Л. Б. Рапопорт, Граница абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем и ее связь с построением инвариантных функций,
Автомат. и телемех., 1990, выпуск 10, 78–86

УДК 62-501.52:517.97

Л. Б. РАПОПОРТ, канд. физ.-мат. наук

(ВНИИ электротермического оборудования, Москва)

ГРАНИЦА АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И ЕЕ СВЯЗЬ С ПОСТРОЕНИЕМ ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Для задачи абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления установлено существование инвариантных функций при критическом значении параметра. Предложен конструктивный метод анализа абсолютной устойчивости таких систем, основанный на численном поиске инвариантных функций.

1. Введение

В работе расматривается задача абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления при секторных ограничениях на характеристики нелинейных элементов. Известно [1], что эта задача сводится к задаче абсолютной устойчивости линейных нестационарных систем. Абсолютная устойчивость и абсолютная неустойчивость таких систем исследована в работах [1—6]. В работах [4, 6] получены необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости в терминах функции Ляпунова. Данная работа посвящена исследованию управляемых систем на границе абсолютной устойчивости при критическом значении параметра, ограничивающего величину управления. Под критическим значением понимается точная верхняя грань тех значений параметра, при которых рассматриваемая система абсолютно устойчива. В работе доказывается, что при критическом значении параметра существует выпуклая положительная инвариантная функция, сохраняющая свое значение на экстремальных траекториях системы. Основной результат получен вариационным методом, развитым для исследования абсолютной устойчивости и абсолютной неустойчивости систем управления в работах [1—5].

Отметим также работу [7], в которой для дискретных систем доказывается существование функций, играющих роль норм. Настоящая работа идейно близка к [7], но использует вариационный подход к построению инвариантных функций.

Для проверки существования инвариантных функций предложен конструктивный метод, являющийся одновременно критерием абсолютной устойчивости.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача абсолютной устойчивости системы управления, динамика которых описывается системой дифференциальных уравнений [1]

(1) $$\dot{x}=Ax+b\varphi(t,\sigma),$$

где x, $b\in R^n$; A — постоянная вещественная $n\times n$ матрица, $\sigma=c'x$, $c\in R^n$. Нелинейная функция $\varphi(t,\sigma)$ удовлетворяет условиям существования

[1] Символ $'$ означает транспонирование. Векторы считаются столбцами.

абсолютно непрерывного решения системы (1), секторным ограничениям

$$0\leqslant\varphi(t,\,\sigma)\leqslant k\sigma^2,$$

где $0<k<+\infty$, и условию $\varphi(t,\,0)\equiv 0$. Совокупность нелинейных функций, удовлетворяющих указанным условиям, обозначим через N.

Абсолютная устойчивость понимается в смысле [1], т. е. как равномерная по классу N асимптотическая устойчивость в целом нулевого решения $x(t)\equiv 0$ системы (1). В работе [1] доказано, что для равномерной абсолютной устойчивости системы (1) в классе N необходимо и достаточно равномерной абсолютной устойчивости системы

$$\dot{x}=(A+u(t)bc')x \tag{2}$$

в классе $U(k)$ всевозможных функций $u(t)$, измеримых на любом отрезке $[0,\,T]$ и удовлетворяющих ограничениям

$$0\leqslant u(t)\leqslant k,\quad t\geqslant 0. \tag{3}$$

В работе [2] показано, что равномерная асимптотическая устойчивость является экспоненциальной.

Определим критическое значение параметра k. Значение $k=k^*$, равное точной верхней грани тех k, для которых система (2) равномерно абсолютно устойчива в классе $U(k)$, будем называть критическим. Если система (2) равномерно абсолютно устойчива в классе $U(k)$ для любого значения $k>0$, то будем считать $k^*=+\infty$.

Цель работы состоит в доказательстве существования и обосновании метода построения функций, сохраняющих постоянное значение на экстремальных траекториях системы (2) при $k=k^*<+\infty$.

