1}{2K+1}R'_{K+1}(\tau)+\frac{K}{2K+1}R'_{K-1}(\tau)=\frac{\lambda(\tau)b_K}{2}R_K(\tau),\ 1\leqslant K\leqslant L.$$

Из этой системы находим:

$$R_K(\tau)=0,\ \ 0\leqslant K\leqslant L-1.$$

Из уравнения с номером $K=0$ системы (8) следует:

$$g(\tau)=A(1-\lambda(\tau)). \tag{13}$$

Это – уравнение (12) в нашем случае. Следовательно, любой набор чисел $b_1, b_2, \dots b_m$ есть решение нашей задачи в том случае, когда верно (13). Если (13) не выполняется, решений нет.

Следует отметить, что и в общем случае уравнение (12) определяет некоторую зависимость между граничными данными, $g(\tau)$ и $\lambda(\tau)$.

6. Рассмотрим ситуацию Д. Доказательство теоремы единственности совпадает, по существу, с доказательством в ситуации А. Решение задачи сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка размерности $L(L+2)$. Здесь мы выведем достаточное условие разрешимости задачи, поставленной в Д. Рассуждать будем на формальном уровне строгости.

Обозначим $d_K(\tau)=\frac{1}{2}\lambda(\tau)b_K(\tau)$, $1\leqslant K\leqslant L$. Мы выясним, когда по данным $a_S(\mu)$, $c_S(\mu)$, $1\leqslant S\leqslant L+2$, можно определить $g(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $d_K(\tau)$, $1\leqslant K\leqslant L$. Индексом S, $1\leqslant S\leqslant L+2$, будем отмечать функции, относящиеся к граничным данным с номером S. Полагая $R_{SK}(0)=0$ при $1\leqslant K\leqslant L+1$, $0\leqslant K\leqslant L-1$, из (7) находим $B_S(\tau)$, подставляя в правую часть $a_S(\mu)$, $1\leqslant S\leqslant L+2$. Уравнения с номерами $K=1,2,\dots L$ системы (8) для каждого S можно преобразовать к виду:

$$\vec{R}'_S(\tau)=(E\mathcal{D}(\tau)-E)I\vec{R}_S(\tau)+E\mathcal{D}(\tau)\vec{G}_S(\tau) \tag{14}$$
$$1\leqslant S\leqslant L+2.$$

Здесь

$$[\vec{R}_s(\tau)]_\kappa = R_{s,\kappa-1}(\tau),$$

$$[\vec{G}_s(\tau)]_\kappa = \int_0^\infty B_s(\vartheta) h_\kappa(\tau,\vartheta) d\vartheta + \frac{2\kappa+1}{2}\int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) c_s(\mu) P_\kappa(\mu) d\mu, \; 1 \le \kappa \le L.$$

Ненулевые элементы матриц I , E , $\mathcal{D}(\tau)$ определяются со- отношениями:

$$[I]_{\ell,\ell+1} = 1$$

$$[E]_{\ell,\ell+2m} = (-1)^m \frac{4m+2\ell+1}{\ell} \prod_{z=0}^{m-1}(2z+\ell+1)\left[\prod_{z=0}^{m-1}(2z+\ell+2)\right]^{-1},$$

$$[\mathcal{D}(\tau)]_{\ell,\ell} = d_\ell(\tau),$$

$$\ell = 1,2,\dots L, \quad m = 0,1,\dots \left[\frac{L-\ell}{2}\right].$$

Выпишем уравнения с номером $\kappa = 0$ системы (8):

$$R_{s0}(\tau) + R'_{s1}(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{2}\left[R_{s0}(\tau) + f_s(\tau)\right] + g(\tau) - B_s(\tau), \qquad (16)$$

$$f_s(\tau) = \int_0^\infty B_s(\vartheta) h_0(\tau,\vartheta) d\vartheta + \frac{1}{2}\int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) c_s(\mu) d\mu.$$

