Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

G. V. Demidenko, A. V. Dulepova, On stability of the inverted pendulum motion with a vibrating suspension point,
Sib. Zh. Ind. Mat., 2018, Volume 21, Number 4, 39–50

https://www.mathnet.ru/eng/sjim1020

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.82
December 17, 2025, 09:52:37

Сибирский журнал
индустриальной математики
Октябрь–декабрь, 2018. Том XXI, № 4(76)

УДК 517.925.44

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА*)

Г. В. Демиденко, А. В. Дулепова

Исследуется устойчивость движения перевернутого маятника, точка подвеса которого колеблется по синусоидальному закону вдоль прямой, составляющей малый угол с вертикалью. С использованием принципа сжимающих отображений и критерия асимптотической устойчивости, сформулированного в терминах разрешимости специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова, доказано, что при достаточно малой амплитуде колебаний и достаточно большой частоте колебаний точки подвеса маятник совершает устойчивые периодические движения.

Ключевые слова: перевернутый маятник, асимптотическая устойчивость, дифференциальное уравнение Ляпунова, принцип сжимающих отображений.

DOI 10.17377/sibjim.2018.21.404

Исследуется устойчивость движения перевернутого маятника, точка подвеса которого колеблется по синусоидальному закону вдоль прямой, составляющей малый угол α с вертикалью. Уравнение движения маятника в этом случае имеет вид

$$\varphi'' + \varepsilon\varphi' + \frac{g - a\omega^2 \sin(\omega t)\cos\alpha}{l}\sin\varphi - \frac{a\omega^2 \sin(\omega t)\sin\alpha}{l}\cos\varphi = 0, \qquad (1)$$

где $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего вертикального положения равновесия, ε — коэффициент трения, l — длина маятника, g — ускорение свободного падения, ω — частота колебаний точки подвеса, a — амплитуда колебаний точки подвеса.

Хорошо известно, что при нулевом угле $\alpha = 0$ при достаточно большой частоте колебаний точки подвеса $\omega \gg 1$ верхнее положение равновесия маятника становится устойчивым. Этот факт был впервые строго доказан Н. Н. Боголюбовым в 1942 г. (см. [1]). А именно, им было показано, что при $a/l \ll 1$ и $a\omega > \sqrt{2gl}$ верхнее вертикальное положение $\varphi(t) = \pi$ асимптотически устойчиво. Последнее условие означает, что максимальная скорость колебаний точки подвеса должна превышать скорость свободного падения тел с высоты, равной длине маятника. Наглядной демонстрацией этого явления служит установка П. Л. Капицы [2].

В литературе теорема об устойчивости верхнего положения равновесия маятника при нулевом угле $\alpha = 0$ излагается с использованием метода усреднения (см., например, [3, 4]). Другой вариант доказательства теоремы Боголюбова предложен в работах [5, 6]. При решении поставленной задачи мы будем использовать подход из [5, 6], применяя при этом принцип сжимающих отображений (см., например, [7]).

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00592, 18-31-00408).

© 2018 Демиденко Г. В., Дулепова А. В.

1. Периодические колебания перевернутого маятника. Рассмотрим движение маятника, точка подвеса которого осциллирует по синусоидальному закону вдоль прямой, наклоненной к вертикальной оси Oy под углом α:

$$x = a\sin(\omega t)\sin\alpha, \quad y = a\sin(\omega t)\cos\alpha.$$

Как уже сказано, уравнение такого движения имеет вид (1).

Будем предполагать, что амплитуда колебаний точки подвеса и угол α достаточно малы, а частота колебания достаточно высокая, при этом $a = \mu a_0$, $\omega = \omega_0/\mu$, $\alpha = \mu^2\alpha_0$, где μ — малый параметр.

Наша цель — изучение устойчивости движения перевернутого маятника.

Сделав сдвиг по углу на π, т. е. $\varphi := \varphi + \pi$, и переходя к «быстрому» времени $\tau = t/\mu$, уравнение движения маятника можно переписать в следующем виде:

$$\widetilde{\varphi}'' + \varepsilon\mu\widetilde{\varphi}' - \frac{\mu^2 g - \mu a_0\omega_0^2\sin(\omega_0\tau)\cos\alpha}{l}\sin\widetilde{\varphi} + \frac{\mu a_0\omega_0^2\sin(\omega_0\tau)\sin\alpha}{l}\cos\widetilde{\varphi} = 0,$$

где $\widetilde{\varphi}(\tau) = \varphi(\tau\mu)$.

Перепишем данное уравнение в виде системы:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\ \widetilde{\varphi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -\varepsilon\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\ \widetilde{\varphi}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\mu^2 g - \mu a_0\omega_0^2\sin(\omega_0\tau)\cos\alpha}{l}\sin\widetilde{\varphi}_1 - \dfrac{\mu a_0\omega_0^2\sin(\omega_0\tau)\sin\alpha}{l}\cos\widetilde{\varphi}_1\end{pmatrix} \tag{2}$$

или в краткой форме:

$$\frac{d\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}}{d\tau} = A(\mu)\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + f(\tau,\widetilde{\boldsymbol{\varphi}},\mu), \quad \widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = \begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\ \widetilde{\varphi}_2\end{pmatrix}.$$

Вначале рассмотрим линейное приближение ($\sin\widetilde{\varphi}_1 \approx \widetilde{\varphi}_1$) системы (2):

