УДК 514.765

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННАЯ МОРФИЗМАМИ G-ПРОСТРАНСТВ

В. И. Ведерников, С. В. Ведерников

§ 1. ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая статья является непосредственным продолжением статьи С. В. Ведерникова [16]. Здесь, так же как и в статье [16], изучается глобальная пара (G, A), где G — группа Ли, а A — подмножество группы гладких эндоморфизмов группы Ли G, порождающее полугруппу с единицей $\Gamma=[A]$. Напомним, что в статье [16] требовалось, чтобы элементы Γ были инволютивными, перестановочными между собой и чтобы группа Γ была конечной. Здесь эти свойства группы Γ не требуются. Соответственно изменены определения G-пространств, порождаемых данной глобальной парой, но все результаты статьи [16] включаются как некоторые частные случаи. Отметим, что результаты статьи частично пересекаются с результатами, полученными в [16]. Естественно также, что мы существенно использовали теорию обобщенных симметрических пространств.

Изучению обобщенных симметрических пространств посвящены монография А. С. Феденко [43] и книга О. Ковальского [23]. В них изложена общая теория обобщенных симметрических пространств. Дальнейшему развитию этой теории в последнее время посвящено значительное число работ. В дальнейшем мы будем использовать терминологию, принятую в [43] и [23].

В работах [32]—[34], [40] и [41] изучены зеркала однородных римановых Ф-пространств и, естественно, редуктивных пространств. Глобальная классификация односвязных периодических пространств с умножением проведена в [35]—[37]. В [38] введено понятие тора пространства с регулярным умножением и получен критерий сопряженности максимальных торов. Контрпример к гипотезе О. Ковальского, сформулированной в книге [23], приведен в статье [39]. Статья [42] посвящена построению семейств инвариантных аффинных связностей на пространствах с периодическим умножением. В статье [27] указаны условия, при выполнении которых пространство с регулярным умножением совпадает со своим центром. Классическое разложение римановых симметрических пространств (см., например, [24]) обобщено на случай римановых регулярных пространств с регулярным умножением в статье [28].

В статье [45] изучены регулярные римановы s-многообразия, у которых степень минимального многочлена симметрического тензорного поля s равна четырем, и указаны S-инвариантные структуры на изучаемых многообразиях. В [47] доказано, что для всякого целого $n \geqslant 3$ существует обобщенное аффинное симметрическое пространство порядка n, диффеоморфное R^{n-2}, компонента единицы его полной группы изометрий разрешима. В [48] и [49] приведена полная классификация односвязных псевдоримановых s-пространств, неразложимых и не являющихся локально симметрическими. В каждом случае найдены соответствующие метрики и системы симметрий. В [57] доказано, что регулярное риманово s-многообразие некомпактного типа не может быть изометрически и эквивариантно погружено в R^N. Статья [58] посвящена изучению n-мерных компактных связных подмногообразий R^N, которые k-симметричны в смысле Ковальского, причем симметрия в каждой точке продолжается до изометрии объемлющего пространства, тождественной на нормальном пространстве. В [60] изучены компактные римановы 3-симметрические пространства, которые не являются келеровыми относительно канонических инвариантных метрик и комплексной структуры. Статьи [62] и [63] посвящены классификации всех обобщенных симметрий в евклидовых пространствах E^3, E^4 и E^5. Теории симметрических пространств некомпактного типа с геометрической точки зрения посвящена статья [59], в которой, наряду с односвязным симметрическим пространством, рассматривается и его компактификация. В [51] вводится класс аффинных симметрических пространств, являющихся паракомплексными аналогами эрмитовых симметрических пространств. Получена классификация пространств этого класса с полупростой фундаментальной группой параголоморфных изометрий. Конкретное симметрическое пространство с унитарной группой движений изучено в статье [49]. Ряд работ ([46], [56], [61]) посвящен изучению подмногообразий симметрических пространств, являющихся симметрическими или локально симметрическими пространствами. Статьи [52] и [54] посвящены классификации четырех- и пятимерных естественно редуктивных пространств. Новый класс симметрических пространств — класс диск-однородных и строго диск-однородных римановых пространств введен в статье [53].

Для локально симметрических пространств этого класса в частных случаях получена классификация этих пространств.

Большая статья Леджера и Разави [55] посвящена общей теории редуцированных Σ-пространств. Общее определение

Σ-пространств и редуцированных Σ-пространств было дано в работе Лооса О. (РЖМат, 1973, 1А421). В статье [55] доказывается теорема, связывающая теорию редуцированного Σ-пространства с теорией Σ-троек (G, H, Σ), где G — группа Ли, Σ — группа Ли автоморфизмов группы Ли G, H — замкнутая подгруппа в G такая, что

$$(G^{\Sigma})_0 \subset H \subset G^{\Sigma},$$

и, кроме того, требуется, чтобы

$$g = h \oplus m.$$

Здесь через G^{Σ} обозначена замкнутая подгруппа группы Ли G, состоящая из элементов группы Ли G, неподвижных при всех $\sigma \in \Sigma$, через g и h обозначены алгебры Ли групп G и H соответственно, и

$$m = \{X - \sigma(X) \mid X \in g, \sigma \in \Sigma\}.$$

Эта теорема обобщает известную теорему в теории симметрических и обобщенно симметрических пространств (см. [43] и [23]).

Н. А. Степанов в ряде статей [27]—[31] развил метод исследования Φ-пространств $Q(\Phi)$, который основан на изучении оснащения $Q(\Phi)$ как вложенного в группу G-подмногообразия. Им введено понятие инвариантного оснащения и показано, что введение инвариантной нормали индуцирует в $Q(\Phi)$ инвариантную аффинную связность. Он выяснил условия существования инвариантного оснащения $Q(\Phi)$ и связь понятия инвариантного оснащения с регулярностью Φ-пространства. В работе [27] Н. А. Степанов ввел понятие оснащения, инвариантного относительно Φ. Следует заметить, что так как

$$s_x(y) = x\Phi(y)\Phi(x^{-1}) = T_x \cdot \Phi(y),$$

то инвариантность относительно Φ есть инвариантность относительно s_x. Естественным представляется обобщение инвариантности относительно Φ на случай инвариантности относительно множества $A \subset \mathrm{End}(G)$ (или, что то же самое, относительно полугруппы $\Gamma = [A]$, порожденной A), что эквивалентно инвариантности оснащения относительно «симметрий» s_x, где

$$s_x = T_x \cdot \Psi, \ \forall \Psi \in A.$$

Естественно, что инвариантность относительно A сводится к инвариантности относительно конкретного s_x (т. е. для конкретного $\Psi \in A$).

Теорема. Если Ψ — гладкий автоморфизм группы Ли G, то в случае регулярности G/H^{Φ} и перестановочности Φ и Ψ, существует Ψ-инвариантное оснащение G/H^{Φ}.

В случае, когда Φ и Ψ не перестановочны, следует рассматривать отображение G/H^{Φ} в $G/\Psi(H^{\Phi})$. В случае регулярности

G/H^{Φ} следует рассматривать отображение инвариантных нормалей.

В случае перестановочности Φ и Ψ будет верной теорема 6 статьи [27] с заменой $d\Phi_e$ на $d\Psi_e$.

Теорема 6 статьи [27] допускает следующее обобщение.

Теорема. Пусть $\Psi \in \mathrm{Aut}(G)$ и Ψ перестановочно с Φ. Если N_e — инвариантная нормаль относительно H^{Φ} в точке $e \in M$, то $d\Psi_e(N_e)$ — также инвариантная нормаль относительно H^{Φ}.

В случае, когда Φ и Ψ не перестановочны, следует рассматривать отображение s_x однородного пространства $Q(\Phi)$ в $Q(\Psi \circ \Phi \circ \Psi^{-1})$.

Теорема. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ и N_e — инвариантная нормаль к $Q(\Phi)$ относительно H^{Φ} в точке $e \in Q(\Phi)$. Тогда $d\alpha_e(N_e)$ — инвариантная нормаль к $Q(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})$ относительно $\alpha(H^{\Phi}) = H^{\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}}$. Так как для отображения s_x, определяемого равенством

$$s_x(y) = x\alpha(y)[\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}](x^{-1}),$$

также имеет место равенство

$$s_x = T_x' \circ \alpha,$$

где

$$T_a(z) = az[(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(a^{-1})],$$

то сформулированная теорема имеет место при замене α на s_x.

Статья [28] посвящена дифференциальному продолжению групп Ли и φ-пространств, и доказывается, что касательное расслоение к группе Ли есть группа Ли; касательное расслоение к φ-пространству есть $T(\varphi)$-пространство, где $T(\varphi)$ — дифференциальное продолжение φ на касательное расслоение. При этом из регулярности φ-пространства следует регулярность его дифференциального продолжения, и наличие инвариантной аффинной связности на φ-пространстве эквивалентно наличию инвариантной аффинной связности на его дифференциальном продолжении. Изучена также связь между оснащениями φ-пространств и их дифференциальных продолжений.

Статья [29] обобщает исследования, проведенные в [28], на более общий случай расширения группы Ли G до полупрямого произведения $K * G$. Указаны критерии, когда свойства регулярности, редуктивности, существования инвариантного оснащения и инвариантной аффинной связности переносятся на φ-пространство — произведение его сомножителей.

Статьи [30] и [31] посвящены изучению φ-пространств, порожденных полными эндоморфизмами, т. е. такими эндоморфизмами φ, что индуцированное ими отображение $xH^{\varphi} \to x\varphi(x^{-1})H^{\varphi}$ является диффеоморфизмом однородного пространства G/H^{φ}.

В статьях [1]—[3] в случае линейных групп Ли изучалось проектирование инвариантной тривиальной связности линейного пространства $\mathrm{gl}\,(n, R)$. В этом случае получены хорошо проверяемые критерии, характеризующие взаимосвязь между индуцированными связностями и инвариантными структурами, введенными ранее Н. А. Степановым — естественным диффеоморфизмом D и почти комплексной структурой (в случае трициклического пространства). Индуцирование левоинвариантных связностей данной группы Ли на ее подгруппу с помощью инвариантных оснащений изучалось в [44].

Статьи [4]—[10] посвящены изучению инвариантных тензоров на симметрических римановых пространствах.

Все последующие параграфы этой статьи являются изложением и дальнейшим продолжением исследований, результаты которых опубликованы в [11]—[22].

