

УДК 517.938.5

**ОПИСАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СИСТЕМЫ “БИЛЬЯРД В ЭЛЛИПСЕ”**

**В. В. Фокичева<sup>1</sup>**

Изучается интегрируемая система “бильярд в эллипсе”, возникающая при описании движения точки внутри эллипса с естественным отражением на границе. В работе вычислен топологический инвариант лиувиллевой эквивалентности этой системы — молекула Фоменко–Цишанга — с помощью нового метода, разработанного автором.

*Ключевые слова:* интегрируемая система, бильярд, лиувиллева эквивалентность, молекула Фоменко–Цишанга.

A “billiard within an ellipse” is an integrable system appearing in the description of a point motion inside an ellipse with natural reflections at the boundary. This system is considered in the paper, the topological invariant of Liouville equivalence of this system is calculated, which is a Fomenko–Tsishang molecule, by the new method developed by the author.

*Key words:* integrable system, billiard, Liouville equivalence, marked molecule.

**1. Введение.** Данная система и подобные ей изучались многими авторами (см., например, [1–3]). Впервые инвариант Фоменко–Цишанга для системы “бильярд в эллипсе” был вычислен в статье [1] без доказательства. Вскоре в книге [2] этот инвариант был уточнен, хотя доказательство также не было указано. В данной работе впервые приводится полное доказательство. Предлагаемый новый метод позволяет эффективно вычислять “грубую молекулу”. Способ нахождения меток полностью аналогичен использованному А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко в случае геодезического потока на эллипсоиде (задача Якоби) [4].

**2. Постановка задачи.** Опишем достаточно широкий класс “бильярдных систем”, к которым применим наш метод. Пусть дана область на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , ограниченная несколькими квадратами из софокусного семейства:

$$\frac{x^2}{a - \Lambda} + \frac{y^2}{b - \Lambda} = 1, \quad a > 0, b > 0,$$

причем область не содержит углов  $\frac{3\pi}{2}$ . Система “бильярд в области” описывает движение точки внутри области  $\Omega$  с естественным отражением на границе  $P = \partial\Omega$ . В точках, где граница  $P$  не гладкая (где угол излома равен  $\frac{\pi}{2}$ ), систему доопределим по непрерывности: попав в угол, точка, не теряя скорости, отразится по той же траектории. Таким образом, фазовым пространством системы является многообразие

$$M^4 := \{(x, v) \mid x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim,$$

где  $(x_1, v_1) \sim (x_2, v_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \in P, |v_1| = |v_2|$  и  $v_1 - v_2 \perp T_{x_1}P$ .

**Теорема** (Якоби, Шаль) [5]. *Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в  $n$ -мерном пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще  $n - 2$  конфокальных с ней квадратик, одних и тех же для всех точек геодезической.*

В нашем случае это означает, что касательные в любой точке траектории касаются эллипса или гиперболы, софокусных с семейством границы  $P$ . Таким образом, система обладает двумя интегралами:

- 1)  $v$  — модуль вектора скорости,
- 2)  $\Lambda$  — параметр софокусной квадрики.

Будем считать, что скорость фиксирована и равна единице. Ограничим фазовое пространство  $M^4$  на поверхность уровня  $|v| = 1$  и получим изоэнергетическую поверхность  $Q^3$ .

**Определение.** Пусть  $(M_1^4, \omega_1, f_1, g_1)$  и  $(M_2^4, \omega_2, f_2, g_2)$  — две интегрируемые системы. Рассмотрим изоэнергетические поверхности  $Q_1^3 = \{x \in M_1^4 : f_1(x) = c_1\}$  и  $Q_2^3 = \{x \in M_2^4 : f_2(x) = c_2\}$ . Они называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует послойный диффеоморфизм  $Q_1^3 \rightarrow Q_2^3$ , который, кроме того, сохраняет ориентацию 3-многообразий  $Q_1^3$  и  $Q_2^3$  и ориентацию всех критических окружностей (подробнее см. [6–9]).