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\ \widetilde{\varphi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ \dfrac{\mu^2 g - \mu a_0\omega_0^2\sin(\omega_0\tau)\cos\alpha}{l} & -\varepsilon\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\ \widetilde{\varphi}_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{\mu a_0\omega_0^2\sin(\omega_0\tau)\sin\alpha}{l}\cos\widetilde{\varphi}_1\end{pmatrix} = A_{\mathrm{lin}}(\tau,\mu)\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + f_{\mathrm{lin}}(\tau,\widetilde{\boldsymbol{\varphi}},\mu). \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{T} = 2\pi/\omega_0$ и a_0, ω_0 такие, что*

$$a_0\omega_0 > \sqrt{2gl}\,. \tag{4}$$

Тогда существует $\mu_{\mathrm{lin}} > 0$ такое, что для любых $\mu \in (0,\mu_{\mathrm{lin}})$ существует единственное $\mathcal{T}$-периодическое решение $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathrm{lin}}(\tau,\mu)$ системы (3), при этом справедлива оценка

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathrm{lin}}(\tau,\mu)\| \le c_{\mathrm{lin}}\mu, \quad c_{\mathrm{lin}} = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Доказательство. Используя линейное невырожденное преобразование

$$\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} = Qu, \quad Q = Q(\tau,\mu), \tag{6}$$

в силу (3) получим уравнение для вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau,\mu)$:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} = [(Q^{-1})' + Q^{-1}A_{\mathrm{lin}}(\tau,\mu)]Q\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} + Q^{-1}f_{\mathrm{lin}}(\tau,Q\mathbf{u},\mu), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},$$

или в краткой форме:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = U(\tau,\mu)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \tilde{f}_{\mathrm{lin}}(\tau,\mathbf{u},\mu).$$

В качестве матрицы $Q = Q(\tau,\mu)$ по аналогии с [6] возьмем следующую:

$$Q = \begin{pmatrix} 1+\mu a(\tau) & 0 \\ \mu b(\tau) & \mu c(\tau) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $a(\tau)$, $b(\tau)$, $c(\tau)$ — $\mathcal{T}$-периодические функции.

Введем обозначение $k(\tau) = a_0\omega_0^2\sin(\omega_0\tau)/l$. Тогда элементы матрицы $U = U(\tau,\mu)$ имеют вид

$$u_{11} = \frac{\mu(b(\tau)-a'(\tau))}{1+\mu a(\tau)}, \quad u_{12} = \frac{\mu c(\tau)}{1+\mu a(\tau)},$$

$$u_{21} = -\frac{\mu}{c(\tau)}\left(-\frac{g}{l} + \varepsilon b(\tau) - \mu\frac{g}{l}a(\tau) + k(\tau)a(\tau)\cos\alpha + \frac{b(\tau)(b(\tau)-a'(\tau))}{1+\mu a(\tau)}\right) - \frac{b'(\tau)+k(\tau)\cos\alpha}{c(\tau)},$$

$$u_{22} = -\mu\left(\varepsilon + \frac{b(\tau)}{1+\mu a(\tau)}\right) - \frac{c'(\tau)}{c(\tau)}.$$

Возьмем $c(\tau) \equiv 1$ и выберем функции $a(\tau)$, $b(\tau)$ так, чтобы

$$a'(\tau) - b(\tau) = 0, \quad b'(\tau) + k(\tau)\cos\alpha = 0. \tag{8}$$

Тогда получаем следующую систему:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mu(U_1 + U_2(\tau,\mu) + \mu^2 U_3(\tau,\mu))\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k(\tau)\sin\alpha\cos[(1+\mu a(\tau))u_1] \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$U_1 = U_1(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g/l - I(\mu) & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad I(\mu) = \frac{\cos\alpha}{\mathcal{T}}\int\limits_0^{\mathcal{T}} k(s)a(s)\,ds, \ \alpha = \mu^2\alpha_0, \tag{10}$$

$$U_2(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu a(\tau) \\ -\varepsilon b(\tau) + \mu\frac{g}{l}a(\tau) - k(\tau)a(\tau)\cos\alpha + I(\mu) & (\mu a(\tau)-1)b(\tau) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$U_3(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{a^2(\tau)}{1+\mu a(\tau)} \\ 0 & \dfrac{-a^2(\tau)b(\tau)}{1+\mu a(\tau)} \end{pmatrix}.$$

Выберем функции $a(\tau)$, $b(\tau)$, удовлетворяющие условию (8), так, чтобы

$$\int\limits_0^{\mathcal{T}} a(s)\,ds = 0, \quad \int\limits_0^{\mathcal{T}} b(s)\,ds = 0.$$

А именно, положим

$$a(\tau) = \frac{a_0 \sin(\omega_0 \tau)}{l} \cos\alpha, \quad b(\tau) = \frac{a_0 \omega_0 \cos(\omega_0 \tau)}{l} \cos\alpha. \tag{12}$$

Тогда очевидно, что для матрицы $U_2(\tau, \mu)$ при любом μ выполняется равенство

$$\int_0^{\mathcal{T}} U_2(s, \mu)\, ds = 0. \tag{13}$$

В дальнейшем нам потребуется следующее хорошо известное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $B(\tau)$ — $\mathcal{T}$-периодическая матрица и мультипликаторы системы*

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = B(\tau)\mathbf{y} \tag{14}$$