§ 2. КАТЕГОРИЯ ГЛОБАЛЬНЫХ И ЛОКАЛЬНЫХ ПАР

Определение 1. Глобальной парой называется пара (G, A), где G — группа Ли, а A — подмножество в $\mathrm{End}\,(G)$ — полугруппе всех гладких эндоморфизмов группы Ли G. Локальной парой будем называть пару (g, A'), где g — алгебра Ли, а A' — подмножество в $\mathrm{End}(G)$ — полугруппе эндоморфизмов алгебры Ли g.

Через $\Gamma=[A]$ обозначим полугруппу, содержащую тождественное отображение и порожденную подмножеством A. Таким образом, для всякой глобальной пары (G, A) определяется глобальная пара (G, Γ). Аналогично, через $\gamma=[A']$ обозначим полугруппу, содержащую тождественное отображение и порожденную подмножеством A'. Очевидно, что глобальная пара (G, A) порождает локальную пару (g, A'), где g — алгебра Ли группы Ли G, а $A'=\{\varphi=d\Phi_e \mid \Phi\in A\}$. Для всякой локальной минимальной пары найдется хотя бы одна порождающая ее глобальная пара.

Определение 2. Глобальная пара (G, A) называется полной, если группа Ли

$$H(A)=\{h\in G \mid \Phi(h)=h,\ \forall\Phi\in A\}$$

дискретна. Локальная пара называется полной, если алгебра Ли

$$h(\gamma)=\{\omega\in g \mid \varphi(\omega)=\omega,\ \forall\varphi\in A'\}$$

равна нулю.

Определение 3. Пусть (G, Γ) и (G', Γ') — глобальны пары, где Γ и Γ' — полугруппы в $\mathrm{End}\,(G)$, содержащие тождественные отображения. Тогда пара $(\alpha, \bar{\alpha})$, где

$$\alpha: G\to G'$$

— гомоморфизм группы Ли, а

$$\bar{\alpha}: \Gamma'\to\Gamma$$

— гомоморфизм полугруппы, называется морфизмом глобальных пар, если выполняются условия

$$\Phi'\circ\alpha=\alpha\circ\bar{\alpha}(\Phi'),\quad \forall\Phi'\in\Gamma'.$$

Композицией морфизмов $(\alpha, \bar{\alpha})$ и $(\beta, \bar{\beta})$ по определению является морфизм $(\alpha\circ\beta, \bar{\beta}\circ\bar{\alpha})$. В результате получаем категорию глобальных пар. Аналогично определяется категория локальных пар.

В случае, когда заданы глобальные пары (G, A) и (G', B), необходимо перейти к соответствующим глобальным парам (G, Γ) и (G', Γ'), где $\Gamma=[A]$, $\Gamma'=[B]$.

Очевидно, что в случае изоморфизма глобальных пар, гомоморфизм α должен быть изоморфизмом, кроме того $\Gamma'=\{\alpha\circ\Phi\circ\alpha^{-1}\,|\,\Phi\in\Gamma\}$, а

$$H(\Gamma')=\alpha(H(\Gamma)).$$

Частный случай. Группа Ли G есть подгруппа группы Ли G', а отображение α есть отображение вложения. В этом случае из условия морфизма для всякого $a\in G$ следует

$$\Phi'(a)=\alpha[\bar{\alpha}(\Phi')(a)]=\bar{\alpha}(\Phi')(a),$$

т. е.

$$\Phi'(G)\subset G,\quad \Phi=\bar{\alpha}(\Phi')=\Phi'|_G.$$

По аналогии с соответствующим определением, в случае Ф-пространств, можно ввести следующее определение.

Определение 4. Пусть (G', A') — глобальная пара, G — подгруппа Ли группы Ли G', удовлетворяющая условию

$$\Phi'(G)\subset G,\ \forall\Phi'\in A'.$$

Тогда пару (G, A), где A состоит из ограничений элементов Φ' на подгруппу G, назовем подпространством глобальной пары (G', A'). Аналогичное определение имеет место и для локальных пар.

Частный случай. Пусть дана глобальная пара (G', A') и α-эндоморфизм группы Ли G', перестановочный со всеми элементами A'. Тогда подгруппа

$$H^{\alpha}=\{h\in G'\,|\,\alpha(h)=h\}$$

обладает свойством $\Phi'(H^{\alpha})\subset H^{\alpha}$, и поэтому определится подпространство (H^{α}, A) глобальной пары (G', A'), где A состоит из ограничений элементов A' на H^{α}.

Во множестве глобальных пар введем отношение эквивалентности: глобальные пары (G, A) и (G', A') будем называть эквивалентными, если существует такой элемент $a\in G$, что

$$\Gamma'=I(a)\circ\Gamma\circ I(a^{-1}),\quad \Gamma=[A],\quad \Gamma'=[A'].$$

Здесь и в дальнейшем через $I(a)$ будем обозначать внутренний автоморфизм группы Ли G, определенный элементом $a\in G$.

Смысл этого определения эквивалентности состоит в том, что если задано подмножество $B \subset A$, то соответственно определится подмножество $B' = I(a) \circ B \circ I(a^{-1})$, а также подгруппы

$$H(B) = \{h \in G \mid \Phi(h) = h, \forall \Phi \in B\}$$

и

$$H(B') = \{h' \in G \mid [I(a) \circ \Phi \circ I(a^{-1})](h') = h'\} = aH(B)a^{-1}.$$

Однородные пространства $G/H(B)$ и $G/H(B')$ будут изоморфными фактор-пространствами, отличающимися только отмеченными точками H и aH.

Замечание. Наряду с подгруппами $H(B)$ часто рассматриваются подгруппы H, удовлетворяющие условию

$$H_0(B) \subset H \subset H(B),$$

где через $H_0(B)$ обозначена связная компонента единицы группы $H(B)$. Ясно, что $H' = aHa^{-1}$.

Для всякой пары (G, A) определится ее дифференциальное продолжение $(\overline{G}, \overline{A})$, где $\overline{G}$ — дифференциальное продолжение группы Ли G, а $\overline{A}$ состоит из дифференциальных продолжений $\overline{\Phi}$ эндоморфизмов Φ-элементов множества A. Напомним (см. [19]), что

$$\overline{G} = \underline{G} * G = \{(\omega, a) \mid \omega \in \underline{G}, a \in G\},$$

т. е. $\overline{G}$ является полупрямым произведением группы Ли G на ее алгебру Ли $\underline{G}$, считая, что G действует в $\underline{G}$ при помощи присоединенного представления группы Ли G. Эндоморфизм $\overline{\Phi}$ определяется (см. [19]) равенством

$$\overline{\Phi}(\omega, a) = (\varphi(\omega), \Phi(a)),$$

где

$$\varphi = d\Phi_e.$$

Теорема. Дифференциальное продолжение полной глобальной пары есть полная глобальная пара.

Доказательство.

$$\overline{\Phi}(a, \omega) = (a, \omega) \Leftrightarrow \Phi(a) = a, \varphi(\omega) = \omega \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{H}^A = \{(h, 0) \mid h \in H^A\},$$

ибо алгебра Ли

$$h^A = H^A = \{0\}.$$

Отметим, что для группы $\overline{G}$ определится канонический идемпотентный эндоморфизм Φ_0, который определяется равенством

$$\Phi_0(\omega, h) = (0, h),$$

и для него определится соответствующее однородное пространство

$$Q(\Phi_0)=\{x_0=(\omega, a)[\Phi_0(\omega, a)^{-1}] \mid \omega\in\underline{G},\ a\in G\}=\{(\omega, 0) \mid \omega\in\underline{G}\},$$

в котором группа Ли G действует по закону

$$T_{\bar a}(\omega)=\mathrm{Ad}(a)\omega+\omega_0,\quad \bar a=(\omega, a)\in\overline{G}.$$

Однородное пространство $Q(\Phi_0)$ в работах Б. А. Розенфельда называется базисным пространством.

Кроме того, эндоморфизм Φ_0 перестановочен со всяким $\overline{\Phi}$, что согласуется с тем, что

$$\overline{\Phi}(\underline{G}*\{e\})\subseteq\underline{G}*\{e\},$$

$$\overline{\Phi}(\{0\}\times G)\subseteq\{0\}*G.$$

Ограничение $\overline{\Phi}$ на группу Ли $\{0\}*G=\Phi_0(\overline{G})$, которую можно отождествить с G, совпадает с Φ, а ограничение $\overline{\Phi}$ на $\underline{G}*\{0\}$ (отождествляемое с $\underline{G}$) совпадает с φ. Отметим, что $\underline{G}*\{0\}=\rho(\overline{G})$, где

$$\rho(\bar a)=\bar a\Phi_0(\bar a^{-1}).$$

§ 3. G-ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ ГЛОБАЛЬНОЙ ПАРОЙ (G, A)

В этом параграфе мы все время будем считать, что задана глобальная пара (G, A) и соответствующая полугруппа $\Gamma=[A]$.

В качестве основного объекта, изучаемого в этой статье, рассмотрим множество $G_0=\mathrm{Map}[A\to G]$, т. е. множество всех отображений

$$f: A\to G: \Phi\to f(\Phi).$$

Как известно, множество G_0 является группой относительно естественной операции умножения, определяемой равенствами

$$f\circ f_1(\Phi)=f(\Phi)\cdot f_1(\Phi),\quad f^{-1}(\Phi)=[f(\Phi)]^{-1}.$$

Единичным элементом этой группы является постоянное отображение e_0 в единицу группы G.

Для группы G_0 естественным способом определяется эндоморфизм

$$\gamma: G_0\to G_0: f\to\gamma(f),$$

$$\gamma(f)(\Phi)=\Phi[f(\Phi)],\quad \forall\Phi\in A,\ f\in G_0. \tag{1}$$

Эндоморфизм γ допускает обобщение в следующем плане.

