А. А. Кириллов, М. Л. Концевич, Рост алгебры Ли, порожденной двумя общими векторными полями на прямой, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, номер 4, 15–20

УДК 519.4

А. А. Кириллов, М. Л. Концевич

РОСТ АЛГЕБРЫ ЛИ, ПОРОЖДЕННОЙ ДВУМЯ ОБЩИМИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ НА ПРЯМОЙ

1. Пусть A — бесконечномерная алгебра над полем K. Предположим, что она конечно-порождена и обозначим через A_n пространство тех элементов, которые можно записать в виде многочлена степени $\leqslant n$ от образующих. В дальнейшем A будет либо ассоциативной алгеброй, либо алгеброй Ли. Полагаем в первом случае $A_0=K$, а во втором $A_0=\{0\}$. Рост последовательности $a_n=\dim A_n$ является существенной характеристикой алгебры A. Для многих важных примеров числа a_n растут полиномиально с ростом n: $a_n\sim cn^d$ при $n\to\infty$. Число $d=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln n}$ называют иногда размерностью алгебры A и обозначают $\operatorname{Dim} A$ (ср. [1]). Примером могут служить: 1) алгебра регулярных функций на аффинном алгебраическом многообразии X (в этом случае $\operatorname{Dim} A=\dim X, c=\frac{1}{d!}\deg X$; см. [2]); 2) обертывающая алгебра конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (здесь $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})=\dim\mathfrak{g}$); 3) максимальная нильпотентная подалгебра в алгебре Ли типа Каца — Муди ([3]; в этом случае $\operatorname{Dim} A=1$).

В последнее время усилился интерес к таким бесконечномерным алгебрам, для которых размерность Dim также бесконечна, то есть последовательность a_n растет быстрее любого многочлена от n (например, для свободной алгебры с k образующими $a_n=k^n$, а для свободной алгебры Ли с k образующими $a_n\sim\frac{k^n}{n}$). Оказалось, что есть и такие алгебры, для которых числа a_n растут медленнее любой экспоненты c^n, $c>1$. Будем называть их алгебрами промежуточного роста. Для таких алгебр производящая функция последовательности a_n

$$f_A(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n \tag{1}$$

сходится в круге $|x|<1$. Легко убедиться, что для всякой алгебры Ли промежуточного роста ее обертывающая алгебра также имеет промежуточный рост. Кроме того, отметим, что всякая ассоциативная алгебра промежуточного роста без делителей нуля является кольцом Оре (два любых ненулевых элемента имеют ненулевое правое и левое общее кратное), что позволяет построить для таких алгебр тело отношений (ср. [1]).

Мы покажем ниже, что два векторных поля на прямой порождают, как правило, алгебру Ли промежуточного роста.

2. Пусть $\operatorname{Vect}\mathbf{R}^1$ означает алгебру Ли гладких векторных полей на прямой. Каждая пара полей $\xi,\eta\in\operatorname{Vect}\mathbf{R}^1$ задает гомоморфизм φ свободной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с двумя образующими x и y в $\operatorname{Vect}\mathbf{R}^1:\varphi(x)=\xi$, $\varphi(y)=\eta$. Пусть $I(\xi,\eta)\subset\mathfrak{g}$ — ядро этого гомоморфизма и $I=\bigcap\limits_{\xi,\eta}I(\xi,\eta)$.

Будем говорить, что поля ξ_0 и η_0 находятся в общем положении, если $I(\xi_0,\eta_0)=I$. Можно убедиться, что поля $\xi=\frac{d}{dt}$ и $\eta=\varphi(t)\frac{d}{dt}$ находятся в общем положении, если функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t),\ldots$ алгебраически независимы. Однако для вычисления идеала I и роста соответствующей алгебры $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/I$ удобно взять другую пару полей. Введем поля $e_k = t^{k+1}\frac{d}{dt}$. Они удовлетворяют коммутационным соотношениям $[e_k, e_j] = (j-k)e_{k+j}$. Положим $\xi = e_0, \eta = \sum_k a_k e_k$ и будем считать коэффициенты a_k свободными параметрами.