3. Основной результат

Обозначим $x_u(t,\,x_0)$ решение системы (2) при начальном условии $x_u(0,\,x_0)=x_0$ и управлении $u(t)$ и

$$Z(x,\,k)=\{z\,|\,z=(A+\lambda bc')x,\ 0\leqslant\lambda\leqslant k\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть пара $\{A,\,b\}$ управляема и $k=k^*$. Тогда существует такая выпуклая положительная функция $v(x)$, что для любого $x\in R^n\setminus\{0\}$ выполняется равенство

$$\max_{z\in Z(x,k)}\frac{\partial v}{\partial z}=0, \tag{4}$$

где через $\partial v/\partial z$ обозначена производная функции $v(x)$ в точке x по направлению z.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Наряду с системой (2) рассмотрим предельную гамильтонову систему, введенную в [1]:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=(A+u(x,\,p)bc')x,\\&\dot{p}=-(A+u(x,\,p)bc')'p,\\&u(x,p)=\frac{k}{2}\,(1-\operatorname{sign}p'bc'x).\end{aligned} \tag{5}$$

Если пара $\{A, b\}$ управляема и пара $\{A, c\}$ наблюдаема, то решение системы (5), которое обозначим через $x_k(t, x_0, p_0)$, $p_k(t, x_0, p_0)$, определено при всех $x_0 \in R^n$, $p_0 \in R^n$, удовлетворяющих условию $|x_0||p_0|>0$. При условии управляемости и наблюдаемости вектор-функции $x_k(t, x_0, p_0)$ и $p_k(t, x_0, p_0)$ удовлетворяют уравнениям (5) почти для всех $t \geqslant 0$. Известно, что для любых $T \geqslant 0$ и $x_0 \neq 0$ максимум функционала $|x_u(T, x_0)|$ при условии $u(\cdot) \in U(k)$ достигается на траекториях $x_k(t, x_0, p_0)$ системы (5) при подходящем выборе $p_0 \in S_1$, где через S_1 обозначена единичная сфера в R^n. Это экстремальное свойство системы (5) позволяет установить следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть пара $\{A, b\}$ управляема и пара $\{A, c\}$ наблюдаема. Тогда для любого $x_0 \in R^n \setminus \{0\}$ найдется такой вектор $p(x_0) \in S_1$ (быть может, не единственный), что $v(x_{k^*}(t, x_0, p(x_0))) = v(x_0)$ для любого $t \geqslant 0$, где $v(x)$ — это функция, существование которой гарантируется теоремой 1. Пусть $P(x_0) \subset S_1$ — это множество векторов, удовлетворяющих указанному выше условию. Тогда если $x_0 \in R^n \setminus \{0\}$ и $p(x_0) \in P(x_0)$, то $p_{k^*}(t, x_0, p(x_0)) \in P(x_{k^*}(t, x_0, p(x_0)))$ для любого $t \geqslant 0$.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Согласно теоремам 1, 2, при критическом значении параметра k^* в системе (2) и в предельной системе (5) из каждой точки $x_0 \neq 0$ исходит траектория, имеющая экстремальные свойства, указанные в формулировках теорем. На экстремальных траекториях сохраняется постоянное значение инвариантной функции $v(x)$. В этом смысле функция $v(x)$ может рассматриваться как первый интеграл системы (2) (или системы (5) при условии $p_0 \in P(x_0)$).

Поскольку при $k \geqslant k^*$ выполняется включение $Z(x, k^*) \subset Z(x, k)$, то из условия (4) следует, что для каждого $x \in R^n$ найдется такой вектор $z \in Z(x, k)$, что $\partial v / \partial z = 0$. Очевидно, что если при некотором k найдется такая положительная выпуклая функция $v(x)$, что для всех $x \in R^n$ выполняется условие $\partial v / \partial z = 0$ при некотором $z \in Z(x, k)$, то система (2) не может быть абсолютно устойчивой в классе $U(k)$, т. е. $k \geqslant k^*$. Следовательно, справедлива

Теорема 3. Пусть пара $\{A, b\}$ управляема. Тогда для выполнения условия $k \geqslant k^*$ необходимо и достаточно существования такой выпуклой функции $v(x)$, что для каждого $x \in R^n \setminus \{0\}$ найдется вектор $z \in Z(x, k)$, удовлетворяющий условию $\partial v / \partial z = 0$.

4. Приближенный метод поиска инвариантных функций

Из теоремы 3 следует, что k^* есть точная нижняя грань тех k, для которых существует функция $v(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы. Для конструктивного использования теоремы 3 с целью проверки неравенства $k \geqslant k^*$ нужно параметризовать класс функций и указать процедуру поиска оптимальных значений параметров. Используя построения, развитые в работах [4, 6], можно получить следующий результат.