Сначала определяется произвольное отображение

$$\bar{\gamma}_0 : A \to \mathrm{End}(G),$$

где через $\mathrm{End}(G)$ обозначено множество всех гладких эндоморфизмов группы Ли G. После этого задается отображение $\bar{\gamma}$ равенством

$$\bar{\gamma}(f)(\Phi) = \bar{\gamma}_0(\Phi)[f(\Phi)]. \tag{2}$$

Это отображение также является эндоморфизмом группы G_0, и целесообразность введения этого отображения будет выяснена позднее. Отметим, что в частном случае $\bar{\gamma}_0 = \mathrm{Id}$ получим эндоморфизм γ, введенный ранее, а в случае, когда γ_0 — постоянное отображение, т. е. когда $\bar{\gamma}_0(A) = \alpha \in \mathrm{End}(G)$, получим

$$\bar{\gamma}(f) = \alpha \circ f.$$

Для пары (G_0, γ) стандартным способом определяется отображение

$$\rho : G_0 \to G_0 : f \to \rho(f),$$

где

$$\rho(f)(\Phi) = f(\Phi)[\Phi \circ f]^{-1}(\Phi). \tag{3}$$

В множестве $\rho(G_0)$ определяется структура G_0-пространства отображением

$$\tilde{\rho} : G_0 \times \rho(G_0) \to \rho(G_0) : (f, \rho(f_0) \to \rho(f \circ f_0) = T_f[\rho(f_0)].$$

Таким образом, $\rho(G_0)$ будет однородным G_0-пространством,

$$T_f[\rho(f_0)](\Phi) = f(\Phi) \cdot \rho(f_0)\Phi[f(\Phi^{-1})].$$

Структура G_0-пространства может быть введена на множестве G_0 отображением

$$\tau : G_0 \times G_0 \to G_0 : (f, f_0) \to T_f(f_0),$$

где

$$T_f(f_0)(\Phi) = f(\Phi) f_0(\Phi) \Phi[f(\Phi)^{-1}]. \tag{4}$$

В этом G_0-пространстве $\rho(G_0)$ будет орбитой, содержащей единицу e_0 группы G_0.

В группе G_0 имеется подгруппа, состоящая из постоянных отображений, которая изоморфна группе Ли G, и ее будем обозначать через G. Задание элемента $f \in G$ эквивалентно заданию элемента $a = f(\Phi) \in G$, и действие группы Ли G в G_0 описывается равенством

$$T_a(f)(\Phi) = af(\Phi)\Phi(a^{-1}), \quad a \in G. \tag{5}$$

Легко видеть, что G инвариантно относительно действия группы Ли G, и ограничение действия группы Ли G на G описывается равенством

$$T_a(x)=ax\Phi(a^{-1}),\ x\in G,\ a\in G,\ \forall\Phi\in A.$$

Важным частным случаем является случай одноэлементного множества A. В этом случае G_0 можно отождествить с G, и соответствующее G-пространство обозначим через $G(\Phi)$. Структура G-пространства в $G(\Phi)$ описывается отображением

$$G\times G(\Phi)\to G(\Phi):(a,x)\to ax\Phi(a^{-1}),\ x=f(\Phi)\in G.$$

Орбитой единичного элемента $e\in G$ будет в этом случае $\rho(G)$, и эту орбиту обозначим через $Q(\Phi)$.

Другим частным, более общим, случаем является случай конечного множества $A=\{\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_n\}$. В этом случае

$$G_0=\underbrace{G\times G\times\dots\times G}_{n},\quad G=\operatorname{diag}G_0,$$

$$\gamma=\Phi_1\circ\Phi_2\circ\dots\circ\Phi_n;$$

$$\rho(G_0)=Q(\Phi_1)\times Q(\Phi_2)\times\dots\times Q(\Phi_n);$$

$$f=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\,|\,a_i\in G\};$$

$$\rho(f)=\{(x_1,x_2,\dots,x_n\,|\,x_i=a_i\Phi_i(a_i^{-1}),\ a_i\in G\},$$

$$T_f(x_1,x_2,\dots,x_n)=(a_1x_1\Phi_1(a_1^{-1}),\ a_2x_2\Phi_2(a_2^{-1}),\ \dots,\ a_nx_n\Phi_n(a_n^{-1})).$$

Если $f\in G$, т. е. $f(A)=(a,a,\dots,a)\equiv a\in G$, то (4) влечет

$$T_f(x_1,x_2,\dots,x_n)=T_a(x_1,x_2,\dots,x_n)=$$
$$=(ax_1\Phi_1(a^{-1}),\ ax_2\Phi_2(a^{-1}),\dots,ax_n\Phi_n(a^{-1})).$$

G-орбиту с начальным элементом e_0 обозначим через $Q(A)$. Ясно, что

$$Q(A)=\{(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)\,|\,x_i=a\Phi_i(a^{-1}),\ a\in G\}.$$

Замечание. Введенные здесь понятия обобщают соответствующие понятия, введенные в статье [16] для частного случая, когда полугруппа Γ является конечной абелевой группой, все элементы которой инволютивны.

Определение. Через $S(A)$ обозначим множество отображений $f\in G_0$, которые могут быть продолжены до отображения

$$f:\Gamma\to G,\ \Gamma=[A],$$

так, чтобы выполнялось условие

$$f(\Phi\circ\Psi)=f(\Phi)\Phi[f(\Psi)],\ \forall\Phi,\ \Psi\in\Gamma. \tag{6}$$

Теорема. $S(A)$ — инвариантная часть G-пространства G_0. Отсюда следует, что $S(A)$ есть G-пространство с индуцированной G-структурой.

Из равенства (6) непосредственно следует, что

$$f(\Phi_1\circ\Phi_2\circ\ldots\circ\Phi_n)=$$
$$=f(\Phi_1)\cdot\Phi_1[f(\Phi_2)]\ldots(\Phi_1\circ\Phi_2\circ\ldots\circ\Phi_{n-1})[f(\Phi_n)]. \qquad (7)$$

Это равенство выполняется для любого $f\in S(A)$. Легко также установить, что $f\in S(A)$ влечет $f(\mathrm{Id})=e$, и, следовательно, всякое постоянное отображение принадлежит $S(A)$ тогда и только тогда, когда $f=e_0$. Орбитой отображения e_0 является $Q(A)$, и из сформулированной выше теоремы о G-инвариантности $S(A)$ следует, что

$$Q(A)\subset S(A),$$

однако примеры показывают, что $S(A)$ в общем случае не будет однородным пространством, т. е. не будет совпадать с $Q(A)$.

При $\Phi_1=\Phi_2=\ldots=\Phi_n$ равенство (7) дает

$$f(\Phi^n)=f(\Phi)\Phi[f(\Phi)]\ldots\ \Phi^{k-1}[f(\Phi)].$$

В случае периодического автоморфизма Φ группы G и $f\in S(A)$ будем иметь

$$x\Phi(x)\ldots\Phi^{k-1}(x)=e,\ \ x=f(\Phi).$$

Отсюда уже следует, что $S(A)$ в общем случае не совпадает с G_0.

Если $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ — перестановочные эндоморфизмы из A, то для f выполняется условие

$$f(\Phi_1)\Phi_1[f(\Phi_2)]\ldots(\Phi_1\circ\Phi_2\circ\ldots\circ\Phi_{n-1})[f(\Phi_n)]=$$
$$=f(\Phi_{\sigma(1)})\Phi_{\sigma(1)}[f(\Phi_{\sigma(2)})]\ldots(\Phi_{\sigma(1)}\circ\ldots\circ\Phi_{\sigma(k-1)})[f(\Phi_{\sigma(k)})].$$

Теорема. При любом $f\in G_0$ отображение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\to x_1\Phi_1(x_2)\ldots(\Phi_1\circ\Phi_2\circ\ldots\circ\Phi_{n-1})(x_n)$; $x_i=f(\Phi_i)$ является морфизмом G-пространства $G(\Phi_1)\times G(\Phi_2)\times\ldots\times G(\Phi_n)$ в G-пространство $G(\Phi_1\circ\Phi_2\circ\ldots\circ\Phi_n)$.

Предположим теперь, что фиксировано отображение $f_0\in G_0$. Тогда для орбиты

$$O_{f_0}=\{T_a(f_0)\,|\,a\in G\}$$

определится ее правый сдвиг

$$R_{f_0^{-1}}(O_{f_0})=\{T_a(f_0)f_0^{-1}\,|\,a\in G\}.$$

Это множество, очевидно, содержит единичный элемент $e_0\in G_0$, и легко установить, что

$$R_{f_0^{-1}}(O_{f_0})=Q(A'),$$

где $Q(A')$ определено глобальной парой (G, A'), в которой

$$A'=\{\Phi_{x_0}=I(x_0)\circ\Phi\,|\,\Phi\in A\}.$$

Здесь через x_0 обозначен элемент $f_0(\Phi)\in G$.

G-пространства $O\ f_0$ и $Q(A')$, изоморфны, причем правый сдвиг $R_{f_0^{-1}}$ есть отображение изоморфизма.

Отсюда следует, что для всякой орбиты O_{f_0} имеется ей изоморфная орбита $Q(A')$, которая содержит единичный элемент $e_0 \in G_0$. Таким образом, соответствующим изменением подмножества $A \in \mathrm{End}(G)$ можно всегда перейти от орбиты O_{f_0} к орбите $Q(A')$ единичного элемента $e_0 \in G_0$, которая будет изоморфна первоначальной. В частности, в случае одноэлементного множества $A=\{\Phi\}$, однородное пространство

$$O_{f_0}=\{x=ax_0\Phi(a^{-1})\,|\,a\in G\},\ x_0=f_0(\Phi),$$

изоморфно однородному пространству $Q(\Phi_{x_0})$, где $\Phi_{x_0}=I(x_0)\circ\Phi$.

В случае конечного множества $A=\{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\}$ однородное пространство

$$Q_{f_0}=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,|\,x_i=ax_i\Phi_i(a^{-1}),\ a\in G\}$$

изоморфно однородному пространству

$$Q(A')=\{(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,|\,y_i=x_i(x_i^0)^{-1}\}=$$
$$=\{(y_1, y_2, \ldots, y_n)\,|\,y_i=a\Phi_{x_i^0}(a^{-1}),\ a\in G\},\ \Phi_{x_i^0}=I(x_i^0)\circ\Phi.$$

Замечание. При установлении изоморфности соответствующих пространств учитывается, что законы преобразования в O_{f_0} и $Q(A')$ различны и определяются заданием соответствующих элементов множеств A и A'.

Так как свойства изоморфных пространств изоморфны, то при установлении каких-либо свойств этих пространств достаточно установить их для одного из изоморфных пространств. Но эти свойства часто определяются свойствами множеств A (соответственно A'). Например, симметрические пространства характеризуются тем, что A состоит из одного инволютивного автоморфизма; периодические пространства получаются тогда, когда A состоит из одного периодического автоморфизма. В общем случае, для A или для $\Gamma=[A]$ (для A' или для $\Gamma=[A']$) может иметь место какое-либо тождество.

