

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Кадышевский, Модель скалярной теории поля в квантованном пространстве – времени, *Докл. АН СССР*, 1962, том 147, номер 6, 1336–1339

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

22 января 2025 г., 07:30:34



В. Г. КАДЫШЕВСКИЙ

**МОДЕЛЬ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КВАНТОВАННОМ
ПРОСТРАНСТВЕ — ВРЕМЕНИ**

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 23 VI 1962)

§ 1. В настоящей работе на примере простой скалярной модели изучаются некоторые обобщения аппарата квантовой теории поля, возможные в формализме квантованного пространства — времени (¹⁻⁵). Поскольку в новой схеме координаты x^n становятся некоммутирующими операторами, все построения производятся в p -пространстве, являющемся в данном случае пространством постоянной кривизны. Учитывая аргументацию § 2 работы (⁵), мы определим 4-импульс p_m ($m = 0, 1, 2, 3$) посредством соотношения (5) из (⁵) при $\varepsilon = 1$.

§ 2. Пусть $\psi(p)$ и $\varphi(k)$ — данные скалярные поля, описывающие частицы с массами m и μ , причем поле $\psi(p)$ комплексное, а $\varphi(k)$ — действительное. Последнее означает (см., например, (⁶)), что при комплексном сопряжении $\psi(p)$ переходит в $\psi^*(-p)$, а $\varphi(k)$ в $\varphi(-k)$. Будем считать, что обычный формализм свободных полей переносится в новую схему с изменением лишь в одном пункте: вместо функции $\delta(p - q)$, фигурирующей в релятивистски ковариантной записи перестановочных соотношений, «нормальных» и «хронологических» спариваний, необходимо использовать, в соответствии с новым характером интегрирования в p -пространстве, функцию $\delta(p(-)q)$, определенную соотношением (19), из (⁵).

Предположим далее, что лагранжиан взаимодействия рассматриваемой модели в x -представлении обычной теории имеет вид $\mathcal{L}(x) = g\psi^+(x)\psi(x)\varphi(x)$ («крест» означает эрмитовское сопряжение). Для построения S -матрицы в кривом p -пространстве мы должны обобщить величину *

$$\tilde{\mathcal{L}}(q) = \int e^{-iqx} \mathcal{L}(x) dx = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \psi^+(q) * \psi(q) * \varphi(q), \quad (1)$$

поскольку $\int \mathcal{L}(x) dx = \tilde{\mathcal{L}}(0)$. Оказывается, что, несмотря на неассоциативность новой операции свертки (см. (17) в (⁵)), это обобщение при учете требования $\tilde{\mathcal{L}}^+(q) = \tilde{\mathcal{L}}(-q)$, производится однозначно **:

$$\tilde{\mathcal{L}}(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} [\psi^+(q) * \psi(q)] * \varphi(q) \quad (2)$$

(здесь символом * обозначена свертка (17) из (⁵)), откуда

$$\tilde{\mathcal{L}}(0) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \psi^+(p) \psi(-p(+k)) \varphi(k) d\Omega_p d\Omega_k. \quad (3)$$

* Для записи $\tilde{\mathcal{L}}(q)$ используется символ свертки; \int фурье-образы полей $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ определяются по (⁶).

** Для самодействующих скалярных полей, например, поля Хэрста — Тирринга (⁷), обобщение $\tilde{\mathcal{L}}(q)$ особенно просто:

$$\tilde{\mathcal{L}}(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \varphi(q) * \varphi(q) * \varphi(q) = \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(-p(-)q) \varphi(k) \varphi(-k(-)p) d\Omega_p d\Omega_k.$$

Если операторы полей заданы в представлении взаимодействия, то S -матрица данной модели с учетом (3) формально может быть записана следующим образом:

$$S = T \exp \left\{ i \frac{g}{\sqrt{2\pi}} \int \psi^+ (p) \psi (-p (+) k) \varphi (k) d\Omega_p d\Omega_k \right\}, \quad (4)$$

где символ T означает, что функционал (4) приводится к нормальной форме согласно теореме Вика для T -произведений, т. е. с использованием «хронологических» спариваний.

При разложении (4) по степеням g мы получаем совокупность диаграмм Фейнмана с видоизмененным законом сложения 4-импульсов в вершинах*, новым элементом объема и новой областью интегрирования.

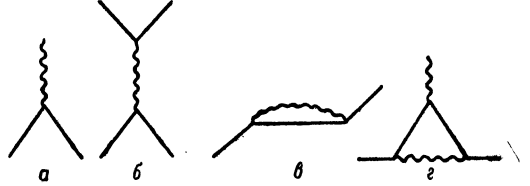


Рис. 1

Приведем для примера несколько простейших диаграмм (см. рис. 1) и отвечающих им выражений (прямая линия на рис. 1 соответствует заряженной частице, волнистая — нейтральной):

$$\begin{aligned} a & \quad \frac{ig}{\sqrt{2\pi}} N [\psi^+ (-p) \psi (p(-)k) \varphi (k)]; \\ б & \quad \frac{ig^2}{8\pi^2} \Delta^c (k) N [\psi^+ (-p) \psi (p(-)k) \psi^+ (-p') \psi (p' (+)k)]; \\ в & \quad \frac{g^2}{16\pi^3} N [\psi^+ (-p) \psi (p)] \int_{\Omega} \Delta^c (p(-)k) \Delta^c (k) d\Omega_k; \\ з & \quad \frac{g^3}{6(2\pi)^{3/2}} \int d\Omega_k N [\psi^+ (-p(-)k(+)) \psi (p(+)) \varphi (k') \psi (p)] \times \\ & \quad \times D^c (p(-)k) \Delta^c (k) D^c (p(-)k(+)) \end{aligned} \quad (5)$$

(N — символ нормального произведения).