Теорема 4. Пусть пара $\{A, b\}$ управляема. Тогда для выполнения неравенства $k > k^*$ необходимо и достаточно существования функции вида

$$(6) \qquad v(x) = \sum_{\nu=1}^{M} (l_\nu, x)^{2p}.$$

удовлетворяющей при каждом $x \in R^n \setminus \{0\}$ условию

$$(7) \qquad (\operatorname{grad} v(x), Ax+u(x)bc'x)=0,$$

где $0 \leqslant u(x) \leqslant k$.

В условиях теоремы 4 $p \geqslant 1$ и M — натуральные числа, $\{l_\nu\}_{\nu=1}^M$ — искомый набор векторов. Доказательство теоремы 4 проводится по схеме доказательства соответствующих теорем работ [4, 6] и поэтому опущено.

Для численной проверки выполнения условий теоремы 4 можно воспользоваться следующим приближенным приемом. Зафиксируем набор векторов $\{s_\nu\}_{\nu=1}^M$, лежащих на сфере единичного радиуса: $s_\nu \in S_1$, $\nu = \overline{1, M}$, где M достаточно велико (для получения такого набора можно воспользоваться датчиком псевдослучайных чисел). Векторы l_ν будем искать в виде $l_\nu = \alpha_\nu s_\nu$, $\nu = \overline{1, M}$, где числа $\alpha_\nu \geqslant 0$ подлежат определению. Условия (7) будем проверять только на векторах s_ν. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(\alpha, u) = \sum_{\nu=1}^{M} (\operatorname{grad} v(s_\nu), (A+u_\nu bc')s_\nu)^2 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{M} \Big(2p \sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu^{2p} (l_\mu, s_\nu)^{2p-1} (l_\mu' A s_\nu + u_\nu l_\mu' bc' s_\nu) \Big)^2 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{M} \Big(\sum_{\mu=1}^{M} \alpha_\mu^{2p} (f_{\mu\nu} + u_\nu g_{\mu\nu}) \Big)^2,$$

где $f_{\mu\nu} = 2p(l_\mu' s_\nu)^{2p-1} l_\mu' A s_\nu$, $g_{\mu\nu} = 2p(l_\mu' s_\nu)^{2p-1} l_\mu' bc' s_\nu$.

Сделав замену переменных $y_\mu = \alpha_\mu^{2p}$, получим функцию $\varphi(y, u)$. Минимизация функции $\varphi(y, u)$ при нормирующем условии $\sum_{\nu=1}^{M} y_\nu = 1$ и ограничениях $y_\nu \geqslant 0$, $0 \leqslant u_\nu \leqslant k$ дает численный метод проверки условия $\Phi(\alpha, u) = 0$, гарантирующего (при достаточно большом M) выполнение условия (7).

Для решения указанной задачи минимизации можно применить следующий итеративный метод. На первом шаге каждой итерации решается задача

$$(8) \qquad \min \Big\{ \varphi(y, \bar{u}) \, \Big| \, \sum_{\nu=1}^{M} y_\nu = 1, \; y_\nu \geqslant 0 \Big\}$$

при фиксированных значениях $u_\nu = \bar{u}_\nu$, $\nu = \overline{1, M}$. Эта задача является задачей минимизации неотрицательной квадратичной формы при простых линейных ограничениях. На втором шаге фиксируется вектор $y = \bar{y}$, где $\bar{y}$ — решение задачи (8) и функция $\varphi(\bar{y}, u)$ минимизируется по переменным u_ν при ограничениях $0 \leqslant u_\nu \leqslant k$. При фиксированном векторе $\bar{y}$ минимизация функции $\varphi(\bar{y}, u)$ по каждой из переменных u_ν проводится независимо по конечным формулам. После получения нового вектора переменных u_ν (обозначим его $\bar{\bar{u}}$) начинается следующая итерация. Итерации повторяются до сходимости. Если минимальное значение функции $\varphi(y, u)$ равно 0, то в соответствии с теоремой 4 $k > k^*$.

Для доказательства теоремы 1 сформулируем и докажем ряд лемм.