не равны единице. Тогда краевая задача

$$\begin{gathered} \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = B(\tau)\mathbf{y} + \mathbf{F}(\tau), \quad 0 < \tau < \mathcal{T}, \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(\mathcal{T}) \end{gathered} \tag{15}$$

имеет единственное решение для любой непрерывной $\mathcal{T}$-периодической вектор-функции $\mathbf{F}(\tau)$, при этом справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}(\tau)\| \le c \max_s \|\mathbf{F}(s)\|, \quad c = \mathrm{const}\,. \tag{16}$$

Оценка (16) вытекает из явной формулы для единственного решения задачи (15):

$$\mathbf{y}(\tau) = Y(\tau)[I - Y(\mathcal{T})]^{-1} \int_0^{\mathcal{T}} Y(\mathcal{T}) Y^{-1}(s) \mathbf{F}(s)\, ds + \int_0^{\tau} Y(\tau) Y^{-1}(s) \mathbf{F}(s)\, ds, \tag{17}$$

где $Y(\tau)$ — матрицант системы (14).

В случае, если $B(\tau) \equiv B$ — постоянная матрица, условие леммы эквивалентно отсутствию у матрицы B собственных значений вида $i\dfrac{2\pi k}{\mathcal{T}}$, $k \in \mathbb{Z}$, поскольку в данном случае $Y(\mathcal{T}) = e^{\mathcal{T}B}$ — матрица монодромии.

Лемма 2. *Пусть $Y(\mathcal{T}, \mu)$ — матрица монодромии системы*

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mu(U_1 + U_2(\tau, \mu) + \mu^2 U_3(\tau, \mu))\mathbf{y}. \tag{18}$$

Тогда существует $\mu_1 > 0$ такое, что при всех $\mu \in (0, \mu_1)$ справедлива оценка

$$\|(I - Y(\mathcal{T}, \mu))^{-1}\| \le \tilde{c}/\mu, \quad \mu \in (0, \mu_1), \quad \tilde{c} = \mathrm{const}\,. \tag{19}$$

Доказательство. Заметим, что при достаточно малых μ собственные значения матрицы $U_1 = U_1(\mu)$ лежат в левой полуплоскости. Действительно, из условия (4) следует, что существует $\mu' > 0$ такое, что при $\mu \in (0, \mu')$ имеет место $\cos^2(\mu^2 \alpha_0) a_0^2 \omega_0^2 > 2gl$. Тогда

$$\det U_1 = -\frac{g}{l} + \frac{\cos\alpha}{\mathcal{T}} \int_0^{\mathcal{T}} k(s) a(s, \mu)\, ds = -\frac{g}{l} + \frac{\cos^2(\mu^2 \alpha_0) a_0^2 \omega_0^2}{2l^2} > 0.$$

А поскольку след матрицы U_1 равен $-\varepsilon < 0$, отсюда вытекает, что ее спектр при $\mu \in (0, \mu')$ лежит строго в левой полуплоскости.

Учитывая теперь, что для $\mathcal{T}$-периодической матрицы $U_2(\tau, \mu)$ выполняется равенство (13), то, как вытекает из [8], существует $\mu'' \in (0, \mu']$ такое, что нулевое решение системы

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mu(U_1 + U_2(\tau, \mu))\mathbf{y} \tag{20}$$

асимптотически устойчиво при $\mu \in (0, \mu'')$. Но поскольку перед матрицей $U_3(\tau, \mu)$ в (18) стоит коэффициент μ^2, из результатов, полученных в [8], следует, что существует $\mu_0 > 0$ такое, что при всех $\mu \in (0, \mu_0)$ нулевое решение системы (18) асимптотически устойчиво. Следовательно, спектр матрицы монодромии этой системы лежит строго внутри единичного круга, и поэтому обратная матрица $(I - Y(\mathcal{T}, \mu))^{-1}$ существует.

Для доказательства оценки (19) воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница

$$I - Y(\mathcal{T}, \mu) = -\int\limits_0^{\mathcal{T}} \frac{d}{ds} Y(s, \mu)\, ds$$

или с учетом равенства (13)

$$I - Y(\mathcal{T}, \mu) = -\mu \mathcal{T} U_1 \left(I + \frac{\mu^2}{\mathcal{T}} U_1^{-1} \int\limits_0^{\mathcal{T}} U_3(s, \mu)\, ds \right).$$

Выберем теперь $\mu_1 \in (0, \mu_0]$ таким, чтобы

$$\frac{\mu^2}{\mathcal{T}} \left\| U_1^{-1} \int\limits_0^{\mathcal{T}} U_3(s, \mu)\, ds \right\| \le \frac{1}{2}, \quad \mu \in (0, \mu_1).$$

Тогда в силу теоремы фон Неймана получим

$$\|(I - Y(\mathcal{T}, \mu))^{-1}\| \le 2 \frac{\|U_1^{-1}\|}{\mu \mathcal{T}}, \quad \mu \in (0, \mu_1).$$

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1, 2 вытекает, что при $\mu \in (0, \mu_1)$ система

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mu \bar{U}(\tau, \mu)\mathbf{y} + \mathbf{F}(\tau), \quad \bar{U}(\tau, \mu) = U_1 + U_2(\tau, \mu) + \mu^2 U_3(\tau, \mu) \tag{21}$$