§ 3. Исследование сходимости интегралов, содержащихся в разложении матрицы (4), мы начнем с рассмотрения диаграммы $в$, которой в обычной теории соответствует логарифмически расходящийся интеграл

$$\Sigma_2 (p^2) = \frac{1}{i} \int D^c (p - k) \Delta^c (k) d^4k. \quad (6)$$

Как известно, (6) можно также представить в виде

$$\Sigma_2 (p^2) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^1 d\alpha \int_{k_4^2 \leq L^2} \frac{dk_4 dk}{(M + k_4^2 - i\varepsilon)^2} \quad (v = 1, 2, 3, 4), \quad (7)$$

где $M = (1 - \alpha) \mu^2 + \alpha m^2 - d(1 - \alpha) p^2 + k^2 > 0$ при $p^2 < (m + \mu)^2$, а внутреннее интегрирование производится по эвклидову 4-пространству. В S -матрице (4), согласно (5), вместо (6) будем иметь

$$\Sigma_2 (p^2) = \frac{1}{i} \int_{\Omega} D^c (p(-)k) \Delta^c (k) d\Omega_k \quad (8)$$

или в явном виде (при учете (10) и (15) из (5))

$$\Sigma_2 (p^2) = \frac{1}{i} \int_{k^2 \geq -1} \frac{d^4k}{\sqrt{1 + k^2} [1 + m^2 - (\sqrt{1 + p^2} \sqrt{1 + k^2} - pk)^2 - i\varepsilon] (\mu^2 - k^2 - i\varepsilon)}. \quad (9)$$

* При этом порядок суммируемых 4-импульсов из-за однозначности выражения (3) для $\mathcal{L}(0)$ и свойства $\delta(p(-)q) = \delta(q(-)p)$ функции $\delta(p(-)q)$, входящей в «хронологические» спаривания, является совершенно определенным и находится в соответствии с правилом, данным в (3).

Для (9) можно найти параметрическое представление, аналогичное (7) *

$$\Sigma_2(p^2) = \frac{1}{i} \int_0^1 \frac{dx}{1+4x(1-\alpha)p^2} \int_{\Omega} \frac{dk_0 dk}{\sqrt{1+k^2(M-k_0^2-i\epsilon)^2}}, \quad (10)$$

где

$$M = \frac{(1-\alpha)\mu^2 + \alpha m^2}{\sqrt{1+4x(1-\alpha)p^2}} + \frac{(1+k^2) - (1-k^2)\sqrt{1+4x(1-\alpha)p^2}}{2\sqrt{1+4x(1-\alpha)p^2}} > 0 \quad (11)$$

при $-1 \leq p^2 < (m(+) \mu)^2 = (m\sqrt{1+\mu^2} + \mu\sqrt{1+m^2})^2$.

Однако в представлении (10), в отличие от (7), вид области Ω и аналитические свойства подынтегральной функции не позволяют совершить поворот на $\pi/2$ пути интегрирования в плоскости k_0 и перейти таким образом к интегрированию по кривому p -пространству с положительно определенной метрикой (в дальнейшем E_4), являющемуся аналогом эвклидова 4-пространства в (14)). По этой причине интеграл (9) — (10), несмотря на «радиальную» сходимость, оказывается расходящимся по гиперболическим угловым переменным (ср. с § 26 из (6)), где обсуждается аналогичная ситуация с расходимостью по обычным углам.

Если бы переход к интегрированию по пространству E_4 был возможен, то мы имели бы для рассматриваемого интеграла явно сходящееся выражение

$$\Sigma'_2(p^2) = \int_0^1 \frac{dx}{1+4x(1-\alpha)p^2} \int_{\substack{k_v^2 \leq 1 \\ v=1,2,3,4}} \frac{dk_4 dk}{\sqrt{1-k_v^2(M+k_4^2-i\epsilon)^2}} \quad (v=1, 2, 3, 4), \quad (12)$$

которое является вещественной величиной при значениях p^2 ниже «порога» $(m(+) \mu)$ (см. (11)). Интеграл (12), очевидно, полностью аналогичен (7). Мы можем записать эти выражения в еще более сходной форме, если совершим в каждом из них аналитическое продолжение по переменной p_0 от ее действительных значений к чисто мнимым значениям $** ip_4$ и произведем интегрирование по α . В результате будем иметь:

$$\Sigma_2(-p^2) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\substack{k_v^2 \leq L^2 \\ v=1,2,3,4}} \frac{dk}{[m + (p-k)_v^2](\mu^2 + k_v^2)} \quad (dk = dk_4 dk); \quad (13)$$

$$\Sigma'_2(-p^2) = \int_{\substack{k_v^2 \leq 1 \\ v=1,2,3,4}} \frac{d\Omega_k}{[m^2 + (p(-)k)_v^2](\mu^2 + k_v^2)} \quad (14)$$