<sup>1</sup> Фокичева Виктория Викторовна — студ. каф. дифференциальной геометрии и приложений мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: arinir@yandex.ru.

В силу теоремы Лиувилля (см., например, [6]) многообразие  $Q^3$  расслоено на торы и особые слои (фактически оно представляет собой склейку окрестностей особых слоев друг с другом). Профакторизуем  $Q^3$  по торам Лиувилля и получим граф, называемый грубой молекулой. В его вершинах расположены “атомы”, описывающие соответствующие бифуркации торов Лиувилля (в настоящей работе используются атомы  $A, B, C_2$ ). Однако этот граф не описывает полностью слоение Лиувилля, так как теряется информация о склейках особых слоев. Чтобы это исправить, необходимо выбрать пары так называемых допустимых базисов на граничных торах (по правилам, указанным в [6]) и указать матрицы перехода от одного базиса к другому. Из полученных матриц перехода — матриц склейки — вычисляются метки  $r, \epsilon$  и  $n$ , которые, будучи расставленными на грубой молекуле, полностью определяют слоение Лиувилля с точностью до послышной эквивалентности и уже не зависят от выбора базиса на граничных торах [6].

**3. Построение меченой молекулы.** Выделим из описанного выше класса систем “бильярд в области” простейшую — “бильярд в эллипсе”.

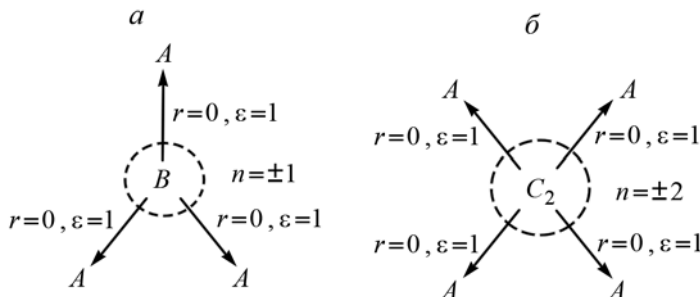


Рис. 1. Молекула Фоменко–Цишанга: *a* — для системы “бильярд в эллипсе”; *b* — для системы геодезического потока на эллипсоиде

**Теорема.** *Слоение Лиувилля изоэнергетического многообразия  $Q^3$  системы “бильярд в эллипсе” при ненулевом значении скорости  $v$  описывается меченой молекулой Фоменко–Цишанга  $W^*$ , изображенной на рис. 1, а. При этом  $Q^3$  диффеоморфно стандартной сфере  $S^3$ .*

**Замечание.** Таким образом, оказывается, что система “бильярд в эллипсе” лиувиллево не эквивалентна ни одной из ранее изученных систем с двумя степенями свободы. Большой список этих систем приведен в [6].

**Доказательство.** Рассмотрим геодезический поток на эллипсоиде и обозначим эту систему  $V_1$ . Ее особенности ранга 1 невырождены,

и сама система описывается меченой молекулой, найденной в работе [4] и изображенной на рис. 1, б.

Интегрируемость системы  $V_1$  следует из теоремы Якоби, Шаля. Систему бильярда в эллипсе обозначим  $V_2$ . Система  $V_3$  — система, описывающая геодезический поток на верхней половине эллипсоида ( $z \geq 0$ ). Введя эллиптические координаты, легко увидеть, что данная система эквивалентна системе  $V_2$  — “бильярду в эллипсе”.

**Построение грубой молекулы  $W$ .** Определим отображение  $f$  системы  $V_1$  на систему  $V_3$  следующим естественным образом: точка, оснащенная вектором  $(x, v) \in W_1$ , переходит в себя, если  $x$  лежит в верхней половине эллипсоида, и в получающиеся путем зеркальной симметрии относительно горизонтальной плоскости точку и вектор, если  $x$  лежит в нижней половине эллипсоида.