Для G-пространства $S(A)$ разбиение на орбиты, одной из которых является $Q(A)$, есть переход от начального элемента e_0, орбитой которого является $Q(A)$, к другому начальному элементу $f_0 \in S(A)$ и к соответствующей орбите Q_{f_0}, что с точностью до изоморфизма эквивалентно переходу к орбите $Q(A')$. Но $Q(A')$ полностью определяется заданием множества

$$A'=\{\Phi_{f_0(\Phi)}\,|\,\Phi\in A\},\quad \Phi_{f_0(\Phi)}=I[f_0(\Phi)]\circ\Phi.$$

G-пространство $S(A)$ есть объединение орбит O_{f_0}, $f_0 \in S(A)$, каждая из которых изоморфна орбите $Q(A')$, где

$$A'=\{\Phi_{f_0(\Phi)}\,|\,\Phi\in A\},$$
$$\Phi_{f_0(\Phi)}=I[f_0(\Phi)]\circ\Phi.$$

Поэтому можно полагать (с точностью до изоморфизма), что

$$S(A)=\bigcup_{f_0\in S(A)} Q(A').$$

Важной является

Теорема. Пусть для эндоморфизмов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k, \Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_e$ выполняется тождество

$$\Phi_1\circ\Phi_2\circ\ldots\circ\Phi_k=\Psi_1\circ\Psi_2\circ\ldots\circ\Psi_e. \tag{8}$$

Тогда, если $f_0\in S(A)$, то для эндоморфизмов

$$I[f_0(\Phi_1)]\circ\Phi_1, \quad I[f_0(\Phi_2)]\circ\Phi_2, \ldots, I[f_0(\Phi_k)]\circ\Phi_k,$$

$$I[f_0(\Psi_1)]\circ\Psi_1, \quad I[f_0(\Psi_2)]\circ\Psi_2, \ldots, I[f_0(\Psi_e)]\circ\Psi_e$$

также выполняется тождество (8), т. е. имеет место

$$I[f_0(\Phi_1)]\circ\Phi_1\circ\ldots\circ I[f_0(\Phi_k)]\circ\Phi_k=I[f_0(\Psi_1)]\circ\Psi_1\circ\ldots\circ I[f_0(\Psi_e)]\circ\Psi_e.$$

Из сформулированной теоремы следует, что всякое свойство глобальной пары (G, A), описанное тождествами, имеющими место для полугруппы Г и характеризующими однородное пространство $Q(A)$, немедленно переносится на все орбиты G-пространства $S(A)$. В частности, если множество A содержит только один элемент Φ, то получим утверждение: если однородное пространство $Q(\Phi)$ симметрическое (периодическое), то и все орбиты в $S(A)$ также симметрические (периодические).

§ 4. МОРФИЗМЫ G-ПРОСТРАНСТВ. СИММЕТРИИ G-ПРОСТРАНСТВ. СТРУКТУРА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Как показано в статье [16], для того, чтобы изучать геометрические образы однородных пространств, и для построения специальных морфизмов и инвариантов G-пространств, следует изучать морфизмы вида:

$$s: M\times N\to P: (x, y)\to s(x, y),$$

где N — однородное пространство с отмеченной точкой $p\in N$, а M и P — произвольные G-пространства. Для построения таких морфизмов полезна следующая, легко проверяемая, лемма.

Лемма. Для определения морфизма s необходимо и достаточно задать H_p-морфизм

$$s_p: M\to P: y\to s_p(y),$$

где H_p — стационарная подгруппа точки $p\in N$, и считается, что в M и P действие группы G ограничено до действия ее подгруппы H_p. Если $x=T_b(p)$, p — произвольный элемент однородного пространства N, то само отображение морфизма s определяется следующим равенством

$$s(x, y)=T_b\circ s_p\circ T_{b^{-1}}(y). \tag{9}$$

Приведем примеры применения сформулированной нами леммы.

1. $N=Q(\Phi)$, $M=G(\Phi)$, $P=G(\mathrm{Id})$, $p=e$, $H_p=H^{\Phi}$.

В этом случае полагаем

$$s_e(y)=y,$$

и s_e, очевидно, является H_p-морфизмом G-пространства. Тогда

$$s(x, y)=yx^{-1}. \tag{10}$$

2. $N=Q(\Phi)$, $M=P=G(\Phi)$, $p=e$, $H_p=H^{\Phi}$.

Полагаем

$$s_e(y)=\Phi(y).$$

Соответственно определится морфизм s, который подсчитывается по формуле (9) и определяется равенством

$$s(x, y)=x\Phi(y)\Phi(x^{-1}).$$

3. $N=Q(\alpha)$, $M=G(\Phi)$, $P=G(\Phi)$,

эндоморфизмы α и Φ перестановочны, $p=e$, $H_p=H^{\alpha}$. Здесь положим

$$s_e(y)=\alpha(y).$$

Соответственно подсчитывается s, и

$$s(x, y)=x\alpha(y)\Phi(x^{-1}). \tag{11}$$

4. $N=Q(\alpha)$, $M=G(\Phi)$,

но α и Φ не перестановочны. В этом случае можно также положить $p=e$, и

$$s_e(y)=\alpha(y).$$

Но оказывается, что в этом случае s_e будет морфизмом из M в $G(\alpha\circ\Phi\circ\alpha^{-1})$. Полагая $P=G(\alpha\circ\Phi\circ\alpha^{-1})$, получаем, что

$$s(x, y)=x\alpha(y)\,[(\alpha\circ\Phi\circ\alpha^{-1})(x^{-1})].$$

5. $N=Q(\alpha)$, $M=G(\Phi)$, $P=G(\mathrm{Id})$, $p=e$,

а α и Φ перестановочны. В этом случае, полагая

$$s_e(y)=y\alpha(y^{-1}),$$

получим

$$s(x, y)=y\Phi(x)\alpha(y^{-1})x^{-1}. \tag{12}$$

Замечание. Приведенные нами примеры морфизмов s можно разделить на два класса. К первому классу относятся морфизмы в примерах 1 и 5. Они отличаются тем, что при фиксировании x отображение

$$s_x : N\to P : y\to s(x, y)$$

переводит однородное пространство N в неоднородное пространство (в общем случае). Напротив, в примерах 2, 3 и 4 образом $N=Q(\alpha)$ при отображении s_x будет орбита $Q(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})$. Поэтому примеры 1 и 5 не могут быть обобщены на случай, когда изучаются отображения однородных пространств более общего вида, чем изученные ранее. В случае примеров 2, 3 и 4 такое обобщение возможно способом, который дается в последующих примерах 6 и 7.

6. $N=Q(\alpha)$, $M=G/H$, $P=G/\alpha(H)$, $p=e$, $H_p=H^\alpha$,

где

$$H_0^\Phi \subset H \subset H^\Phi.$$

Здесь Φ—эндоморфизм группы Ли G также как и α, а через H_0^Φ обозначена связная компонента единицы группы Ли H^Φ. В этом случае для $y=aH\in G/H$ положим

$$s_e(y)=\alpha(a)\alpha(H),$$

и тогда

$$s(z, y)=z\cdot\alpha(a)\alpha(H),$$

где

$$z=b\cdot\alpha(b^{-1})\in Q(\alpha).$$

7. $N=G/H_1$, $M=G/H$, $P=G/\alpha(H)$,

где

$$H_0^\alpha \subset H_1 \subset H^\alpha, \quad H_0^\Phi \subset H \subset H^\Phi.$$

В этом случае, используя канонический морфизм

$$\pi : G/H_1 \to Q(\alpha) : bH_1 \to b\alpha(b^{-1})=z,$$

определим для $x=bH_1$, $y=aH$

$$s(x, y)=s(\pi(x), y)=z\cdot\alpha(a)\cdot\alpha(H).$$

Осталось лишь заметить, что $\alpha(H)=H^{\alpha\circ\Phi\circ\alpha\circ\Phi^{-1}}$ Для того, чтобы получить дальнейшие обобщения, можно применить полученные морфизмы к тому случаю, когда задана глобальная пара (G, A), и на ее основе построены пары (G_0, γ) и $(G_0, \bar\gamma)$, которые определены в § 2.

8. Используя пример 1 и отображения γ и $\bar\gamma$, определенные в (1) и (2), для пары (G, A) определим однородные пространства

$$Q_0(\gamma)=\{g=f\cdot\gamma(f^{-1}) \mid f\in G_0\};$$

$$Q_0(\bar\gamma)=\{g=f\bar\gamma(f^{-1}) \mid f\in G_0\}.$$

Соответственно определится морфизм

$$s: Q_0(\bar\gamma)\times Q_0(\bar\gamma)\to G_0(\mathrm{Id}):(f, g)\to gf^{-1}.$$

9. Аналогично строим морфизм (на основе примера 4)

$$s: Q_0(\overline{\gamma}) \times Q(\overline{\gamma}_1) \to Q_0(\overline{\gamma}_1 \circ \overline{\gamma} \circ \overline{\gamma}_1^{-1}) : (f, g) \to$$

$$\to s(f, g) = g\overline{\gamma}(f)[(\overline{\gamma}_1 \circ \overline{\gamma} \circ \overline{\gamma}_1^{-1})(g^{-1})].$$

Здесь всюду вместо Q_0 можно поставить G_0.

Отметим, что s является G_0-морфизмом, и, тем более, s будет G-морфизмом, где G рассматривается как подгруппа G_0, состоящая из постоянных отображений A в G.

В случае, когда A — конечное множество, т. е. $\Gamma = [A]$ — конечно порожденное множество, будем иметь

$$A = \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n\};$$

$$\gamma_0(A) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}, \ \alpha_i = \gamma_0(\Phi_i) \in \mathrm{End}(G).$$

Здесь

$$G_0 = \underbrace{G \times G \times \ldots \times G}_{n} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in G\};$$

$$Q_0(A) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i = a_i \Phi_i(a^{-1}), a \in G\};$$

$$\overline{\gamma}[(a_1, a_2, \ldots, a_n)] = [\alpha_1(x_1), \alpha_2(x_2), \ldots, \alpha_n(x_n)],$$

и тогда

$$s[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (a_1, a_2, \ldots, a_n)] =$$

$$= x_1\alpha_1(a_1)[(\alpha_1 \circ \Phi_1 \circ \alpha_1^{-1})(x_1^{-1})], \ x_2\alpha_2(a_2)[(\alpha_2 \circ \Phi_2 \circ \alpha_2^{-1})(x_2^{-1})], \ldots$$

$$\ldots, x_n\alpha_n(a_n)[(\alpha_n \circ \Phi_n \circ \alpha_n^{-1})(x_n^{-1})].$$