имеет единственное $\mathcal{T}$-периодическое решение $\mathbf{y}(\tau, \mu)$ при любой непрерывной $\mathcal{T}$-периодической вектор-функции $\mathbf{F}$. Используя формулу вида (17) и оценку (19) для решения $y(\tau, \mu)$, нетрудно получить неравенство

$$\|\mathbf{y}(\tau, \mu)\| \le \frac{c_0}{\mu} \max_s \|\mathbf{F}(s)\|, \quad c_0 = \text{const}, \quad \mu \in (0, \mu_1).$$

Следовательно, оператор

$$\left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right), \quad \mu \in (0, \mu_1),$$

имеет ограниченный обратный в пространстве непрерывных $\mathcal{T}$-периодических вектор-функций, при этом

$$\left\| \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \right\| \leq c_0/\mu. \tag{22}$$

Задача о нахождении $\mathcal{T}$-периодических решений системы (21) эквивалентна построению решений краевой задачи

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mu \bar{U}(\tau, \mu)\mathbf{y} + \mathbf{F}(\tau), \quad 0 < \tau < \mathcal{T},$$
$$\mathbf{y}|_{\tau=0} = \mathbf{y}|_{\tau=\mathcal{T}},$$

а решение этой задачи при $\mu \in (0, \mu_1)$ представимо в виде

$$\mathbf{y}(\tau, \mu) = \int\limits_0^{\mathcal{T}} G(\tau, s, \mu)\mathbf{F}(s)\, ds,$$

где $G(\tau, s, \mu)$ — матрица Грина. Поэтому задача о нахождении $\mathcal{T}$-периодических решений системы (9) эквивалентна построению решений интегрального уравнения

$$\mathbf{u}(\tau, \mu) = \mu \int\limits_0^{\mathcal{T}} G(\tau, s, \mu)[\mu \mathbf{g}(s, \mathbf{u}(s, \mu), \mu)]\, ds$$

или

$$\mathbf{u}(\tau, \mu) = \mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \circ [\mu \mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}(\tau, \mu), \mu)], \tag{23}$$

где

$$\mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{k(\tau)\sin\alpha}{\mu^2} \cos[(1 + \mu a(\tau, \mu))u_1] \end{pmatrix}, \quad k(\tau) = \frac{a_0 \omega_0^2 \sin(\omega_0 \tau)}{l}. \tag{24}$$

Перепишем это уравнение в операторном виде:

$$\mathbf{u} = A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}). \tag{25}$$

В силу (22) оператор

$$\mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1}, \quad \mu \in (0, \mu_1),$$

ограничен в пространстве непрерывных $\mathcal{T}$-периодических вектор-функций, а поскольку гладкая вектор-функция $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}, \mu)$ является $\mathcal{T}$-периодической, то можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Существует $\mu_{\text{lin}} \in (0, \mu_1]$ такое, что при $\mu \in (0, \mu_{lin})$ оператор A_μ^{lin} удовлетворяет принципу сжимающих отображений в пространстве $C_{\mathcal{T}}$ непрерывных $\mathcal{T}$-периодических вектор-функций.*

Доказательство. Для произвольных $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ из $\mathrm{C}_{\mathcal{T}}$ и $\mu \in (0, \mu_1)$ имеем

$$\|A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^1) - A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^2)\| = \left\| \mu^2 \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} (\mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}^1, \mu) - \mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}^2, \mu)) \right\|$$
$$\leq \left\| \mu \left(\frac{d}{d\tau} \circ I - \mu \bar{U}(\tau, \mu) \right)^{-1} \right\| \|\mu(\mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}^1, \mu) - \mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}^2, \mu))\| \leq c_0 \mu L_g \|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|,$$

где L_g — константа Липшица вектор-функции $\mathbf{g}(\tau, \mathbf{u}, \mu)$ по второму аргументу и $\|\mathbf{u}\| = \max\limits_{s\in[0,\mathcal{T}]} \|\mathbf{u}(s)\|$. Можно считать, что для константы Липшица справедливо неравенство $L_g \le \sup\limits_{\substack{\mathbf{u}\in C_{\mathcal{T}},\ \tau\in[0,\mathcal{T}],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \|g_{\mathbf{u}}(\tau, \mathbf{u}, \mu)\|$, где

$$g_{\mathbf{u}}(\tau, \mathbf{u}, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1+\mu a(\tau,\mu))\dfrac{k(\tau)\sin\alpha}{\mu^2}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая, что $\alpha = \mu^2\alpha_0$, в силу (12) получаем

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\mathbf{u}\in C_{\mathcal{T}},\ \tau\in[0,\mathcal{T}],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \|g_{\mathbf{u}}(\tau, \mathbf{u}, \mu)\| \\
&\quad = \sup_{\substack{\mathbf{u}\in C_{\mathcal{T}},\ \tau\in[0,\mathcal{T}],\\ \mu\in(0,\mu_1)}} \left|(1+\mu a(\tau,\mu))\frac{k(\tau)\sin\alpha}{\mu^2}\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1(\tau)]\right| \\
&\quad \le |(1+\mu a(\tau,\mu))k(\tau)\alpha_0\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1(\tau)]| \le \left(1+\mu_1\frac{a_0}{l}\right)\frac{a_0\omega_0^2\alpha_0}{l}.
\end{aligned}$$

Положим

$$\mu_{\text{lin}} = \min\left\{\mu_1, \frac{1}{2c_0(1+\mu_1\frac{a_0}{l})\frac{a_0\omega_0^2\alpha_0}{l}}\right\}. \tag{26}$$

Тогда оператор A_μ^{lin} является сжимающим в пространстве непрерывных $\mathcal{T}$-периодических вектор-функций при $\mu \in (0, \mu_{\text{lin}})$. Лемма доказана.