Лемма П.1 Пусть для некоторой начальной точки x_0 найдутся такие последовательности управлений $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j(\cdot)\in U(k)$ и чисел $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $t_j\to\infty$ и $c_j\to\infty$ при $j\to\infty$ и $|x_{u_j}(t_j, x_0)|\geqslant c_j$. Тогда, если пара $\{A, b\}$ управляема, то для любого начального условия $y\neq 0$ найдутся такие последовательности управлений $\{u_j^y(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j^y(\cdot)\in U(k)$ и чисел $\{t_j^y\}_{j=1}^{\infty}$, $\{c_j^y\}_{j=1}^{\infty}$, что $t_j^y\to\infty$, $c_j^y\to\infty$ при $j\to\infty$ и $|x_{u_j^y}(t_j^y, y)|\geqslant c_j^y$.

Доказательство. Обозначим через Y множество таких начальных условий $y\in R^n$, что для управлений $u(\cdot)\in U(k)$ решения $x_u(t, y)$ системы (2) равномерно ограничены, т. е. найдется такое число $b(y)>0$, что

$$|x_u(t, y)|\leqslant b(y), \quad u(\cdot)\in U(k), \quad t\geqslant 0. \tag{П.1}$$

Предположим, что $Y\neq\{0\}$. Тогда, используя линейность системы (2), получим, что при любых $y_1\in Y$, $y_2\in Y$, $\alpha_1\in R$, $\alpha_2\in R$ и $u(\cdot)\in U(k)$ будет выполняться неравенство

$$|x_u(t, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)|\leqslant|\alpha_1|b(y_1)+|\alpha_2|b(y_2), \quad t\geqslant 0.$$

Следовательно, $b(\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)\leqslant|\alpha_1|b(y_1)+|\alpha_2|b(y_2)$ и Y есть линейное подпространство R^n. Из (П.1) следует, что при $y\in Y$, $0\leqslant\tau\leqslant t$ и любом управлении $u(\cdot)\in U(k)$ выполняется неравенство

$$|x_{u_\tau}(t-\tau, x_u(\tau, y))|\leqslant b(y), \quad t\geqslant 0,$$

где $u_\tau(t)=u(t+\tau)$. Поскольку $u_\tau(\cdot)\in U(k)$, то $x_u(\tau, y)\in Y$ при любом $y\in Y$ и $u(\cdot)\in U(k)$. Следовательно, подпространство Y есть инвариантное подпространство системы (2) для любого управления $u(\cdot)\in U(k)$. Нетривиальность этого подпространства ($Y\subset R^n\setminus\{x_0\}$ и $Y\neq\{0\}$) противоречит управляемости пары $\{A, b\}$ [8]. Противоречие доказывает лемму.

Лемма П. 2. Пусть для некоторой начальной точки $x_0\in R^n$ найдутся такие последовательности управлений $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, $u(\cdot)\in U(k)$ и чисел $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $t_j\to\infty$ и $c_j\to\infty$ при $j\to\infty$ и $|x_{u_j}(t_j, x_0)|\geqslant c_j$. Тогда, если пара $\{A, b\}$ управляема, то найдется такое достаточно малое положительное число ε, что выполняется равенство

$$|x_{u^*}(\theta_j, x_0)|>|x_0|e^{\beta\theta_j}, \quad j=1, 2, \ldots \tag{П.2}$$

для некоторой неограниченно возрастающей последовательности $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$, положительного числа $\beta>0$ и управления $u^*(\cdot)\in U(k-\varepsilon)$.

Доказательство. Напомним, что $S_1=\{y\in R^n|\,|y|=1\}$. По лемме П.1 для любой начальной точки $y\in S_1$ найдутся такие последовательности управлений $\{u_j^y(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j^y(\cdot)\in U(k)$ и чисел $\{t_j^y\}_{j=1}^{\infty}$, $\{c_j^y\}_{j=1}^{\infty}$, что $t_j^y\to\infty$, $c_j^y\to\infty$ при $j\to\infty$ и

$$|x_{u_j^y}(t_j^y, y)|\geqslant c_j^y. \tag{П.3}$$

Определим

$$\rho(y, t)=\max_{u(\cdot)\in U(k)}|x_u(t, y)|$$

(существование максимума следует из компактности множества решений системы (2) на каждом конечном интервале [1]) и

$$\overline{\rho}(y, t)=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\rho(y, \tau). \tag{П.4}$$