10. Также как в примерах 6 и 7, можно определить отображение однородных G-пространств G/H в G/H_1, используя морфизмы примера 9. Для этого следует сначала ограничить действие группы G_0 до действия группы G в $Q_0(\gamma)$ и в $Q_0(\overline{\gamma})$. Соответствующие орбиты единичного элемента $e_0 \in G_0$ обозначим через $\overline{Q}_0(\gamma)$ и $\overline{Q}_0(\overline{\gamma})$. Стационарной группой единичного элемента в $\overline{Q}(\gamma)(\overline{Q}_0(\overline{\gamma}))$ будет подгруппа $H(A)(H_1(A))$ группы Ли G, определяемая равенствами

$$H(A) = \{h \in G \mid \Phi(h) = h, \forall \Phi \in A\};$$

$$H_1(A) = \{h_1 \in G \mid \alpha_1(h_1) = h_1, \forall \alpha_1 \in \overline{\gamma}_0(\Phi), \ \Phi \in G\}.$$

Далее следует определить подгруппы $H(H_1)$, удовлетворяющие условиям

$$H_0(A) \subset H \subset H(A);$$

$$[H_1(A)]_0 \subset H_1 \subset H_1(A),$$

где индекс $_0$, как и ранее, означает переход к связной компоненте единицы группы Ли $H_1(A)$. После этого следует воспользоваться полученной ранее формулой и записать соответствующий морфизм

$$s\ \ : G/H_1 \times G/H \to G/H',$$

где

$$[H(\bar{\gamma}_0 \circ A \circ \bar{\gamma}_0^{-1})]_0 \subset H' \subset H(\bar{\gamma}_0 \circ A \circ \bar{\gamma}_0^{-1}).$$

В частности, когда $\gamma_0(A) = \alpha$, будем иметь следующее отображение

$$s : G/H_1 \times G/H \to G/\alpha(H) : (bH_1, aH) \to z \cdot \alpha(a) \cdot \alpha(H),$$

где, как и ранее,

$$z = b \cdot \alpha(b^{-1}) \in Q(\alpha).$$

Отметим, что подобный, но не совпадающий с ним, морфизм использовался в статье [55].

Введем обозначения, принятые в частных случаях в современной литературе. Если дано $z \in G(\alpha)$, то определится отображение

$$s_z : G(\Phi) \to G(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}) : x \to s(z, x) =$$
$$= z \cdot \alpha(x)[(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(z^{-1})],$$

и положим

$$s(z, x) = z * x.$$

Будем называть $z * x$ произведением элементов $z \in G(\alpha)$ на элемент $x \in G(\Phi)$. Следовательно,

$$z * x = z \cdot \alpha(x^{-1})[(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(z^{-1})]. \qquad (13)$$

Теорема. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "f"'] & \alpha \circ A \circ \alpha^{-1} \arrow[d, "s_z(f)"] \\ G \arrow[r, "s_z"] & G \end{tikzcd},$$

где

$$\bar{\alpha}(\Phi) = \alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}.$$

Если $f \in S(A)$, то $s_z(f)$ принадлежит $S(\alpha \circ A \circ \alpha^{-1})$ и

$$s_z[Q(A)] \subset Q(\alpha \circ A \circ \alpha^{-1}).$$

В частном случае, когда $\alpha \circ \Phi = \Phi \circ \alpha$, всегда $s_z[Q(\Phi)] = Q(\Phi)$. В этом случае можно искать точки, неподвижные при этом отображении, т. е. такие элементы $x \in Q(\Phi)$, что

$$s_z(x) = z * x = x \Leftrightarrow z\alpha(x) = x\Phi(z). \qquad (14)$$

Теорема. Подмножество

$$R = \{(z, x) \mid s_z(x) = x\}$$

— инвариантная часть G-пространства $Q(\alpha) \times Q(\Phi)$.

Условие (14) введено в статье [16], в которой также введены подмножества

$$M_z = \{x \in Q(\Phi) \mid s_z(x) = x\},$$

которые инвариантны относительно действия стационарной подгруппы H_z элемента $z \in Q(\alpha)$ (как G-пространства). Но в общем случае, как видно из примеров, приведенных ниже, M_z не является H_z-орбитой.

Теорема. Множество M_z является H_z-орбитой при любом $z \in Q(\alpha)$ только тогда, когда множество R является G-орбитой.

В общем случае, т. е. в случае неперестановочных эндоморфизмов, можно искать неподвижные точки в G_0, т. е. такие отображения $f \in G_0$, для которых выполняется условие

$$s_z(f) = f,$$

что эквивалентно равенству

$$z \cdot \alpha[f(\Phi)] \cdot [(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(z^{-1})] = f(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}). \tag{15}$$

Оказывается, что это условие будет выполняться, если $\alpha \in A$ и $f \in S(A)$. Если же $f \notin S(A)$, то условие (14) выделяет в $Q(\alpha) \times G_0$ G-инвариантное подмножество, которое также обозначим через R. Таким образом,

$$R = \{(z, f) \mid z \cdot \alpha[f(\Phi)] = f(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}) [(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})(z)]\}.$$

Введенное нами произведение элементов $z * x$ и отображение s_z обобщают соответствующее произведение, введенное в работах [23] и [16] в частных случаях, когда $\alpha = \Phi$, или в случае перестановочности α и Φ и дополнительной их инволютивности.

Важной является следующая

Теорема. Если $z \in Q(\alpha)$, $x \in Q(\Phi)$, $y \in Q(\Psi)$ (или же $z \in G(\beta)$, $x \in G(\alpha)$, $y \in G(\Phi)$), то имеет место

$$z * (x * y) = (z * x) * (z * y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s_z(x * y) = [s_z(x)] * [s_z(y)].$$

Точнее, если через π обозначать отображение, описывающее $*$, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
G(\Phi) \times G(\Psi) \arrow[r, "s_z"] \arrow[d, "\pi"'] & G(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1}) \times G(\alpha \circ \Psi \circ \alpha^{-1}) \arrow[d, "\pi"] \\
G(\Phi \circ \Psi \circ \Phi^{-1}) \arrow[r] & G(\alpha \circ \Phi \circ \Psi \circ \Phi^{-1} \circ \alpha^{-1})
\end{tikzcd}$$

В частном случае совпадения Φ и Ψ, т. е. в случае, когда $G(\Phi) = G(\Psi)$, а операция $*$ является идемпотентным умножением в $G(\Phi)$ (соответственно в $G(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})$), теорема может быть сформулирована следующим образом:

Отображение s_z является гомоморфизмом пространств с идемпотентным умножением. Если, кроме того, α и Φ перестановочны, т. е. в случае, когда $G(\alpha\circ\Phi\circ\alpha^{-1})=G(\Phi)$, отображение s_z будет эндоморфизмом пространства с идемпотентным умножением. Отметим также, что всегда

$$x*x=x,\ \forall x\in G(\Phi),$$

и, в частности $e*e=e$, что согласуется с тем, что умножение идемпотентно.

Предположим теперь, что $z\in Q(\alpha)$, $u\in Q(\alpha)$, тогда верна следующая

Теорема. Если α — автоморфизм группы Ли G, то отображение s_u обратимо, и

$$s_u^{-1}\circ s_z=T_a,\quad a=\alpha^{-1}(u^{-1}z),$$

где через T_a обозначено преобразование $Q(\Phi)$, определенное элементом $a\in G$ в G-пространстве $Q(\Phi)$.

Отметим, что теорема остается верной, если $Q(\alpha)$ и $Q(\Phi)$ заменить на $G(\alpha)$ и $G(\Phi)$ соответственно.

В частном случае инволютивного автоморфизма α будем иметь

$$s_z\circ s_u=T_a,\ a=z\alpha(u).$$

Если же отображение $f:\alpha\to z$ принадлежит $S(A)$, т. е. если

$$z\alpha(z)=e,$$

то s_z — инволютивное отображение при всяком Φ.

Топологическое замыкание (в группе Ли G) группы, порожденной преобразованиями $T_a=s_z\circ s_u^{-1}$, z, $u\in Q(\alpha)$, будет замкнутой подгруппой Ли группы Ли G. Как показывают примеры, эта группа не будет совпадать с G и даже может действовать интранзитивно в $Q(\Phi)$.

Если α является внутренним автоморфизмом $I(b)$ группы Ли G, то

$$Q(\Phi)=\{x=\rho(a)=a\Phi(a^{-1})\,|\,a\in G\},$$
$$Q(\alpha\circ\Phi\circ\alpha^{-1})=\{y=ax_0\Phi(a^{-1})x_0^{-1}\,|\,a\in G\},$$

где

$$x_0=\rho(b)=b\Phi(b^{-1})\in Q(\Phi).$$

Отсюда следует, что в этом случае однородные пространства $Q(\Phi)$ и $Q(\alpha\circ\Phi\circ\alpha^{-1})$ изоморфны и отображение изоморфизма задается отображением изоморфизма

$$f:x=\rho(a)\to\rho(ab)x_0^{-1}=y.$$

Эндоморфизмы α и Φ будут перестановочными только в том случае, когда $\rho(b)$ принадлежит центру группы Ли G (изоморфизм f — тождественное отображение). Считая полученный изоморфизм отождествлением G-пространств, можно полагать, что (с точностью до изоморфизма) отображение s_z является отображением $Q(\Phi)$ в себя, а неподвижные элементы этого отображения, с учетом отождествления, определяются из условий

$$s_z(x)=f(x) \Leftrightarrow zbxb^{-1}=f(x)z.$$

Совершенно аналогично изучаются морфизмы однородных фактор-пространств, определенные в примере 8. Здесь, следуя терминологии, принятой в монографии [23], будем называть Φ-пространством тройку (G, H, Φ), где G — группа Ли, Φ — эндоморфизм группы Ли G, а H — замкнутая подгруппа группы Ли G; удовлетворяющая условию

$$H_0^\Phi \subset H \subset H^\Phi.$$

Фактор-пространство G/H также называется Φ-пространством. Будем рассматривать два Φ-пространства (G, H, Φ) и (G, H_1, α). Соответственно определится морфизм

$$s: G/H_1 \times G/H \to G/\alpha(H): (bH_1, aH) \to z\alpha(a)\alpha(H)=s_z(bH),$$

где $z=b\alpha(b^{-1})\in Q(\alpha)$.

Вводя и здесь обозначение

$$s(\bar{z}, x)=\bar{z}*x,$$

где $\bar{z}=bH_1$, $x=aH$, получим следующие результаты.

Теорема. Отображение s_z сохраняет произведение, т. е.

$$s_z(x*y)=[s_z(x)]*[s_z(y)].$$

Если α — автоморфизм группы Ли G, то отображение s_z обратимо, причем

$$s_z^{-1}=s_{z_1}, \quad z=aH_1, \quad z_1=a\alpha^{-1}(H_1)$$

и, таким образом, s_z является изоморфизмом пространств с умножением.