Фиксируем целое число $r \geqslant 0$, и пусть символ (k) означает упорядоченный набор $(k_1, \ldots, k_r)$ целых чисел. Каждому неотрицательному набору (k) соответствует элемент

$$X_{(k)} = (\operatorname{ad} x)^{k_r} \operatorname{ad} y (\operatorname{ad} x)^{k_{r-1}} \ldots \operatorname{ad} y (\operatorname{ad} x)^{k_1} y \in \mathfrak{g}. \tag{2}$$

Ясно, что элементы $X_{(k)}$ для $k_1 + \ldots + k_r = k$ порождают подпространство $\mathfrak{g}^{k,r}$ в $\mathfrak{g}$, состоящее из всех однородных элементов степени k по x и степени r по y. Образом $X_{(k)}$ в $\operatorname{Vect} \mathbf{R}^1$ будет поле

$$\xi_{(k)} = (\operatorname{ad} e_0)^{k_r} \operatorname{ad} \sum_i a_i e_i (\operatorname{ad} e_0)^{k_{r-1}} \ldots (\operatorname{ad} e_0)^{k_1} \sum_i a_i e_i =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_r} a_{i_r} a_{i_{r-1}} \ldots a_{i_1} (\operatorname{ad} e_0)^{k_r} \operatorname{ad} e_{i_r} \ldots (\operatorname{ad} e_0)^{k_1} e_{i_1} =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_r} a_{i_r} a_{i_{r-1}} \ldots a_{i_1} (i_1)^{k_1} (i_1 - i_2)(i_1 + i_2)^{k_2} (i_1 + i_2 - i_3) \ldots$$

$$\ldots (i_1 + \ldots + i_{r-1})^{k_{r-1}} (i_1 + \ldots + i_{r-1} - i_r)(i_1 + \ldots + i_r)^{k_r} e_{i_1 + \ldots + i_r}.$$

Положим:

$$|i| = i_1 + \ldots + i_r, \quad a_{(i)} = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r},$$

$$q_{(k)}(i) = (i_1)^{k_1} (i_1 + i_2)^{k_2} \ldots (i_1 + \ldots + i_r)^{k_r},$$

$$p_r(i) = (i_1 - i_2)(i_1 + i_2 - i_3) \ldots (i_1 + \ldots + i_{r-1} - i_r).$$

Тогда

$$\xi_{(k)} = \sum_{(i)} a_{(i)} p_r(i) q_{(k)}(i) e_{|i|}. \tag{3}$$

Предположим теперь, что $\sum_k c_{(k)} X_{(k)}$ принадлежит идеалу $I \subset \mathfrak{g}$. Тогда $\Sigma c_{(k)} \xi_{(k)} = 0$ в $\operatorname{Vect} \mathbf{R}^1$ для любых $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. Обратно, если $\Sigma c_{(k)} \xi_{(k)} = 0$ для всех a_i, то $\Sigma c_{(k)} X_{(k)} \in I$. Рассматривая равенство $\Sigma c_{(k)} \xi_{(k)} = 0$ как тождество в $\mathbf{R}[a_1, a_2, \ldots] \otimes \operatorname{Vect} \mathbf{R}_1$ и сравнивая коэффициенты при базисных мономах, получаем, что условие $\Sigma c_{(k)} X_{(k)} \in I$ равносильно системе равенств

$$\sum_{(k)} c_{(k)} \sum_{\sigma \in S(r)} p_r(\sigma(i)) q_{(k)}(\sigma(i)) = 0, \tag{4}$$

где символ (i) пробегает r-мерную целочисленную решетку $\mathbf{Z}^r$. Поскольку многочлен однозначно определяется своим ограничением на решетку, равенство (4) справедливо при всех значениях $i_1, \ldots, i_r$. В дальнейшем $i_1, \ldots, i_r$ будем считать независимыми переменными.

Обозначим через P_r алгебру $\mathbf{R}[i_1, \ldots, i_r]$ и через Sym_r ее подалгебру, состоящую из симметрических многочленов. Обе эти алгебры естественно градуированы степенями многочленов.

Полученный выше результат можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{a}^{k,r}$ — пространство однородных элементов степени k по x и степени r по y в алгебре $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/I$. Отображение*

$$X_{(k)} \to \sum_{\sigma \in S(r)} p_r(\sigma(i))\, q_{(k)}(\sigma(i))$$

устанавливает изоморфизм алгебры $\mathfrak{a}^{k,r}$ и некоторого подпространства $L^{k,r} \subset \mathrm{Sym}_r^{k+r-1}$.