Напомним (подробности см. в работе [4]), что проекция тора ребра молекулы (см. рис. 1, б) на эллипсоид представляет собой кольцо. Рассмотрим уровень интеграла  $\Lambda = \lambda$ , соответствующий двум торам  $T_1$  и  $T_2$  на нижних ребрах молекулы (этому уровню соответствует однополостный гиперboloид). Геодезические, принадлежащие этим торам, лежат в кольце  $K$ , которое однополостный гиперboloид с параметром  $\lambda$  отсекает от эллипсоида.

Рассмотрим тор  $T_1$ , на котором лежат траектории, закручивающиеся по часовой стрелке на этом кольце  $K$ . Тогда  $T_1$  можно описать как результат склейки на границе двух копий  $K'$  и  $K''$  кольца  $K$ . Одна копия кольца ( $K'$ ) описывает точки, оснащенные векторами скорости, направленными “вверх”, т.е. к верхнему эллипсу, по которому однополостный гиперboloид пересекает исходный эллипсоид. Вторая копия ( $K''$ ) описывает точки, оснащенные векторами “вниз”. На граничных эллипсах (“верхнем” и “нижнем”) векторы скорости геодезических направлены горизонтально (так как в этих точках они должны касаться гиперboloида). Таким образом, потоки, определенные на этих кольцах, склеиваются при этом гладким образом и порождают гладкий поток на торе  $T_1$ . Аналогичную конструкцию сделаем с остальными ребрами.

Минимальному уровню интеграла  $\Lambda$  на  $Q^3$  соответствует движение точки на экваторе эллипсоида, являющемся его сечением плоскостью  $Oxy$ . Максимальному уровню интеграла  $\Lambda$  на  $Q^3$  соответствует движение точки на экваторе эллипсоида, являющемся его сечением плоскостью  $Oyz$ . Данные особенности описываются атомами  $A$ . Седловому значению интеграла  $\Lambda$  соответствует движение точки в плоскости  $Oxz$ . Эта особенность описывается атомом  $C_2$ .

Теперь рассмотрим, как преобразуются торы и особые слои при отображении  $f$ . Возьмем тор  $T_1$  и его представление в виде склейки двух колец. При отображении  $f$  эти два кольца переходят в две половинки кольца (рис. 2, а), которые по закону отражения на границе бильярда (мы уже находимся в системе  $V_3$ )

склеиваются между собой. Таким образом, два тора  $T_1$  и  $T_2$ , лежащие на одном уровне интеграла  $\Lambda$ , также переходят в два тора.

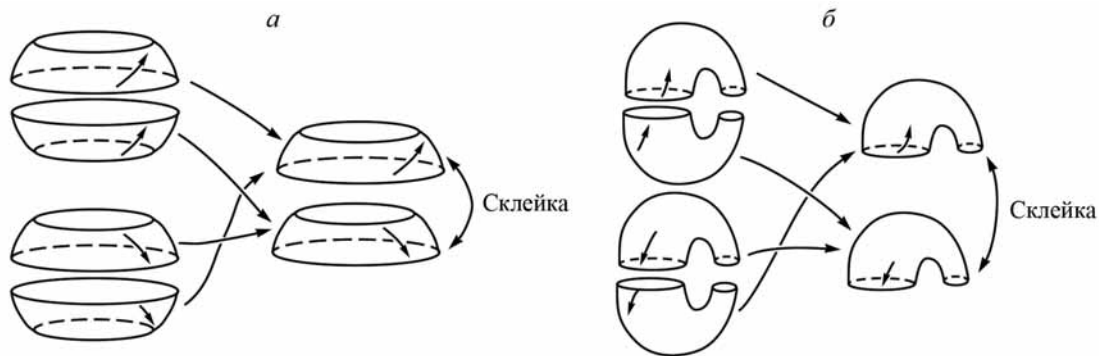


Рис. 2. Перестройка торов:  $a$  — на нижних ребрах;  $b$  — на верхних

Рассмотрим два верхних тора и аналогично представим их в виде объединения пары колец. Плоскость  $Oxy$ , в которой происходит отражение, делит каждое из колец на два прямоугольника, из которых и склеены цилиндры, изображенные на рис. 2,  $b$  (из цилиндров склеены тора системы  $V_1$ ). Далее (рис. 2,  $b$ ) два тора Лиувилля, лежащие на верхних ребрах молекулы, переходят в один тор системы  $V_3$ .