Из (П.3) следует, что $\overline{\rho}(y, t)\to\infty$ при $t\to\infty$ для каждого $y\in S_1$. Тогда в силу компактности сферы S_1 выполняется условие

$$r(t)=\min_{y\in S_1}\overline{\rho}(y, t)\to\infty$$

при $t\to\infty$. Выберем такие числа $\bar{\gamma}>1$ и $T>0$, что $r(T)=\bar{\gamma}$, т. е.

$$\min_{y\in S_1}\max_{0\leqslant\tau\leqslant T}\max_{u(\cdot)\in U(k)}|x_u(\tau,y)|=\bar{\gamma}.$$

Тогда для любого $y\in S_1$ найдутся такое управление $\bar{u}^y(\cdot)\in U(k)$ и такой момент времени $0<\bar{t}(y)\leqslant T$, что

$$|x_{\bar{u}^y}(\bar{t}(y),y)|\geqslant\bar{\gamma}. \tag{П.5}$$

Обозначим через $\Phi_u(t)$ фундаментальную матрицу системы (2), отвечающую управлению $u(\cdot)$. Тогда (П.5) означает, что

$$\lambda_1(\Phi_{\bar{u}^y}(\bar{t}(y)))\geqslant\bar{\gamma},$$

где $\lambda_1(\Phi)$ – это минимальное сингулярное число матрицы Φ. Для $\varepsilon>0$ определим $u_\varepsilon^y(t)=\bar{u}^y(t)\dfrac{k-\varepsilon}{k}$. Тогда $u_\varepsilon^y(\cdot)\in U(k-\varepsilon)$.

Так как $\bar{t}(y)\leqslant T$, то в силу леммы Гронуолла и непрерывной зависимости $\lambda_1(\Phi)$ от матричного аргумента для достаточно малого $\delta>0$ и любого $y\in S_1$ можно найти такое $\varepsilon(y)>0$, что для любого $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon(y)$ выполняется неравенство

$$\lambda_1(\Phi_{u_\varepsilon^y}(\bar{t}(y)))\geqslant\bar{\gamma}-\delta.$$

Выбрав $\varepsilon_0=\min\limits_{y\in S_1}\varepsilon(y)$, получим, что $\varepsilon_0>0$ и

$$\lambda_1(\Phi_{u_\varepsilon^y}(\bar{t}(y)))\geqslant\bar{\gamma}-\delta$$

для любого $y\in S_1$ и $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$.

Так как при $y\in S_1$ и $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant T}\max_{u(\cdot)\in U(k-\varepsilon)}|x_u(\tau,y)|\geqslant\lambda_1(\Phi_{u_\varepsilon^y}(t(y))),$$

то

$$\min_{y\in S_1}\max_{0\leqslant\tau\leqslant T}\max_{u(\cdot)\in U(k-\varepsilon)}|x_u(\tau,y)|=\gamma\geqslant\bar{\gamma}-\delta. \tag{П.6}$$

Поскольку $U(k-\varepsilon)\subset U(k)$, то $\gamma\leqslant\bar{\gamma}$. Итак $\bar{\gamma}-\delta\leqslant\gamma\leqslant\bar{\gamma}$. Выбрав δ достаточно малым, получим $\gamma>1$.

Для любого $y\in S_1$ найдутся такое управление $u^y\in U(k-\varepsilon)$ и такой момент $0\leqslant$ $\leqslant t(y)\leqslant T$, что

$$|x_{u^y}(t(y),y)|\geqslant\gamma|y|. \tag{П.7}$$

Пусть $\tau_1=t(x_0)$, $u_1(\tau)=u^{x_0}(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_1$ и $x_1=x_{u_1}(\tau_1,x_0)$. Тогда из (П.6) следует, что $|x_1|\geqslant\gamma|x_0|$. Пусть $\tau_2=t(x_1)$, $u_2(\tau)=u^{x_1}(\tau)$ при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_2$ и $x_2=x_{u_2}(\tau_2,x_1)$. Тогда $|x_2|\geqslant\gamma|x_1|$. Продолжая, получим

$$|x_j|\geqslant\gamma|x_{j-1}|,\quad x_j=x_{u_j}(\tau_j,x_{j-1}),\quad 0<\tau_j\leqslant T.$$