В силу доказанной леммы по принципу сжимающих отображений уравнение (23) при любом $\mu \in (0, \mu_{\text{lin}})$ имеет единственное $\mathcal{T}$-периодическое решение $\mathbf{u}(\tau, \mu)$, а следовательно, и система (3) имеет единственное $\mathcal{T}$-периодическое решение $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\text{lin}}(\tau, \mu)$.

Докажем теперь оценку (5). Повторяя рассуждения из доказательства принципа сжимающих отображений, зафиксируем некоторый элемент $\mathbf{u}^1 \in C_{\mathcal{T}}$ и рассмотрим последовательность $\{\mathbf{u}^k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\mathbf{u}^1, \quad \mathbf{u}^2 = A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^1), \quad \mathbf{u}^3 = A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^2), \ldots .$$

Как мы знаем, $\mathbf{u}^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ есть решение уравнения (25). Рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{gathered}
\|\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1\| = \left\|A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^1) - \mathbf{u}^1\right\| = d, \\
\|\mathbf{u}^3 - \mathbf{u}^2\| = \left\|A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^2) - A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^1)\right\| \le \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1\| = d/2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}\| = \left\|A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^{k-1}) - A_\mu^{\text{lin}}(\mathbf{u}^{k-2})\right\| \le \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{u}^{k-2}\| = d/2^{k-2}.
\end{gathered}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}^{k+l} - \mathbf{u}^k\| &\le \|\mathbf{u}^{k+l} - \mathbf{u}^{k+l-1}\| + \|\mathbf{u}^{k+l-1} - \mathbf{u}^{k+l-2}\| + \cdots + \|\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k\| \\
&\le d\left(\frac{1}{2^{k+l-2}} + \frac{1}{2^{k+l-3}} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \le \frac{d}{2^{k-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\right) \le d/2^{k-2}.
\end{aligned}$$

Поэтому при $l \to \infty$ получаем $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^k\| \le d/2^{k-2}$. В частности, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^1\| \le 2d$.

Возьмем $\mathbf{u}^1 = \mathbf{0}$. В силу (22)–(24) имеем оценку $\|\mathbf{u}\| \le 2d = 2\big\|A_\mu^{\rm lin}(\mathbf{0})\big\| \le c_1\mu$. Учитывая соотношение (6), получаем оценку (5): $\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{\rm lin}\| \le \|Q\|\|\mathbf{u}\| = c_Q c_1 \mu = c_{\rm lin}\mu$.

Отметим, что константы c_1 и c_Q могут быть явно выписаны с учетом определений (7), (12). Следовательно, константу $c_{\rm lin}$ в оценке (5) можно указать явно. Число μ_{lin} определено в (26). Теорема доказана.

Обратимся теперь к исходной нелинейной системе (2). Для нее справедлив аналогичный результат.

Теорема 2. *Пусть a_0, ω_0 такие, что $a_0\omega_0 > \sqrt{2gl}$. Тогда существует $\mu_2 \in (0, \mu_1)$ такое, что для любых $\mu \in (0, \mu_2)$ существует единственное $\mathcal{T}$-периодическое решение $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau,\mu) = \begin{pmatrix} \bar\varphi_1(\tau,\mu) \\ \bar\varphi_2(\tau,\mu)\end{pmatrix}$ системы (2), причем справедлива оценка*

$$\|\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau,\mu)\| \le c\mu, \quad c = \text{const}\,. \tag{27}$$

Доказательство. Используя равенство $\sin\tilde\varphi_1 = \sin\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_1 + \tilde\varphi_1$, после замены (6), (7), (12) систему (2) сведем к следующей:

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix} = \mu\bar U(\tau,\mu)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -k(\tau)\sin\alpha\cos[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1]\end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\mu\dfrac{g}{l} - k(\tau)\cos\alpha\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1)\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Как и при доказательстве теоремы 1, задача о нахождении $\mathcal{T}$-периодических решений системы (28) эквивалентна построению решений уравнения

$$\mathbf{u}(\tau,\mu) = \mu\left(\frac{d}{d\tau}\circ I - \mu\bar U(\tau,\mu)\right)^{-1}\circ \mathbf{F}(\tau,\mathbf{u}(\tau,\mu),\mu), \tag{29}$$

где

$$\mathbf{F}(\tau,\mathbf{u},\mu) = \mu\mathbf{g}(\tau,\mathbf{u}(\tau,\mu),\mu)$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\dfrac{g}{l} - \dfrac{k(\tau)\cos\alpha}{\mu}\right)(\sin[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1)\end{pmatrix},$$