Таким образом, мы корректно определили отображение торов Лиувилля системы  $V_1$  в тора системы  $V_3$ . Отображение особых слоев слоения Лиувилля может быть получено предельным переходом. При этом атом  $C_2$  перейдет в атом  $B$  (рис. 3).

*Вычисление меток  $r$ .* Нам понадобится следующая известная

**Лемма 1.** *Рассмотрим произвольное ребро молекулы  $W$ , и пусть  $(\lambda^+, \mu^+)$ ,  $(\lambda^-, \mu^-)$  — допустимые системы координат, отвечающие двум атомам, соединенным этим ребром. Считаем, что все эти циклы лежат на одном и том же граничном торе в середине ребра. Тогда если циклы  $\lambda^+$  и  $\lambda^-$  пересекаются в одной точке, то метка  $r = 0$ .*

Данный факт сразу следует из определения меток  $r$ , подробное доказательство приведено в [6].

Ориентируем ребра молекулы из атома  $B$  в атомы  $A$ . Циклы  $\lambda^+$  на торах, близких к атомам  $A$ , должны быть выбраны как исчезающие, а циклы  $\lambda^-$  на торах, близких к  $B$ , — как гомологичные критической окружности атома  $B$ . Для данной системы они изображены на рис. 4. Легко видеть, что в обоих случаях  $\lambda^+$  и  $\lambda^-$  пересекаются в одной точке, и, таким образом, все метки  $r = 0$ .

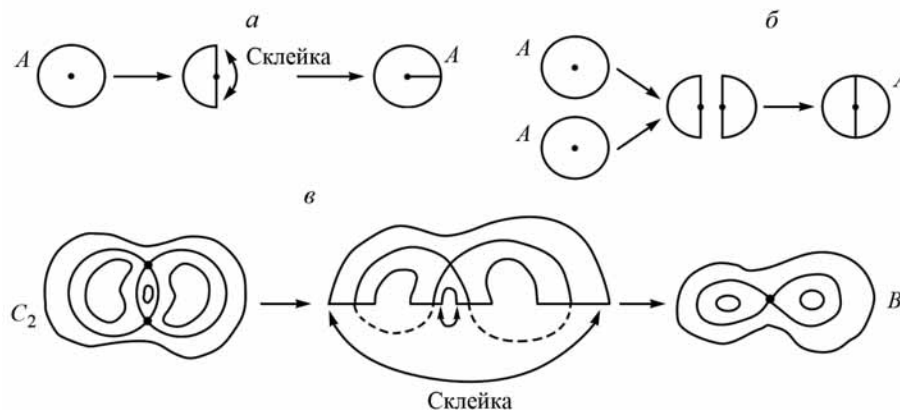


Рис. 3. Перестройка атомов:  $a$  — нижних атомов;  $b$  — верхних атомов;  $c$  — седлового атома

*Вычисление меток  $\epsilon$ .* Доказательство почти полностью повторяет доказательство вычисления меток  $\epsilon$  в статье [4]. Пусть на ребре  $\epsilon = -1$ . Рассмотрим два базиса на концах ребра —  $(\lambda^+, \mu^+)$  и  $(\lambda^-, \mu^-)$ . Цикл  $\lambda^-$  — это “ось” атома  $B$ . Цикл  $\mu^-$  — это произвольный цикл на торе, дополнительный к  $\lambda^-$ . Цикл  $\lambda^+$  — это исчезающий цикл тора при стремлении тора к атому  $A$  (т.е. цикл, стягивающийся в точку). Цикл  $\mu^+$  — это произвольный цикл на торе, дополнительный к  $\lambda^+$ . Можно считать, что  $\mu^+$  переходит в критическую минимаксную окружность атома  $A$  при стремлении тора к атому. По определению метка  $\epsilon$  на ребре равна единице, если ориентация базиса  $(\lambda^+, \mu^+)$  совпадает с ориентацией базиса  $(\lambda^+, \lambda^-)$ . Если