Обозначив $\theta_j=\sum\limits_{i=1}^{j}\tau_i$, $\theta_0=0$, получим

$$|x_{u^*}(\theta_j,x_0)|\geqslant\gamma|x_{u^*}(\theta_{j-1},x_0)|, \tag{П.8}$$

где управление $u^*(\cdot)$ определим условием

$$u^*(t)=u_j(t-\theta_{j-1}),\quad \theta_{j-1}\leqslant t<\theta_j,\quad j=1,2,\ldots$$

По построению $u^*(\cdot)\in U(k-\varepsilon)$. Из (П.8) и неравенства $0<\theta_j-\theta_{j-1}\leqslant T$, $j=1,2,\ldots$ следует

$$|x_{u^*}(\theta_j,x_0)|\geqslant e^{\frac{\theta_j-\theta_{j-1}}{T}\ln\gamma}|x_{u^*}(\theta_{j-1},x_0)|\geqslant e^{\beta\theta_j}|x_0|,$$

где $\beta=\dfrac{1}{T}\ln\gamma$.

Теперь докажем, что $\theta_j \to \infty$ при $j\to\infty$. Предположив обратное, получим в силу монотонности последовательности $\{\theta_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $\tau_j \to 0$. В силу компактности сферы S_1 и компактности множества решений системы (2) на конечном отрезке $[0, T]$ получим, извлекая подпоследовательность $\{j_i\}_{i=1}^{\infty}$, что $x_{j_i}\to\bar{x}$, $x_{j_i+1}=x_{u_{j_i}}(\tau_{j_i}, x_{j_i})\to$ $\to x_{\bar{u}}(0, \bar{x})$, где $\bar{u}(\cdot)\in U(k-\varepsilon)$. Но $x_{\bar{u}}(0, \bar{x})=\bar{x}$, что противоречит неравенству $|x_{j_i+1}|\geqslant\gamma|x_{j_i}|$ при больших i в силу $\gamma>1$. Лемма доказана.

Лемма П.3. Пусть пара $\{A, b\}$ управляема. Тогда для любого $y\in S_1$ найдутся такое управление $u^y(\cdot)\in U(k^*)$, число $c(y)>0$ и такая последовательность $\{t_j^y\}_{j=1}^{\infty}$, что $t_j^y\to\infty$ при $j\to\infty$ и

$$|x_{u^y}(t_j^y, y)|\geqslant c(y). \tag{П.9}$$

Доказательство. Если система (2) равномерно абсолютно устойчива в классе $U(k)$, то она равномерно абсолютно устойчива и в классе $U(k+\varepsilon)$, если $\varepsilon>0$ достаточно мало. Это следует, в частности, из результата работы [4], где получены необходимые и достаточные условия равномерной абсолютной устойчивости в терминах функций Ляпунова. Следовательно, по определению k^*, система (2) не является равномерно абсолютно устойчивой в классе $U(k^*)$. Но тогда найдутся по крайней мере одно такое начальное условие x_0, управление $u_0(\cdot)\in U(k^*)$, последовательность $\{t_j^0\}_{j=1}^{\infty}$ и число $c(x_0)>0$, что $t_j^0\to\infty$ при $j\to\infty$ и $|x_{u^0}(t_j^0, x_0)|\geqslant c(x_0)$ для всех j. Обозначим через Y^0 множество таких векторов $y\in R^n$, для которых $x_u(t, y)\to 0$ при $t\to\infty$ для любых управлений $u(\cdot)\in U(k^*)$. Предположим, что $Y^0\neq\{0\}$. Тогда для $y_1\in Y^0$ и $y_2\in Y^0$ получим

$$x_u(t, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)=\alpha_1 x_u(t, y_1)+\alpha_2 x_u(t, y_2)$$

и из $x_u(t, y_i)\to 0$, $i=1, 2$ при всех $u(\cdot)\in U(k^*)$ следует, что $x_u(t, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2)\to 0$ при всех $u(\cdot)\in U(k^*)$. Следовательно, $\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2\in Y^0$ и множество Y^0 является подпространством. Так же, как и при доказательстве леммы П.1, доказывается инвариантность Y^0 относительно движений системы (2) при любых управлениях из класса $U(k^*)$. Тогда нетривиальность Y^0 ($Y^0\neq\{0\}$ и $Y^0\in R^n\setminus\{x_0\}$) противоречит управляемости пары $\{A, b\}$, что и доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$\rho(x_0, t)=\max_{u(\cdot)\in U(k^*)}|x_u(t, x_0)|$$