Теорема. Если $z=aH_1\in G/H_1$, $u=a_1H_1\in G/H_1$, где

$$H_0^\alpha \subset H_1 \subset H^\alpha,$$

причем, α — автоморфизм группы Ли G, то имеет место равенство

$$s_u^{-1}\circ s_z=T_c,$$

где c определяется заданием элементов $z_1=a\alpha(a^{-1})$ и $u_1=a_1\alpha(a_1^{-1})$.

Замечание. В случае, когда α является внутренним автоморфизмом $I(c)$, s_z отображает G/H в изоморфное ему однородное пространство G/aHa^{-1}.

При использовании морфизмов примеров 1 и 4 следует применить морфизмы

$$g: G/H \to Q(\Phi): aH \to a\Phi(a^{-1})=\rho(a).$$

Таким образом, можем определить морфизм

$$\bar{g} = G/H \times G/H \to G(\mathrm{Id}) : (aH, a_1H) \to xy^{-1},$$
$$x = q(aH), \quad y = q(a_1H).$$

Аналогично, в случае перестановочности эндоморфизмов Φ и α, т. е. в случае, когда

$$s_z[Q(\Phi)] \subset Q(\Phi), \; z \in Q(\alpha),$$

определится отображение морфизма

$$G/H_1 \times G/H \to G(\mathrm{Id}) : (bH_1, \; aH) \to z\alpha(x)\Phi(z^{-1})x^{-1},$$

где $z = q(bH_1) = b \cdot \alpha(b^{-1})$, $x = q(aH) = a\Phi(a^{-1})$.

Если же α и Φ не перестановочны, то можно определить отображение морфизма

$$G/H_1 \times G/H_1 \times G/H \to G(\mathrm{Id}) : (bH_1, cH_1, aH) \to s_z(x)[s_u(x)]^{-1},$$

где $z = q(bH_1)$, $u = q(cH_1)$, $x = aH$.

Здесь пользуемся тем обстоятельством, что $s_z(x)$ и $s_u(x)$ принадлежат одному однородному пространству $Q(\alpha \circ \Phi \circ \alpha^{-1})$.

Полученные морфизмы позволяют строить инвариантные отображения и инвариантные условия. Например, в случае наличия линейного представления группы Ли G, можно использовать инвариантность следа матрицы в $G(\mathrm{Id})$.

Инвариантным будет условие

$$s_z(x) = s_z(y).$$

В случае перестановочности α и Φ инвариантным будет более простое условие

$$s_z(x) = x \Leftrightarrow z\alpha(x) = x\Phi(z).$$

§ 5. ГЕОМЕТРИЯ, ПОРОЖДЕННАЯ ГЛОБАЛЬНОЙ ПАРОЙ (G, A), ГДЕ G — ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Нередко, например в случае группы Ли $\bar{G}_1$, являющейся дифференциальным продолжением группы Ли G_1, глобальная пара (G, A) обладает следующими свойствами: а) группа Ли G есть полупрямое произведение $K * H$ своего нормального делителя K на подгруппу Ли H группы Ли G; б) для всякого эндоморфизма $\Phi \in A$ выполняется условие

$$\Phi(H) \subset H, \; \Phi(K) \subset K.$$

Условие б) влечет за собой перестановочность всякого эндоморфизма $\Phi \in A$ с каноническим идемпотентным эндоморфизмом Φ_0 группы Ли G, определяемым равенством

$$\Phi_0(kh) = h, \; k \in K, \; h \in H.$$

Кроме того, из условия б) следует, что глобальная пара (G, A) порождает подпространства (H, A') и (K, A''), где $A'(A'')$ состоит из ограничений $\Phi \in A$ на подгруппу $H(K)$. Будем полагать, что эндоморфизм Φ_0 является элементом A.

Если ограничение $\Phi \in A$ на $H(K)$ обозначить через $\Phi'(\varphi)$, то Φ определяется заданием пары (Φ', φ), и

$$\Phi(a) = \Phi(kh) = \varphi(k)\Phi'(h).$$

Пара (G, Φ_0) определит соответствующее Φ_0-пространство

$$\rho_0(G) = \{k = a\Phi_0(a^{-1}) \mid a = kh,\ k \in K,\ h \in H\}$$

и отображение

$$\rho_0 : G \to K : a \to a\Phi_0(a^{-1}).$$

Действие группы G в $\rho_0(G)$ описывается отображением

$$x_0 = \rho_0(b) \to \rho_0(ab) = khxh^{-1}, \quad a = kh.$$

Для соответствующей группы G_0 также находится идемпотентный эндоморфизм $\overline{\Phi}_0$, который определится равенством

$$\overline{\Phi}_0(f) = \Phi_0 \circ f,$$

и очевидно, $\overline{\Phi}_0(f)(\Phi) = \Phi_0 \circ f(\Phi) \in H = \Phi_0(G)$. Отсюда следует, что группа G_0 представляет собой полупрямое произведение

$$G_0 = K_0 * H_0,$$

где

$$H = \operatorname{Im} \overline{\Phi}_0, \quad K_0 = \operatorname{Ker} \overline{\Phi}_0.$$

В общем случае H_0 не совпадает с $\operatorname{Map}\{A' \to G\}$. Если отображение A в A', при котором эндоморфизму Φ соответствует его ограничение на H, биективно, то можно для всякого $f \in G_0$ определить элемент $\overline{f} \in H_0$ равенством

$$\overline{f}(\Phi'') = (\Phi_0 \circ f)(\Phi), \quad \Phi'' = \Phi'_{|H}.$$

Для отображения ρ группы G_0 в себя также определим отображение

$$\overline{\rho} = \Phi_0 \circ \rho,$$

и, в силу перестановочности Φ_0 со всеми элементами A,

$$\overline{\rho}(f)(\overline{\Phi}) = \Phi_0[f(\Phi)][\Phi_0 \circ f(\Phi)]^{-1} = \overline{f}(\Phi'')[\Phi' \circ \overline{f}(\Phi'')] =$$
$$= \rho(\overline{f})(\Phi'') \Leftrightarrow \Phi_0 \circ \rho = \rho \circ \Phi_0.$$

В результате получаем отображение

$$\rho : H_0 \to H_0.$$

В частности, если $A = \{\Phi\}$ — одноэлементное множество, то элемент $f \in G$ можно отождествить с $a = f(\Phi) \in G$, и для каждого

$x=\rho(a)=a\Phi(a^{-1})\in Q(\Phi)$ определится элемент

$$\bar{x}=\Phi_0(x)=\Phi_0\circ\rho(a)=\rho[\Phi_0(a)]=h\Phi(h^{-1}),\quad h\in H.$$

Это будет элемент однородного пространства $Q(\Phi')$, определенного парой (H,Φ').

Рассмотрим теперь глобальную пару (G,A), где $G=K*H$ — полупрямое произведение нормального делителя K на подгруппу Ли H группы Ли G, а $A=\{\Phi, \Psi_0\}$ состоит из двух элементов Φ и Ψ_0, причем,

$$\Psi_0=\Psi\circ\Phi_0.$$

Здесь Ψ — инволютивный автоморфизм группы Ли H, и считается, что

$$\Phi(H)\subset H,\ \Phi(K)\subset K.$$

Легко посчитать, что $\Psi_0^2=\Phi_0$, т. е. эндоморфизм Φ_0 принадлежит полугруппе $\Gamma=[A]$, порожденной множеством A.

Изучим сначала основные Φ-пространства, порожденные данной глобальной парой. Нами уже ранее было определено G-пространство $\rho_0(G)$, которое как множество совпадает с K, и обозначим его через M_0. Кроме того, определятся однородные пространства

$$M=\rho(G)=\{x=a\Phi(a^{-1})\mid a=kh\in G\};$$

$$M'=\rho'(G)=\{y=\rho'(a)=a\Psi(a^{-1})=k\rho'(h)\};$$

$$M''=\rho''(G)=\{z=\rho''(a)=a\Phi\circ\Phi_0(a^{-1})\mid a=kh\in G\},$$

а также однородные H-пространства

$$N=\{B=h\Phi(h^{-1})\mid h\in H\};$$

$$N'=\{g=h\Psi(h^{-1})\mid h\in H\}.$$

Полученные однородные пространства связаны морфизмами

$$f':M'\to M_0:y\to y\Phi_0(y^{-1});$$

$$f'':M''\to M_0:z\to z\Phi_0(z^{-1});$$

$$f:M''\to M:z\to z[(\Phi\circ\Phi_0)(z)]\Phi(z^{-1}).$$

Имеются также Φ_0-морфизмы

$$\Phi_0^1:M\to N:x\to\Phi_0(x);$$

$$\Phi_0^2:M'\to N':y\to\Phi_0(y);$$

$$\Phi_0^3:M''\to N:z\to\Phi_0(z).$$

Соответственно определится изоморфизм

$$f_0:M''\to N\times M_0:z\to(z\Phi_0(z^{-1}),\ \Phi_0(z)).$$

Морфизм f будет изоморфизмом, если отображение

$$k\to\rho(h)\Phi(k^{-1})\rho(h^{-1})$$

будет обратимо при всяком $h\in H$.

Определится морфизм

$$s: M_0 \times M_0 \to G(\mathrm{Id}) : (k, k_1) \to k_1 k^{-1} = k_0,$$

образ которого совпадает с K, и, кроме того, действие группы описывается отображением

$$k_0 \to a k_0 a^{-1} = h k k_0 k^{-1} h^{-1} = T_a(k_0),$$

в случае абелевой группы K, получим

$$T_a(k) = I(h)(k).$$

Нормальный делитель K входит в ядро неэффективности (а часто совпадает с ним).

В случае линейной группы G (или наличия линейного представления группы Ли G) здесь можно использовать инвариантное отображение

$$\mathrm{Im}\, s \to R : k_0 \to s\rho(k_0{}^m),$$

где m — произвольное число.

Замечая, что $H^{\Phi_0} = H$, можно определить глобальную пару (H, A'), где A' состоит из двух эндоморфизмов Φ' и Ψ (через Φ' обозначено ограничение Φ на H). Для простоты мы часто будем опускать индекс 1. Полученная новая глобальная пара определит однородные пространства

$$N = \{B = h\Phi(h^{-1}) \mid h \in H\}$$

и

$$N' = \{g = h\Psi(h^{-1}) \mid h \in H\}.$$

Однородное пространство N' — симметрическое пространство, так как мы считаем Ψ инволютивным автоморфизмом.

Глобальная пара (G, A) будет полной, если полной будет глобальная пара (H, A').