Представим все функции формальными степенными рядами по τ :

$$h(\tau) = \sum_{\kappa=0}^\infty \frac{h^{(\kappa)}(0)}{\kappa!}\tau^\kappa.$$

Подставляя эти разложения в уравнение (16), получим рекуррентную систему уравнений. Так, коэффициент при нулевой степени τ в (16) дает уравнения:

$$R'_{s1}(0) = \frac{\lambda(0)}{2} f_s(0) + g(0) - B_s(0), \quad 1 \le s \le L+2.$$

$R'_{s1}(0)$ находим из системы (14), учитывая (15):

$$R'_{s1}(0) = \sum_{\kappa=1}^{[\frac{L}{2}]} [\vec{G}_s(0)]_{2\kappa} [E]_{2,2\kappa} d_{2\kappa}(0).$$

Рассматривая аналогичным образом коэффициенты при следующих степенях τ в системе (16), мы получим уравнения:

$$\sum_{\kappa=1}^{[\frac{L}{2}]} [\vec{G}_s(0)]_{2\kappa} [E]_{2,2\kappa} d_{2\kappa}(0) - \frac{1}{2}\lambda(0) f_s(0) - g(0) = B_s(0), \qquad (17)$$

$$\left[1-\frac{\lambda(0)}{2}\right]\sum_{K=1}^{\left[\frac{L+2}{2}\right]}\left[\vec{G}_s(0)\right]_{2K-1}[E]_{1,2K-1}\frac{d_{2K-1}^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+\sum_{K=1}^{\left[\frac{L}{2}\right]}\left[\vec{G}_s(0)\right]_{2K}[E]_{2,2K}\frac{d_{2K}^{(m)}(0)}{m!}-$$

$$-f_s(0)\frac{\lambda^{(m)}(0)}{2m!}-\frac{g^{(m)}(0)}{m!}=U\left(d_{2K-1}^{(\ell)}(0),d_{2K}^{(n)}(0),B_s^{(n)}(0),f_s^{(n)}(0),\left[\vec{G}_s^{(n)}(0)\right]_K\right),\quad (18)$$

$$1\le s\le L+2,\ 1\le m<\infty,\ 0\le \ell\le m-1,\ 0\le n\le m,\ 1\le K\le L$$

В физике $0\le\lambda(\tau)\le 1$. Системы уравнений (17), (18) при всех m – линейные системы уравнений для $d_{2K-1}^{(m-1)}(0)$, $d_{2K}^{(m)}(0)$, $\lambda^{(m)}(0)$, $g^{(m)}(0)$, последовательно решая которые мы определяем искомые функции $\lambda(\tau)$, $g(\tau)$, $d_K(\tau)$. Для однозначной разрешимости систем (17)–(18) при любом m достаточно, чтобы были линейно независимы $(L+2)$ -мерные вектора $\vec{F}_s$, $1\le s\le L+2$:

$$\left[\vec{F}_s\right]_n=\left[\vec{G}_s(0)\right]_n,\ 1\le n\le L,$$

$$\left[\vec{F}_s\right]_{L+1}=f_s(0),$$

$$\left[\vec{F}_s\right]_{L+2}=1,\qquad 1\le s\le L+2.$$

Возвращаясь к определению функций $\left[G_s(\tau)\right]_n$, $f_s(\tau)$, получаем следующий результат:

Для однозначной разрешимости задачи, сформулированной в п.Д, достаточно, чтобы $(L+2)$ -мерные вектора $\vec{P}_s$,

$$\left[\vec{P}_s\right]_K=\int_{-1}^{1}\left[1+P_1(\mu)I_s(0,\mu)\right]P_{K-1}(\mu)d\mu,\quad 1\le s,K\le L+2,$$

были линейно независимы.