и определим

$$v(x_0)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\rho(x_0, t). \tag{П.10}$$

Функция $v(x_0)$ однородна степени 1. Покажем, что $v(x_0)<\infty$ для $x_0\in S_1$. Если предположить, что $v(x_0)=\infty$ для некоторого $x_0\in S_1$, то найдутся такие последовательности управлений $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j(\cdot)\in U(k^*)$ и чисел $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $t_j\to\infty$, $c_j\to\infty$, при $j\to\infty$ и $|x_{u_j}(t_j, x_0)|\geqslant c_j$. Тогда, по лемме П.2, найдется экспоненциально растущее решение, удовлетворяющее оценке (П.2) при управлении $u^*(\cdot)\in U(k^*-\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$. Но это противоречит абсолютной устойчивости системы (2) в классе $U(k^*-\varepsilon)$ при $\varepsilon>0$. Итак, $v(x_0)<\infty$.

Из леммы П.3 следует, что $v(x_0)>0$ для любого $x_0\neq 0$. Докажем выпуклость функции $v(x)$. Для любого $0\leqslant\alpha\leqslant 1$

$$v(\alpha y_1+(1-\alpha)y_2)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\max_{u(\cdot)\in U(k^*)}|x_u(t, \alpha y_1+(1-\alpha)y_2)|\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{t\to\infty}}\Big(\max_{u(\cdot)\in U(k^*)}(\alpha|x_u(t, y_1)|+(1-\alpha)|x_u(t, y_2)|)\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{t\to\infty}\Big(\alpha\max_{u(\cdot)\in U(k^*)}|x_u(t, y_1)|+(1-\alpha)\max_{u(\cdot)\in U(k^*)}|x_u(t, y_2)|\Big)=$$

$$=\alpha v(y_1)+(1-\alpha)v(y_2).$$

Далее, для любого $h>0$ имеем

(П.11) $$v(x_0)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\max_{y\in X_h(x_0)}\max_{u(\cdot)\in U(k^*)}|x_u(t-h,y)|=\max_{y\in X_h(x_0)}v(y),$$

где $X_h(x_0)$ – множество достижимости системы (2) из точки x_0 за время h. Но для достаточно малых h вектор y из области $X_h(x_0)$ можно представить в виде

$$y=x_0+hz+O(h),$$

где $z=F_{x_0}$, $F\in\operatorname{conv}\{A,\ A+k^*bc'\}$; $\frac{1}{h}|O(h)|\to 0$, $h\to0$. Но $\operatorname{conv}\{A,\ A+k^*bc'\}=\{F|F=A+\lambda bc',\ \lambda\in[0,\ k^*]\}$ и, следовательно, $z\in Z(x_0,\ k^*)$. Тогда равенство (П.11) можно переписать в виде

$$0=\max_{z\in Z(x_0,k^*)}v(x_0+hz+O(h))-v(x_0).$$

Разделив последнее равенство на h и переходя к пределу при $h\to0$, получим с учетом $v(x_0)\neq0$ условие (4). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Определим функцию

(П.12) $$w(x_0,p_0)=\overline{\lim_{t\to\infty}}|x_{k^*}(t,x_0,p_0)|.$$

Из этого определения следует, что для всех $t\geqslant0$ имеем

(П.13) $$w(x_{k^*}(t,\ x_0,\ p_0),\ p_{k^*}(t,\ x_0,\ p_0))=w(x_0,\ p_0).$$

Поскольку траектория $x_{k^*}(t,\ x_0,\ p_0)$ предельной системы (5) при любом $p_0\in S_1$ содержится в множестве траекторий $x_u(t,\ x_0)$ системы (2) при $u(\cdot)\in U(k^*)$, то для каждого $p_0\in S_1$ справедливо