или в операторном виде

$$\mathbf{u} = A_\mu(\mathbf{u}). \tag{30}$$

Покажем, что оператор A_μ удовлетворяет принципу сжимающих отображений в шаре достаточно малого радиуса. Учитывая определение вектор-функции $\mathbf{F}$, для произвольных $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2 \in C_{\mathcal{T}}$, имеем неравенство

$$\|\mathbf{F}(\tau,\mathbf{u}^1,\mu) - \mathbf{F}(\tau,\mathbf{u}^2,\mu)\| \le \|\mu(\mathbf{g}(\tau,\mathbf{u}^1(\tau,\mu),\mu) - \mathbf{g}(\tau,\mathbf{u}^2(\tau,\mu),\mu))\|$$
$$+ \left|\left(\frac{g}{l} - \frac{k(\tau)\cos\alpha}{\mu}\right)(\sin w_1^1(\tau,\mu) - w_1^1(\tau,\mu) - \sin w_1^2(\tau,\mu) + w_1^2(\tau,\mu))\right|,$$

где $\mathbf{w}^i(\tau,\mu) = (1+\mu a(\tau,\mu))\mathbf{u}^i(\tau,\mu)$, $i = 1, 2$.

Пусть $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$ принадлежат шару $B_\mu(\mathbf{0}) = \{\mathbf{u} \in C_{\mathcal{T}} \mid \|\mathbf{u}\| \le \tilde c\mu\}$. Тогда, учитывая представление (опускаем для краткости аргументы)

$$\sin w_1^1 - w_1^1 - \sin w_1^2 + w_1^2$$
$$= -(w_1^1 - w_1^2)\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \cos(\lambda''\lambda'\big(w_1^2 + \lambda(w_1^1 - w_1^2)\big))\lambda'\big[w_1^2 + \lambda(w_1^1 - w_1^2)\big]^2\, d\lambda'' d\lambda' d\lambda,$$

получим

$$\begin{aligned}\left|\sin w_1^1 - w_1^1 - \sin w_1^2 + w_1^2\right| &\le \left|w_1^2 + \lambda(w_1^1 - w_1^2)\right|^2 \left|w_1^1 - w_1^2\right| \\ &\le \left(4\left|w_1^2\right|^2 + 4\left|w_1^1 w_1^2\right| + \left|w_1^1\right|^2\right)\left|w_1^1 - w_1^2\right| \\ &\le |1+\mu a(\tau,\mu)|^3\left(4\left|u_1^2\right|^2 + 4\left|u_1^1 u_1^2\right| + \left|u_1^1\right|^2\right)\left|u_1^1 - u_1^2\right| \\ &\le |1+\mu a(\tau,\mu)|^3(4\|\mathbf{u}^2\|^2 + 4\|\mathbf{u}^1\|\|\mathbf{u}^2\| + \|\mathbf{u}^1\|^2)\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\| \\ &\le |1+\mu a(\tau,\mu)|^3 9\tilde{c}^2\mu^2\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|.\end{aligned}$$

Выберем $\mu_2' \in (0,\mu_1]$ так, чтобы $\max\limits_{\tau\in[0,\mathcal{T}]} |1+\mu a(\tau,\mu)|^3 \le 2$, $\mu \in \left(0,\mu_2'\right)$. Тогда

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{g}{l} - \frac{k(\tau)\cos\alpha}{\mu}\right)(\sin\left[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1^1\right] - (1+\mu a(\tau,\mu))u_1^1 \right. \\ &\qquad \left. - \sin\left[(1+\mu a(\tau,\mu))u_1^2\right] + \left(1+\mu a(\tau,\mu)\right)u_1^2)\right| \\ &\qquad\qquad \le 18\tilde{c}^2\mu \max_{\tau\in[0,\mathcal{T}]}\left|\mu\frac{g}{l} - k(\tau)\cos\alpha\right|\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|.\end{aligned}$$

Для $\mu \in \left(0,\mu_2'\right)$ справедлива оценка

$$\max_{\tau\in[0,\mathcal{T}]}\left|\mu\frac{g}{l} - k(\tau)\cos\alpha\right| \le \mu_2'\frac{g}{l} + \max_{\tau\in[0,\mathcal{T}]}|k(\tau)\cos\alpha| \le \mu_2'\frac{g}{l} + \frac{a_0\omega_0^2}{l}.$$

А для оператора A_μ в нуле имеем $\|A_\mu(\mathbf{0})\| \le \mu c_0\dfrac{a_0\omega_0^2\alpha_0}{l} = \mu c_0 g_0$.

Выберем теперь константу $\tilde{c}$ так, чтобы $2c_0g_0 \le \tilde{c}$. Тогда $\|A_\mu(\mathbf{0})\| \le \mu\dfrac{\tilde{c}}{2}$. Положим

$$\mu_2 = \min\left\{\mu_2', \frac{1}{4c_0\left(1+\mu_1\frac{a_0}{l}\right)\frac{a_0\omega_0^2\alpha_0}{l}}, \frac{1}{72c_0\tilde{c}^2\frac{\mu_2' g + a_0\omega_0^2}{l}}\right\}. \tag{31}$$

Тогда при $\mu \in (0,\mu_2]$ очевидно имеем $\|A_\mu(\mathbf{u}^1) - A_\mu(\mathbf{u}^2)\| \le \frac{1}{2}\|\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2\|$, и при любом $\mathbf{u} \in B_\mu(\mathbf{0})$ выполняется неравенство

$$\|A_\mu(\mathbf{u})\| \le \|A_\mu(\mathbf{u}) - A_\mu(\mathbf{0})\| + \|A_\mu(\mathbf{0})\| \le \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\| + \frac{1}{2}\tilde{c}\mu \le \tilde{c}\mu.$$

Таким образом, оператор A_μ является сжимающим в шаре $B_\mu(\mathbf{0})$, и по принципу сжимающих отображений существует единственное $\mathcal{T}$-периодическое решение $\bar{\mathbf{u}}(\tau,\mu)$ уравнения (29) при $\mu \in (0,\mu_2)$. Следовательно, существует единственное $\mathcal{T}$-периодическое решение $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau,\mu)$ исходной системы (2).