где $(p(-)k)_v^2 = 1 - (\sqrt{1-p_v^2}\sqrt{1-k_v^2} + p_v k_v)^2$ есть квадрат вектора, преобразованного с помощью операции сдвига в E_4 , а $d\Omega_k = dk/\sqrt{1-k_v^2}$ — элемент объема этого пространства

§ 4. Анализ показывает, что расходимости по гиперболическим углам возникают и в высших порядках теории возмущений. Поэтому данный в § 3 способ построения конечного интеграла Σ'_2 (см. (12) и (14)) целесообразно распространить на случай произвольной диаграммы, т. е. мы приходим к выводу, что матрица рассеяния в рассматриваемой схеме должна быть обобщением такой формы обычной S -матрицы, в которой все внутренние интегрирования производятся по эвклидову 4-пространству. При таком подходе роль новой S -матрицы может играть функционал $***$ (ср. с (9))

* (10) является релятивистски инвариантным представлением $\Sigma_2(p^2)$, так как 4-вектор p_m входит в подынтегральное выражение лишь в виде p^2 . Очевидно, при $l \rightarrow 0$ (10) переходит в фейнмановское представление (7).

** Возможность такого аналитического продолжения для (7) очевидна, а для (12) может быть строго доказана.

*** Аналогичный функционал рассматривался Ю. А. Гольфандом (8).

$$S' = e^{\Delta + \Sigma} \exp \left[\frac{ig}{\sqrt{2\pi}} \int \psi^+(p) \psi(-p) \varphi(k) \varphi(k) d\Omega_p d\Omega_k \right],$$

где

$$\Delta = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Omega_k}{\mu^2 + k_v^2} \frac{\delta^2}{\delta\varphi(k) \delta\varphi(-k)}, \quad \Sigma = \frac{1}{2\pi} \int d\Omega_p \frac{\delta}{\delta\psi(p)} \frac{1}{m^2 + p_v^2} \frac{\delta}{\delta\psi^+(-p)}, \quad (15)$$

причем все интегрирования производятся по пространству E_4 , а функциональные производные понимаются в смысле (21) и (22) из (5). «Истинные» матричные элементы получаются путем варьирования S' по аргументам ψ, ψ^+, φ с последующим приравниванием этих аргументов нулю (ср. с § 47 из (6)) и аналитическим продолжением типа $p_4 \rightarrow -ip_0$ полученных выражений в физическую область значений 4-компонент внешних импульсов*. Например, для рассмотренной выше массовой диаграммы 2-го порядка имеем:

$$\left. \frac{\delta^2 S'_2}{\delta\psi^+(-p) \delta\psi(p)} \right|_{\psi, \psi^+, \varphi=0} = -\frac{g^2}{16\pi^3} \delta(p(-) p') \Sigma'_2(-p_v^2);$$

$$\Sigma'_2(p_0^2 - p^2) = \text{аналитич. продолж. } \Sigma'_2(-p_v^2),$$

где S'_2 — члены 2-го порядка в (15). Характерной особенностью получаемых таким образом интегралов является отсутствие расходимостей. Выполнение условия унитарности для первых двух порядков по g очевидно, а для высших приближений требуется специальное исследование.

Автор выражает благодарность Н. Н. Боголюбову, Ю. А. Гольфанду, В. И. Григорьеву, А. А. Логунову, И. Е. Тамму, Н. А. Черникову и Ю. М. Широкову за многочисленные плодотворные дискуссии.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступило
19 VI 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. S y d e r, Phys. Rev., 71, 38 (1947). ² В. Л. А в е р б а х, Б. В. М е д в е д е в, ДАН, 54, 41 (1949). ³ Ю. А. Г о л ь ф а н д, ЖЭТФ, 37, 504 (1959). ⁴ В. Г. К а д ы ш е в с к и й, ЖЭТФ, 41, 1885 (1961). ⁵ В. Г. К а д ы ш е в с к и й, ДАН, 147, № 3 (1962). ⁶ Н. Н. Б о г о л ь о в о в, Д. В. Ш и р к о в, Введение в теорию квантованных полей, 1957. ⁷ С. А. H u r s t, Proc. Cambr. Phil. Soc., 18, 625 (1952); W. T h i r r i n g, Helv. Phys. Acta, 26, 33 (1953). ⁸ Ю. А. Г о л ь ф а н д, ЖЭТФ, 43, 256 (1962). ⁹ S. H o g i, Progr. Theor. Phys., 7, 578 (1952)

* При этом для правильного обхода особенностей, возникающих в физической области, необходимо добавить к массам $-ie$. Элементы обычной матрицы рассеяния, очевидно, могут быть получены аналогичным способом. Возможность аналитического продолжения $p_4 \rightarrow -ip_0$ в этом случае доказывается в общем виде (9).