ориентации противоположны, то  $\epsilon = -1$ , и в таком случае цикл  $\lambda^+$  лежит между ориентированными циклами  $\lambda^-$  и  $\mu^+$ . Пусть это не так. Но циклы  $\lambda^-$  и  $\mu^+$  задают предельные положения векторного поля гамильтоновой системы при стремлении тора к атомам  $A$  и  $B$ . Ввиду того что цикл  $\lambda^+$  расположен между

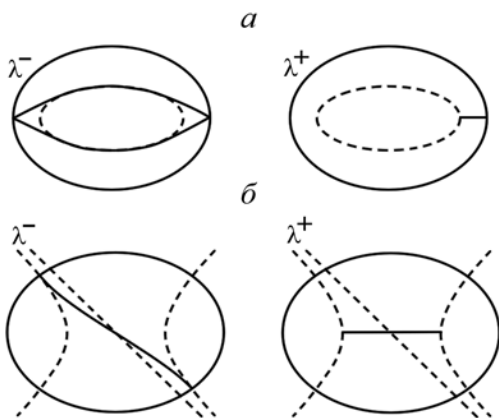


Рис. 4. Циклы  $\lambda^+$  и  $\lambda^-$ :  $a$  — на нижних ребрах;  $b$  — на верхнем ребре; пунктир означает соответствующую интервалу квадрату, а непрерывная линия — цикл

**Замечание.** Так как ориентация  $Q^3$  не фиксирована, то при данных значениях меток  $r$  и  $\epsilon$  не фиксирован знак метки  $n$  (подробнее см. [6]). Напомним, что аналогичный результат имел место в случае геодезического потока на эллипсоиде [4].

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению N220, договор N11.G34.31.0054.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dragovic V., Radnovic M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // arXiv: 0902.4233v2.
2. Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды, квадратики и многомерные поризмы Понселе. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2010.
3. Козлов В.В., Трещев Д.В. Бильярды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
4. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела // Функц. анализ и его прил. 1995. **29**, вып. 3. 1–15.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
6. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: РХД, 1999.
7. Фоменко А.Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Изв. АН СССР. 1988. **52**, N 2. 378–407.
8. Фоменко А.Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи матем. наук. 1989. **44**, вып. 1 (265). 145–173.
9. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. **54**, N 3. 546–575.
10. Gutkin E. Billiard dynamics: a survey with the emphasis on open problems // Regular and Chaotic Dynamics. 2003. **8**, N 1. 1–13.

Поступила в редакцию  
16.12.2011

на некотором торе ребра молекулы он будет гомологичен замкнутой траектории гамильтонова векторного поля. Однако в силу выбора цикла  $\lambda^+$  данная траектория должна стягиваться в точку на полнотории, соответствующем атому  $A$ . Очевидно, что это невозможно. Поэтому метка  $\epsilon = 1$ .

*Вычисление метки  $n$ .* Так как метки  $r$  конечны, то для данной молекулы должна быть вычислена метка  $n$ .

**Лемма 2.** *Изоэнергетическая поверхность  $Q^3$  в случае бильярда в односвязной области гомеоморфна  $S^3$ .*

Доказательство этого факта напрямую следует из теоремы Ван-Кампена (см. также [10]).

Вычисленные метки  $r$  и  $\epsilon$  позволяют выписать возможные матрицы склейки, если положить метку  $n$  неизвестной:

$\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  — на верхнем ребре  $W$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — на нижних ребрах  $W$ .

Таким образом, вычисляя фундаментальную группу  $Q^3$  по матрицам склейки, получаем, что  $\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , откуда  $n = \pm 1$ .