§ 6. ГЕОМЕТРИЯ ГРУППЫ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Группа аффинных преобразований G является полупрямым произведением $K * H$ абелевого нормального делителя

$$K = \left\{ k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & E_n \end{pmatrix} \middle| \bar{a} \in R^n \right\}$$

и подгруппы Ли

$$H = \left\{ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \middle| T \in \mathrm{GL}(n, R) \right\},$$

изоморфной группе Ли $\mathrm{GL}(n, R)$.

Определим теперь глобальную пару (G, A), где $A=\{\Phi, \Psi_0\}$ имеет своими элементами два эндоморфизма: внутренний автоморфизм

$$\Phi=I(\bar{\varepsilon}),\quad \bar{\varepsilon}=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix},\quad \varepsilon\in\mathrm{GL}(n, R)$$

и

$$\Psi_0=\Psi\circ\Phi_0,\quad \Psi(h)=(h^{-1})',\quad h\in H.$$

Применяя результаты § 5 в данном частном случае, получим однородные пространства

$$M_0=\left\{x_0=a\Phi(a^{-1})=\begin{pmatrix}1&0\\\bar{x}&E_n\end{pmatrix}\middle|\bar{x}\in R^n\right\};$$

$$M=\rho(G)=\left\{x=\begin{pmatrix}1&0\\(E-B)\bar{a}&B\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\middle|\bar{a}\in R^n,\ B=T\varepsilon T^{-1},\ T\in\mathrm{GL}(n, R)\right\};$$

$$M'=\rho'(G)=\left\{y=\begin{pmatrix}1&0\\\bar{x}&g\end{pmatrix}\middle|\bar{x}\in R^n,\ g=TT',\ T\in\mathrm{GL}(n, R)\right\};$$

$$M''=\rho''(G)=\left\{z=\begin{pmatrix}1&0\\\bar{x}&B\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}\middle|\bar{x}\in R^n,\ B=T\varepsilon T^{-1},\ T\in\mathrm{GL}(n, R)\right\}.$$

и однородные H-пространства

$$N=\{B\varepsilon^{-1}|B=T\varepsilon T^{-1},\ T\in\mathrm{GL}(n, R)\},$$
$$N'=\{g=TT'|T\in\mathrm{GL}(n, R)\}.$$

Элементы полученных однородных пространств имеют следующий геометрический смысл: а) однородное пространство M_0 изоморфно аффинному пространству A_n, и его элементы являются точками аффинного пространства; б) элемент $g\in N'$ является квадратичной положительно определенной формой; в) элемент $y\in M'$ допускает истолкование как эллипсоид с центром в точке $\bar{x}\in A_n$ (см. [11]); г) в случае, когда $\varepsilon^2=E^n$, однородное пространство N изоморфно пространству пар; д) однородное пространство M'' изоморфно $A_n\times N$, а в случае, когда определитель $|E_n-\varepsilon|$ отличен от нуля, M'' изоморфно M; е) в случае $\varepsilon^2=E_n$ однородное пространство M изоморнфо пространству оснащенных плоскостей A_n, а пространство M'' изоморфно основному пространству (см. [14]); ж) в случае $\varepsilon^2=-E$ однородное пространство N изоморфно пространству комплексных структур (см. [20]).

Отображение s_z, где z — элемент пространства оснащенных плоскостей, есть отображение косой симметрии, а группа, порожденная всеми такими симметриями, будет группой G аффинных преобразований. Если же $z\in A_n$, то $s_z\in K$, и группа, порожденная s_z, $z\in K$, будет в пространстве оснащенных плоскостей группой параллельных переносов и не совпадает с G.

Пусть теперь ε — диагональная матрица, т. е.

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} \lambda_1 E_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_2 E_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k E_k \end{pmatrix},$$

где E_i — единичные матрицы. Выделяется случай, когда все λ_i отличны от единицы, и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. В этом случае глобальная пара (G, Γ) является полной, т. е. группа $H(\Gamma)=\{a \in G \mid \Phi(a)=a,\ \Psi(a)=a\}$ — дискретная.

Однородные пространства M и N изоморфны однородным пространствам

$$\overline{M}=\{\overline{x}=x\overline{\varepsilon} \mid x \in M\}, \quad \overline{N}=\{B \mid B\varepsilon^{-1} \in N\},$$

в которых группа действует при помощи отображения сопряжения

$$T_a(\overline{x})=a\overline{x}a^{-1}, \quad T_h(B)=hBh^{-1}.$$

Следовательно, можно применить полиномиальные морфизмы, которые приводят к следующему утверждению.

Теорема. Пусть $\Phi=I(\overline{\varepsilon})$ и $\Phi_1=I(\overline{\varepsilon}_1)$ — два внутренних автоморфизма, где ε и ε_1 — диагональные матрицы. Тогда однородные пространства $Q(\Phi)$ и $Q(\Phi_1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда операторы ε и ε_1 имеют одинаковые разложения линейного пространства $\overline{M}$ в прямую сумму собственных подпространств. Если же каждое собственное подпространство оператора ε принадлежит какому-то собственному подпространству оператора ε_1, то существует полиномиальный морфизм f из $Q(\Phi)$ в $Q(\Phi_1)$.

В частности, если все собственные подпространства оператора одномерны, то всегда существует полиномиальный морфизм из $Q(\Phi)$ в любое однородное пространство $Q(\Phi_1)$.

Отсюда следует соответствующее утверждение для однородного пространства M'', если рассмотреть композицию изоморфизма M'' на $A_n \times N$ и морфизма $\mathrm{Id} \times f$.

В частности, из полученной теоремы следует, что имеется морфизм

$$\overline{f}: Q(\Phi) \to Q(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k),$$

где

$$\Phi_k=I(\overline{\varepsilon}_k), \quad \varepsilon_k=\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_p \end{pmatrix},$$

а p_i — полиномы с действительными коэффициентами. Оказывается, что f является изоморфизмом, и обратное отображение есть также полиномиальное отображение

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) \to \mu_1 z_1+\mu_2 z_2+\ldots+\mu_n z_n, \quad \mu_i \in R.$$

Если исходить из глобальной пары (G, A), где A состоит из только что введенных автоморфизмов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, то порожденные этой новой глобальной парой однородные Φ-пространства могут быть получены из $Q(\Phi)$ при помощи соответствующих полиномиальных морфизмов.

Морфизм

$$f_1: A_n \times A_n \to G(\mathrm{Id}): (x, y) \to xy^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{v} & E_n \end{pmatrix}$$

вводит в рассмотрение однородное пространство $f_1(G) \subseteq G(\mathrm{Id})$, которое изоморфно векторному пространству $\vec{A}_n$, присоединенному к аффинному пространству A_n. Касательное векторное пространство в любой точке $k \in A_n$ имеет своими элементами матрицы

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{v} & 0 \end{pmatrix},$$

и отображение $v \to E_{n+1} + v$ есть отображение изоморфизма $T_k(A_n)$ на $\vec{A}_n$.

В случае четного $n = 2m$ определится глобальная пара (G, A_1), где G, как и ранее, группа аффинных преобразований, а A_1 состоит из двух эндоморфизмов Φ' и Ψ_0, где Ψ_0 определен ранее, а $\Phi' = I(\bar{\varepsilon}')$ — внутренний автоморфизм группы Ли G, определенный элементом

$$\bar{\varepsilon}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}, \quad \varepsilon' = \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d' & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \lambda_2 & \\ \lambda_n & & \end{pmatrix}.$$

Эта глобальная пара также полная.

На основе данной глобальной пары (G, A) можно строить новые глобальные пары (подпространства), используя следующую очевидную лемму.

Лемма. Если Ψ и Ψ' — два эндоморфизма группы Ли G, перестановочные со всяким эндоморфизмом $\Phi \in A$, то для подгруппы Ли

$$H = \{h \in G \mid \Psi(h) = \Psi'(h)\}$$

выполняется условие

$$\Phi(H) \subset H, \ \forall \Phi \in A,$$

и, таким образом, для данной глобальной пары (G, A) определится подпространство (H, A'), где A' состоит из ограничений элементов A на подгруппу H.

В случае, когда группа Ли G есть группа аффинных преобразований, на основе построенных ранее глобальных пар, можно получить новые глобальные пары, являющиеся подпространствами данной пары, используя сформулированную лемму. При этом можно использовать не только элементы A, но и элементы полугруппы $\Gamma = [A]$. В частности, G может быть группой движений пространства Евклида или пространства Пуанкаре—Минковского, группой движений эллиптического или симплектического пространства и т. д. Соответственно определятся глобальные пары (G, A).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Балащенко В. В.*, D-преобразованные индуцированные связности на регулярных Ф-пространствах линейных групп Ли. VI Прибалтийская геометрич. конф. Тез. докл. Таллин, 1984, 19
2. —, Класс индуцированных связностей на однородных Ф-пространствах компактных групп Ли. VIII Всесоюзн. науч. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, 20—21 сент., 1984 г. Тез. докл. Одесса: Университет, 1984, 12 (РЖМат, 1984, 12А737К)
3. —, Индуцирование связностей, порожденных диффеоморфизмом регулярного Ф-пространства линейной группы Ли. Вестн. Белорус. ун-та, 1986, сер. 1, № 1, 56—59 (РЖМат, 1986, 6А976)
4. *Борзенко А. М.*, Об инвариантных k-линейных формах на симметрических римановых пространствах. Дифференц. геометрия и прил. М., 1982, 18—37. Библиогр. 6 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 22.03.83, № 1442—83 Деп.) (РЖМат, 1983, 7А669 ДЕП)
5. —, Об евклидовых алгебрах Ли, заданных матрицами второго порядка. Дифференц. геометрия и прил. М., 1982, 38—39. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 22.03.83, № 1442—83 Деп.) (РЖМат, 1983, 7А685 ДЕП)
6. —, О типах симметрий инвариантных тензоров на симметрических пространствах. Прикл. вопр. дифференц. геометрии. М., 1983, 3—22. Библиогр. 8 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 11. 10.83, № 5570—83 Деп.) (РЖМат, 1984, 2А722)
7. —, Об инвариантных тензорах на симметрических пространствах. Вопр. теории групп и гомол. алгебры. Ярославль, 1983, 130—131 (РЖМат, 1984, 5А196)
8. —, К вопросу об инвариантных тензорах на симметрических пространствах. Дифференц. геометрия и алгебры Ли. Моск. обл. пед. ин-т. М., 1983, 24—37. Библиогр. 7 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 17.04.84, № 2384—84 Деп.) (РЖМат, 1984, 8А757 ДЕП)
9. —, Об инвариантных тензорах на симметрических римановых пространствах. VIII Всесоюзн. науч. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, 20—21 сент., 1984 г. Тез. докл. Одесса: Университет, 1984, 24 (РЖМат, 1984, 12А737К)
10. —, О типах симметрий инвариантов симметрических пространств. Изв. вузов. Мат., 1984, № 5, 73—75 (РЖМат, 1984, 10А645)
11. *Ведерников В. И., Ведерников С. В.*, Однородное пространство центральных квадрик аффинного пространства. Изв. вузов. Мат., 1984, № 7, 34—38 (РЖМат, 1985, 3А669)
12. —, —, Геометрия однородного пространства положительно определенных эрмитовых форм. VIII Всесоюзн. науч. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, 20—21 сент., 1984 г. Тез. докл. Одесса: Университет, 1984, 28 (РЖМат, 1984, 12А737К)
13. —, *Ведерникова Л. И.*, Геометрия однородных пространств, порожденных группами квазинеевклидовых пространств. VI Прибалтийская геометрич. конф. Тез. докл. Таллин, 1984, 27