7. Обсудим вопрос о корректности наших задач на примере простейшей из них: известны $a(\mu)$, $c(\mu)$, $0<\mu\le 1$, $\lambda(\tau)$, индикатриса рассеяния; определить $g(\tau)$ и $I(\tau,\mu)$ (частный случай ситуации А).

На практике $a(\mu)$ измеряют в нескольких точках $\mu_i\in(0,1]$, $1\le i\le n$, и по этим данным строят некоторое приближение – функцию $a_n(\mu)$. Мы будем считать, что

$$a_n(\mu_K)=a_K(\mu_K)\ \text{при}\ n>K.$$

С помощью приведенного выше формализма можно найти $g_n(\tau)$, отвечающие $a_n(\mu)$. Назовем задачу корректной, если при $n\to\infty$

$g_n(\tau)$ сходятся в подходящем смысле к $g_0(\tau)$, причем $g_0(\tau)$ есть решение задачи с граничным условием $a_0(\mu)$,

$$a_0(\mu_K)=a_K(\mu_K),\quad K=1,2,3,\ldots$$

Фиксируем константы $M>0$ и $\varepsilon>0$ и опишем связанный с ними класс функций M_ε. Обозначим через Q_ε симметричный относительно оси OX открытый круг в комплексной плоскости с диаметром – отрезком $[0,1+\varepsilon]$. Функция $a(\mu)$ принадлежит M_ε, если $a(\mu)$ регулярна в Q_ε и

$$|a(\mu)|\leqslant M \quad \text{при} \quad \mu\in\overline{Q}_\varepsilon. \tag{19}$$

Предположим, что все приближения измеряемой функции $a_n(\mu)$ принадлежат классу M_ε для некоторых M, ε, и существует последовательность точек $\mu_K\in[\delta,1]$, $\delta>0$, для которых $a_n(\mu_K)=a_K(\mu_K)$ при $n>K$. Тогда, по теореме Витали (см. [5]), последовательность $a_n(\mu)$ сходится равномерно во всякой области, внутренней к Q_ε, к функции $a_0(\mu)$, регулярной и ограниченной в любой подобласти Q_ε. Сделаем замену: $\mu=(\vartheta+1)^{-1}$. Круг Q_ε перейдет в полуплоскость $P_\varepsilon:\operatorname{Re}\vartheta>-\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}$. Функции $B_n(\tau)$ определяются равенствами (ср. (7)):

$$\mu a_n(\mu)=\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)B_n(\tau)d\tau,\qquad 0<\mu\leqslant 1,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Введем функции $K_n(\vartheta)$:

$$K_n(\vartheta)=\frac{1}{\vartheta+1}a_n\left(\frac{1}{\vartheta+1}\right)=\int_0^\infty \exp(-\tau\vartheta)e^{-\tau}B_n(\tau)d\tau,\ 0\leqslant\vartheta<\infty,\ n\geqslant 0.$$

Функции $K_n(\vartheta)$ регулярны в P_ε и

$$\int_0^\infty\left|K_n\left(\tau e^{i\theta}-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right)\right|^2 d\tau\leqslant 2M(1+\varepsilon_1)\quad \text{при}\ \ |\theta|<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon,\ n\geqslant 0.$$

Из оценки (19) следует:

$$\left\|K_n\left(i\tau-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right)\right\|_{L_2(-\infty,-N)}+\left\|K_n\left(i\tau-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right)\right\|_{L_2(N,\infty)}\leqslant\frac{2M}{N+\frac{1}{1+\varepsilon_1}} \tag{20}$$

при $\forall N$, $0\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon$, $n\geqslant 0$.