(П.14) $$w(x_0,\ p_0)\leqslant v(x_0),$$

где функция $v(x)$ определена равенством (П.10). С другой стороны, из (П.10) следует, что для каждого $x_0\in R^n$ найдутся такая последовательность управлений $\{u_j(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$, $u_j(\cdot)\in U(k^*)$ и такая неограниченно возрастающая последовательность чисел $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $|x_{u_j}(t_j,x_0)|=\max\limits_{u(\cdot)\in U(k^*)}|x_u(t_j,x_0)|$ и $v(x_0)=\lim\limits_{j\to\infty}|x_{u_j}(t_j,x_0)|$. Но по свойству предельной системы [1] для каждого $x_0\neq0$ и для каждого t_j найдется такой вектор $p_0{}^j\in S_1$, что $x_{u_j}(t_j,\ x_0)=x_{k^*}(t_j,\ x_0,\ p_0{}^j)$. Выбрав подпоследовательность $\{p_0{}^{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$, сходящуюся к пределу, который обозначим $p(x_0)\in S_1$, получим

$$v(x_0)=\lim_{i\to\infty}|x_{u_{j_i}}(t_{j_i},x_0)|=\lim_{i\to\infty}|x_{k^*}(t_{j_i},x_0,p_0^{j_i})|=$$
$$=\lim_{i\to\infty}|x_{k^*}(t_{j_i},x_0,p(x_0))|\leqslant w(x_0,p(x_0)).$$

Совместно с (П.14) последнее неравенство доказывает, что

(П.15) $$v(x_0)=w(x_0,p(x_0))=\max_{p\in S_1}w(x_0,p).$$

Поскольку для любого $T>0$ $x_{k^*}(T,\ x_0,\ p(x_0))\in X_T(x_0)$, то из (П.11) следует

(П.16) $$v(x_0)\geqslant v(x_{k^*}(T,\ x_0,\ p(x_0))).$$

С другой стороны, для любого $T>0$ и всех $x_0\in R^n$ из (П.13) и (П.15) следует

$$v(x_0)=w(x_0,p(x_0))=w(x_{k^*}(T,x_0,p(x_0)),$$
$$p_{k^*}(T,x_0,p(x_0)))\leqslant\max_{p\in S_1}w(x_{k^*}(T,x_0,p))=v(x_{k^*}(T,x_0,p(x_0))).$$

Принимая во внимание (П.16), получим

(П.17) $$v(x_0)=v(x_{k^*}(T,\ x_0,\ p(x_0))).$$

Первая часть теоремы доказана. Из (П.17) и автономности системы (5) следует, что для любых $t\geqslant0$ и $T\geqslant0$ выполняется равенство

$$v(x_{k^*}(T,\ x_0,\ p(x_0)))=v(x_{k^*}(T+t,\ x_0,\ p(x_0)))=$$
$$=v(x_{k^*}(T,\ x_{k^*}(t,\ x_0,\ p(x_0)),\ p_{k^*}(t,\ x_0,\ p(x_0)))).$$

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пятницкий Е. С.* Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем // АиТ. 1970. № 1. С. 5–15.
2. *Пятницкий Е. С.* Абсолютная устойчивость нестационарных нелинейных систем. Свободные и вынужденные движения // АиТ. 1970. № 3. С. 5–15.
3. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Абсолютная неустойчивость нелинейных нестационарных систем. I, II // АиТ. 1982. № 1. С. 19–27; № 2. С. 17–28.
4. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем. I, II // АиТ. 1986. № 3. С. 63–73; № 4. С. 5–15.
5. *Молчанов А. П., Пятницкий Е. С.* Критерии абсолютной устойчивости секторно-линейных дифференциальных включений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 1. С. 37–40.
6. *Мейлахс А. М.* О существовании функций Ляпунова для параметрически возмущенных линейных систем // Сложные системы управления. Киев: Ин-т кибернетики АН УССР, 1980. С. 11–15.
7. *Барабанов Н. Е.* Показатели Ляпунова дискретных включений. I // АиТ. 1988. № 2. С. 40–46.
8. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 22.03.89

УДК 517.977.5

А. М. ШУБЛАДЗЕ, д-р техн. наук

(Институт проблем управления, Москва)

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ m-МЕРНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ. III

Предлагаются методики расчета оптимальных по степени устойчивости систем управления, основанные на использовании либо определителей Гурвица, либо частотных характеристик систем.

1. Введение и постановка задачи

В настоящей работе предлагаются общие решения задач синтеза оптимальных по степени устойчивости систем управления, частные случаи решения которых рассматривались в работах [1, 2].

Задача синтеза оптимальных систем решается в постановке, аналогичной постановке задачи в [3], где поведение объекта описывается уравнением

$$x^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{(i-1)}(t)=k_0u(t), \tag{1}$$