Доказательство оценки (27) проводится аналогично доказательству оценки (5) в теореме 1. Теорема 2 доказана.

2. Устойчивость периодического решения. В этом разделе мы будем исследовать устойчивость $\mathcal{T}$-периодического решения $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau,\mu)$ системы (2) при $\mu \in (0,\mu_2)$.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть a_0, ω_0 такие, что $a_0\omega_0 > \sqrt{2gl}$. Тогда существует $\mu_{\rm st} \in (0, \mu_2]$ такое, что $\mathcal{T}$-периодическое решение $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau, \mu)$ системы (2) асимптотически устойчиво при $\mu \in (0, \mu_{st})$.*

Доказательство. Воспользуемся стандартным приемом: вопрос об устойчивости решения $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau, \mu)$ системы (2) сведем к исследованию устойчивости нулевого решения

$$\mathbf{z}(\tau, \mu) = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}(\tau, \mu) - \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau, \mu) \tag{32}$$

приведенной системы

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(\tau,\mu)(\sin(z_1+\bar\varphi_1) - \sin\bar\varphi_1) - f_2(\tau,\mu)(\cos(z_1+\bar\varphi_1) - \cos\bar\varphi_1) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где

$$f_1(\tau,\mu) = \mu^2 g/l - \mu k(\tau)\cos\alpha, \quad f_2(\tau,\mu) = \mu k(\tau)\sin\alpha. \tag{34}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие легко проверяемые формулы $\sin(z_1+\bar\varphi_1) - \sin\bar\varphi_1 = z_1 - \bar\varphi_1^2 I_1 z_1 - \tilde I_1 z_1^2$, где

$$I_1 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \lambda' \cos(\lambda''\lambda'(\lambda z_1 + \bar\varphi_1))\, d\lambda d\lambda' d\lambda'', \tag{35}$$

$$\tilde I_1 = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \lambda'(\lambda^2 z_1 + 2\lambda\bar\varphi_1)\cos(\lambda''\lambda'(\lambda z_1 + \bar\varphi_1))\, d\lambda d\lambda' d\lambda'', \tag{36}$$

$$\cos(z_1+\bar\varphi_1) - \cos\bar\varphi_1 = -\bar\varphi_1 I_2 z_1 - \tilde I_2 z_1^2,$$

здесь

$$I_2 = \int_0^1\int_0^1 \cos(\lambda'(\lambda z_1 + \bar\varphi_1))\, d\lambda d\lambda', \tag{37}$$

$$\tilde I_2 = \int_0^1\int_0^1 \lambda\cos(\lambda'(\lambda z_1 + \bar\varphi_1))\, d\lambda d\lambda'. \tag{38}$$

Отнесем выражение $(f_1(\tau,\mu)\big(1 - \bar\varphi_1^2 I_1\big) + f_2(\tau,\mu)\bar\varphi_1 I_2)z_1$ в линейную часть системы (33). Получим систему

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_1(\tau,\mu)(1-\bar\varphi_1^2 I_1) + f_2(\tau,\mu)\bar\varphi_1 I_2 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ (-f_1(\tau,\mu)\tilde I_1 + f_2(\tau,\mu)\tilde I_2)z_1^2 \end{pmatrix} = A^{\mathbf{z}}(\tau,\mu)\mathbf{z} + \mathbf{f}^{\mathbf{z}}(\tau,\mathbf{z},\mu). \tag{39}$$

Рассмотрим линейную систему

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f_1(\tau,\mu)(1-\bar\varphi_1^2 I_1) + f_2(\tau,\mu)\bar\varphi_1 I_2 & -\varepsilon\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Сделаем замену $\mathbf{z} = Q\mathbf{u}$, где матрица $Q = Q(\tau, \mu)$ определяется соотношениями (7), (12). Тогда, с учетом обозначений (34), получим следующую систему для вектор-функции $\mathbf{u}$:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mu(U_1 + U_2(\tau, \mu) + \mu\tilde{U}_3(\tau, \mu))\mathbf{u}, \tag{41}$$

где матрицы U_1, $U_2(\tau, \mu)$ определяются формулами (10), (11), а матрица $\widetilde{U}_3(\tau, \mu)$ имеет вид

$$\widetilde{U}_3(\tau, \mu) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\mu a^2(\tau)}{1 + \mu a(\tau)} \\ \dfrac{1 + \mu a(\tau)}{\mu^2}\left(\bar{\varphi}_1^2 I_1 \left[\dfrac{k(\tau)\cos\alpha - \mu g}{l}\right] + \bar{\varphi}_1 I_2 k(\tau)\sin\alpha\right) & \dfrac{-\mu a^2(\tau) b(\tau)}{1 + \mu a(\tau)} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

В силу определений (35), (37), малости угла α ($\sin\alpha \le \alpha = \mu^2\alpha_0$) и оценки (27) для решения $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau, \mu)$ все элементы матрицы $\widetilde{U}_3(\tau, \mu)$ ограничены по модулю некоторой константой c_2 при $\mu \in (0, \mu_2)$, т. е. не имеют особенностей при $\mu \to 0$.