Из полученной выше сходимости $a_n(\mu)$ к $a_0(\mu)$:

$$K_n\left(i\tau-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{L_2(-N,N)}K_0\left(i\tau-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right)\quad \text{при}\quad \forall N,\ 0\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon.$$

Приведем один результат книги [4]. Рассматривается уравнение

$$g(x)=\int_0^\infty f(y)\exp(-yx)\,dy, \quad 0\le x<\infty. \qquad (21)$$

Его решение описывается формулой

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty}\frac{G(1-s)}{\Gamma(1-s)}\,x^{-s}\,dx \qquad (22)$$

где

$$G(s)=\int_0^\infty g(x)\,x^{s-1}\,dx.$$

Для того, чтобы (22) существовало в смысле сходимости в среднем квадратичном и определяло решение уравнения (21), принадлежащее $L_2(0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $g(x)$ имела значения, принимаемые на вещественной оси аналитической функцией $g(z)$, регулярной для $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$ и такой, что

$$\int_0^\infty |g(re^{i\theta})|^2 dr < A \text{ при } |\theta|<\frac{\pi}{2}.$$

Используя это утверждение, получаем:

$$\exp\left(-\frac{\tau}{1+\varepsilon_1}\right)B_n(\tau)\in L_2(0,\infty),$$

$$\left\|\exp\left(-\frac{\tau}{1+\varepsilon_1}\right)B_n(\tau)\right\|_{L_2(0,\infty)}=\left\|K_n\left(ir-\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}\right)\right\|_{L_2(-\infty,\infty)}, \quad n\ge 0,$$

$$\exp\left(-\frac{\tau}{1+\varepsilon_1}\right)B_n(\tau)\xrightarrow[n\to\infty]{L_2(0,\infty)}\exp\left(-\frac{\tau}{1+\varepsilon_1}\right)B_0(\tau) \qquad 0\le\varepsilon_1<\varepsilon.$$

Как следует из (8), решения $g_n(\tau)$, построенные по $a_n(\mu)$, сходятся к $g_0(\tau)$, построенной по $a_0(\mu)$, в пространстве $C(0,T)$ для любого $T>0$. Аналогичный результат справедлив и для $I_n(\tau,\mu)$. Таким образом, задача корректна в описанном выше смысле, если ее ставить в класс функций M_ε .

Подобным образом можно исследовать и корректность по Тихонову нашей задачи.

8. Подведем итоги. Если падающее на среду излучение раз и навсегда задано (физическая ситуация – звезда, удаленная от других звезд), и известно падающее на среду и выходящее из среды излучение, то существует принципиальная возможность (и выше изложены методы, реализующие ее) решить следующие задачи, причем решения единственны в указанном ранее смысле:

а. зная индикатрису рассеяния и одну из функций $\lambda(\tau), g(\tau)$, найти $I(\tau,\mu)$ и вторую из функций $\lambda(\tau)$, $g(\tau)$.

б. зная $\lambda(\tau)$, $g(\tau)$ и все функции $b_m(\tau)$, $1\le m\le L$,

$m \neq l \geq 1$, найти $b_l(\tau)$ и $I(\tau,\mu)$.

в. зная $\lambda(\tau)$, $g(\tau)$ и тот факт, что индикатриса рассеяния не зависит от τ, найти $I(\tau,\mu)$ и индикатрису рассеяния.

Если на среду падает излучение, меняющееся достаточно медленно, чтобы перенос можно было считать стационарным (физическая ситуация - рассеяние излучения в атмосферах планет), то можно определить $\lambda(\tau)$, $g(\tau)$ и индикатрису рассеяния, $b_m(\tau)$, $1 \leq m \leq L$.

Если известно меньше информации, чем в описанных здесь вариантах, задачи, в общем случае, неразрешимы.

Автор благодарен И.Н.Миниму за ценные дискуссии.

Литература

1. Соболев В.В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., 1972.
2. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., 1972.
3. Земанян А.Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1974.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л., 1951.
5. Титчмарш Е. Теория функций. М., 1980.

Kazakov A.Ya. The inverse problems of the linear transport theory for the case of a flat layer of a medium scattering and absorbing radiation.

The paper is devoted to the precise solution of inverse problems of the theory of radiation transfer for the case of a flat layer of a medium scattering and absorbing radiation.