14. *Ведерников С. В.*, Геометрия основного пространства. Дифференц. геометрия многообразий фигур (Калининград), 1979, № 10, 22—29 (РЖМат, 1980, 1А853)
15. —, Геометрия гиперраспределений. Вестн. Белорус. ун-та, 1983, сер. 1, № 3, 38—40 (РЖМат, 1984, 1А669)
16. —, Однородные пространства, порожденные группой автоморфизмов группы Ли. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Проблемы геометрии, 1983, *15*, 165—185 (РЖМат, 1984, 5А786)
17. —, Геометрия однородных пространств, порожденных автоморфизмами полупрямого произведения групп Ли. VI Прибалтийская геометрич. конф. Тез. докл. Таллин, 1984, 28
18. —, Однородные пространства, порожденные полной полугруппой эндоморфизмов группы Ли аффинных преобразований. VIII Всесоюзн. науч. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, 20—21 сент., 1984 г. Тез. докл. Одесса: Университет, 1984, 29 (РЖМат, 1984, 12А737К)
19. —, Дифференциальное продолжение Ф-пространств. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., 1984, № 6, 36—41
20. —, Пространство комплексных структур. Дифференц. геометрия многообразий фигур (Калининград), 1985, № 16, 14—16 (РЖМат, 1985, 10А753)
21. *Зограбян М. Г.*, К геометрии общего основного пространства. Дифференц. геометрия многообразий фигур, 1984, № 15, 27—31 (РЖМат, 1985, 2А761)
22. —, Геометрия пространства троек подпространств. Ред. ж. «Изв. вузов. Мат.» Казань, 1985. 8 с. Библиогр. 4 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 6.03.85, № 1717—85 Деп.) (РЖМат, 1985, 7А836ДЕП)
23. *Ковальский О.*, Обобщенные симметрические пространства. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 240 с. (РЖМат, 1984, 6А672К)
24. *Лоос О.*, Симметрические пространства. Пер. с англ. М.: Наука, 1985. 208 с., ил. (РЖМат, 1985, 9А367К)
25. *Мармазеев В. И.*, Абелевы пространства с регулярным умножением. VI Прибалтийская геометрич. конф. Тез. докл. Таллин, 1985,75
26. —, Разложение римановых естественно редуктивных пространств с регулярным умножением. VIII Всесоюзн. науч. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, 20—21 сент., 1984 г. Тез. докл. Одесса: Университет, 1984, 96 (РЖМат, 1984, 12А737К)
27. *Степанов Н. А.*, О φ-пространствах, допускающих инвариантное оснащение. Изв. вузов. Мат., 1982, № 2, 63—70 (РЖМат, 1982, 7А792)
28. —, О касательном расслоении φ-пространств. Изв. вузов. Мат., 1983, № 1, 81—88 (РЖМат, 1983, 10А628)
29. —, φ-пространства полупрямых произведений групп Ли. Изв. вузов. Мат., 1983. № 10, 64—73 (РЖМат, 1984, 4А728)
30. —, О φ-пространствах, порожденных полными эндоморфизмами. Изв. вузов. Мат., 1985, № 4, 57—64 (РЖМат, 1985, 9А617)
31. —, О φ-пространствах, порожденных полными эндоморфизмами. VIII Всесоюзн. науч. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, 20—21 сент., 1984 г. Тез. докл. Одесса: Университет, 1984, 149 (РЖМат, 1984, 12А737К)
32. *Тралле А. Е.*, Зеркала Ф-пространств унитарной и симплектической групп. Ред. ж. «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физ., мат., мех.» Минск, 1982. 28 с. Библиогр. 11 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25 нояб. 1982 г., № 5838—82 Деп.) (РЖМат, 1983, 3А727ДЕП)
33. —, Зеркала Ф-пространств с классическими компактными основными группами. XVII Всесоюзн. алгебр. конф., Минск 14—17 сент., 1983. Тез. сообщ. Ч. 2. Минск: Ин-т мат., 1983, 237—238 (РЖМат, 1984, 2А131К)
34. —, Зеркала Ф-пространств с полупростыми компактными основными группами. Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. н., 1984, № 4, 27—32 (РЖМат, 1985, 2А763)

35. —, Глобальная классификация особых периодических пространств с умножением. Докл. АН БССР, 1984, *28*, № 1, 12—14 (РЖМат, 1984, 5A764)
36. —, Глобальная классификация периодических пространств с умножением классических и особых типов. VI Прибалтийская геометрич. конф. Тез. докл. Таллин, 1984, 120
37. —, Торы периодических пространств с умножением. Докл. АН БССР, 1985, *29*, № 2, 108—111 (РЖМат, 1985, 7A835)
38. —, Гипотеза Ковальского и 3-симметрические пространства. Докл. АН БССР, 1986, *30*, № 6, 489—492 (РЖМат, 1986, 10A761)
39. —, *Феденко А. С.*, О принципе Шварца для периодических однородных пространств. VIII Всесоюзн. науч. конф. по современным проблемам дифференциальной геометрии, 20—21 сент., 1984 г. Тез. докл. Одесса: Университет, 1984, 156 (РЖМат, 1984, 12A737K)
40. —. —, О принципе Шварца для редуктивных пространств. Движения в обобщен. пространствах. Рязань, 1985, 36—43 (РЖМат, 1986, 3A902)
41. *Феденко А. С.*, Аффинные связности на пространствах с периодическим умножением. VI Прибалтийская геометрич. конф. Тез. докл. Таллин, 1984, 125
42. —, Однородные φ-пространства и пространства с симметриями. Вестн. Белорус. ун-та, 1972, сер. 1, № 2, 25—30 (РЖМат, 1972, 10A492)
43. —. Пространства с симметриями. Минск, Белорус. ун-т, 1977. 168 с. (РЖМат, 1977, 11A595K)
44. *Чурбанов Ю. Д.*, Индуцированные связности на линейных группах Ли. Вестн. Белорус. ун-та, 1986, сер. 1, № 3, 59—62
45. *Al-Aqeel A.*, Compact quadrable s-manifolds. Rend. mat. e appl., 1983, *3*, № 4, 799—805 (РЖМат, 1985, 1A858)
46. *Backes E., Reckziegel H.*, On symmetric submanifolds of spaces of constant curvature. Math. Ann., 1983, *263*, № 4, 419—433 (РЖМат, 1983, 11A895)
47. *Božek M.*, Existence of generalized affine symmetric spaces of arbitrary order. Colloq. math. (PRL), 1982, *47*, № 2, 283—293 (РЖМат, 1984, 2A728)
48. *Černý J.*, Generalized symmetric pseudo-Riemannian spaces of dimension $n \leqslant 4$. Acta polytechn., 1983, [R] 4, *12*, № 2, 19—35 (РЖМат, 1984, 9A709)
49. —, *Kowalski O.*, Classification of generalized symmetric pseudo-Riemannian spaces of dimension $\leqslant 4$. Tensor, 1982, *38*, Commen. Vol. 2, 255—267 (РЖМат, 1984, 9A707)
50. *Grecu E.*, Sur certains espaces de Riemann symétriques. Publ. Inst. math., 1983, *34*, 65—70 (РЖМат, 1985, 3A497)
51. *Kaneyuki Soji, Kozai Masato*, Paracomplex structures and affine symmetric spaces. Tokyo J. Math., 1985, *8*, № 1, 81—98 (РЖМат, 1986, 3A914)
52. *Kowalski O., Vanhecke L.*, Classification of four-dimensional commutative spaces. Quart J. Math., 1984, *35*, № 139, 281—291 (РЖМат, 1985, 2A751)
53. —, —, On disk-homogeneous symmetric spaces. Ann. Global Anal. and Geom., 1983, *1*, № 2, 91—104 (РЖМат, 1985, 3A711)
54. —, —, Classification of five-dimensional naturally reductive spaces. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1985, *97*, № 3, 445—463 (РЖМат, 1985, 10A751)
55. *Ledger A. J., Razavi A. R.*, Reduced Σ-spaces. Ill. J. Math., 1982, *26*, № 2, 272—292 (РЖМат, 1983, 2A605)
56. *Naitoh H.*, Symmetric submanifolds of compact symmetric spaces. Lect. Notes Math., 1984, № 1090, 116—128 (РЖМат, 1985, 6A592)
57. *Sánchez C. U.*, Regular Riemannian s-manifolds of noncompact type. Proc. Amer. Math. Soc., 1983, *88*, № 1, 110—112 (РЖМат, 1983, 12A897)
58. —, k-symmetric submanifolds of R^N. Math. Ann., 1985, *270*, № 2, 297—316 (РЖМат, 1985, 7A839)

59. *Schroeder V.*, Symmetric spaces of noncompact type. Manifolds of nonpositive curvature. Boston e. a., 1985, 238—259 (РЖМат, 1986, 7А851)
60. *Sekigawa Kouei, Watanabe Jun-ichi*, On some compact Riemannian 3-symmetric spaces. Sci. Repts Niigata Univ., 1983, *A*, № 19, 1—17 (РЖМат, 1983, 11А881)
61. *Verheyen P., Verstraelen L.*, Locally symmetric affine hypersurfaces. Proc. Amer. Math. Soc., 1985, *93*, № 1, 101—105 (РЖМат, 1986, 2А749)
62. *Węgrzynowski S.*, Parallel and non-parallel *s*-structures on Euclidean spaces. Czechosl. Math. J., 1983, *33*, № 1, 76—94 (РЖМат, 1983, 8А752)
63. —, Non-parallel *s*-structures on Euclidean spaces. Potsdam. Forsch., 1984, *B*, № 43, 31—34 (РЖМат, 1985, 8А819)