Напомним, что константа μ_2 была выбрана так, что с учетом условия (4) и того, что за счет выбора функций $a(\tau)$ и $b(\tau)$ $\int\limits_0^{\mathcal{T}} U_2(s, \mu)\, ds = 0$ при $\mu \in (0, \mu_2)$ нулевое решение системы

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mu(U_1 + U_2(\tau, \mu))\mathbf{u} \tag{43}$$

асимптотически устойчиво. Поскольку перед матрицей $\widetilde{U}_3(\tau, \mu)$ в (41) стоит множитель μ, то из [8] вытекает, что существует $\mu_{st} \in (0, \mu_2]$ такое, что нулевое решение системы (41) асимптотически устойчиво при $\mu \in (0, \mu_{st})$. Следовательно, нулевое решение линейной системы (40) также асимптотически устойчиво при $\mu \in (0, \mu_{st})$.

Рассмотрим теперь систему (39). Учитывая определения (36), (38), имеем

$$\max_{\tau \in [0, \mathcal{T}],\ \mu \in [0, \mu_{st}]} \|\mathbf{f}^{\mathbf{z}}(\tau, \mathbf{z}, \mu)\| \le p\|\mathbf{z}\|^2, \quad p = \text{const}\,. \tag{44}$$

Обозначим через $H(\tau, \mu)$ решение краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{gathered} \frac{dH}{d\tau} + HA^{\mathbf{z}}(\tau, \mu) + (A^{\mathbf{z}}(\tau, \mu))^* H = -C(\tau), \quad 0 \le \tau \le \mathcal{T}, \\ H(0, \mu) = H(\mathcal{T}, \mu) > 0, \end{gathered} \tag{45}$$

где $C(\tau)$ — эрмитова положительно определенная матрица с непрерывными элементами на $[0, \mathcal{T}]$. Эрмитово решение $H(\tau, \mu)$ существует в силу асимптотической устойчивости нулевого решения системы (40). (Соответствующий критерий доказан в работе [8].)

Учитывая условия на $H(\tau, \mu)$ и $\mathbf{f}^{\mathbf{z}}(\tau, z, \mu)$, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle H(\tau, \mu)\mathbf{f}^{\mathbf{z}}(\tau, \mathbf{z}, \mu), \mathbf{z}\rangle &\le \|H(\tau, \mu)\|\|\mathbf{f}^{\mathbf{z}}(\tau, \mathbf{z}, \mu)\|\|\mathbf{z}\| \\ &\le \frac{p\|H(\tau, \mu)\|}{(h_1(\tau, \mu))^{3/2}}\langle H(\tau, \mu)\mathbf{z}, \mathbf{z}\rangle^{3/2}, \quad \tau > 0, \end{aligned}$$

где $h_1(\tau,\mu)$ — минимальное собственное число матрицы $H(\tau,\mu)$. Следовательно, система (39) входит в класс систем вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = A(\tau)\mathbf{x} + \mathbf{f}(\tau,\mathbf{x}), \quad \tau > 0, \tag{46}$$

где $A(\tau)$ — матрица с непрерывными $\mathcal{T}$-периодическими элементами, $\mathbf{f}(\tau,\mathbf{x})$ — вещественнозначная гладкая вектор-функция ($\mathbf{f}(\tau,\mathbf{0}) = \mathbf{0}$) и удовлетворяет условию вида

$$\mathrm{Re}\langle H(\tau)\mathbf{f}(\tau,\mathbf{x}),\mathbf{x}\rangle \le q\langle H(\tau)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle^{1+\gamma}, \quad \tau > 0,\ q \ge 0,\ \gamma > 0. \tag{47}$$

Тогда нулевое решение системы (39) асимптотически устойчиво. (Соответствующая теорема для систем вида (46), удовлетворяющих (47), доказана в [5].) Отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения приведенной системы (33) при $\mu \in (0,\mu_{st})$. Следовательно, $\mathcal{T}$-периодическое решение $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\tau,\mu)$ исходной системы (2) также асимптотически устойчиво. Теорема 3 доказана.

Из теорем 2, 3 вытекает следующая теорема об устойчивости движения перевернутого маятника.

Теорема 4. *Пусть $T = 2\pi/\omega$, $a = \mu a_0$, $\omega = \omega_0/\mu$, $\alpha = \mu^2\alpha_0$, $a\omega > \sqrt{2gl}$. Тогда если $\mu \in (0,\mu_{st})$, то уравнение (1) имеет единственное T-периодическое решение $\varphi(t)$, и оно является асимптотически устойчивым.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строительной механики АН УССР. 1950. Т. 14. С. 9–34.
2. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперимент. и теор. физики. 1951. Т. 21, № 5. С. 588–597.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1963.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев: Наук. думка, 1971.
5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.
6. *Демиденко Г. В., Дулина К. М., Матвеева И. И.* Асимптотическая устойчивость решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с параметрами // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2012. № 14. С. 39–52.
7. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007.
8. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

Статья поступила 29 июня 2018 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
просп. Акад. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2
630090 г. Новосибирск
Дулепова Анастасия Викторовна
Новосибирский государственный университет
E-mail: demidenk@math.nsc.ru; nasty731@gmail.com