3. Исследуем пространство $L^r = \bigoplus\limits_{k=0}^{\infty} L^{k,r}$.

Лемма 2. *Пусть J_r — идеал в P_r, порожденный $r!$ многочленами $p_{r,\sigma}(i) = p_r(\sigma(i))$, $\sigma \in S(r)$. Тогда $L^r = J_r \cap \mathrm{Sym}_r$.*

Доказательство. По самому своему определению L^r содержится в J_r. Обратно, пусть $\sum\limits_{\sigma} p_{r,\sigma} u_\sigma$ — симметрический многочлен. Его можно записать в виде

$$\frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} p_{r,\sigma}(\tau(i))\, u_\sigma(\tau(i)) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma}\sum_{\tau} p_r(\sigma\tau(i))\, u_\sigma(\tau(i)) =$$

$$= \sum_{\varepsilon} p_r(\varepsilon(i))\, v(\varepsilon(i)),$$

где $v(i) = \frac{1}{r!}\sum\limits_{\sigma} u_\sigma(\sigma^{-1}(i))$. Остается заметить, что любой однородный многочлен $v(i)$ степени k является линейной комбинацией многочленов $q_{(k)}(i)$, для которых $k_1 + \ldots + k_r = k$. Лемма доказана.

Исследуем теперь множество общих нулей для многочленов из идеала J_r. Назовем допустимым такой набор (i), для которого:

а) числа $i_1, \ldots, i_r$ принимают лишь значения $1, 0, -1, -2, \ldots$;

б) $i_1 + \ldots + i_r \geqslant 2$.

Каждый допустимый набор (i) определяет точку $[i] = (i_1 : i_2 : \ldots : i_r)$ в проективном пространстве $P^{r-1}(\mathbf{R})$. Получаемые точки $[i]$ также будем называть допустимыми.

Отметим простейшие свойства допустимых наборов:

1) каждый допустимый набор содержит по крайней мере две единицы;

2) если два допустимых набора пропорциональны, то они равны;

3) число классов допустимых наборов относительно действия группы перестановок $S(r)$ равно $p(r-2) + p(r-1) + \ldots + p(0)$, где $p(n)$ — число разбиений n в сумму неупорядоченных слагаемых (в самом деле, для допустимого набора (i) числа $1-i_1$, $1-i_2$, ..., $1-i_r$ неотрицательны и в сумме дают $\leqslant r-2$).

Лемма 3. *Множество $X_r \subset P^{r-1}(\mathbf{C})$ нулей однородного идеала J_r состоит из всех допустимых точек с кратностью единица.*

Доказательство. Случаи $r = 0, 1, 2$ легко разбираются непосредственно. Пусть лемма доказана для некоторого $r \geqslant 2$. Рассмотрим набор $(i) = (i_1, \ldots, i_{r+1})$, который является общим нулем для всех многочленов из J_{r+1}. Тогда для любого $\sigma \in S(r+1)$ верно одно из двух. Либо

$$\sum_{k=1}^{r} i_{\sigma(k)} = i_{\sigma(r+1)},$$

либо набор $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)})$ пропорционален допустимому r-набору. Легко видеть, что первое утверждение может выполняться для всех $\sigma \in S(r+1)$ при $r \geqslant 2$ лишь для нулевого набора. Поэтому мы можем предположить, что $(i_1, \ldots, i_r)$ — допустимый набор.

Первый случай. Все числа i_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, одинаковы и, следовательно, равны единице. Условие $p_{r+1,\sigma}(i) = 0$ дает: либо $(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{r-1}, i_{r+1})$ — допустимый r-набор, либо $r-1+i_{r+1}=1$. В обоих вариантах отсюда следует, что (i) — допустимый набор.

Второй случай. Среди чисел i_k, $1 \leqslant k \leqslant r$, есть два различных. Удаление по крайней мере одного из них приводит к допустимому набору. Следовательно, набор (i) удовлетворяет условию а). Далее, переставим одну из единиц, входящую в набор $(i_1, \ldots, i_r)$, с i_{r+1}. Либо r-набор, полученный таким образом из $(i_1, \ldots, i_r)$, допустим, либо сумма его членов равна единице. В обоих вариантах условие б) для (i) выполняется.

Более детальное рассмотрение кратностей точек опускаем. Лемма доказана.

Обозначим через I_r однородный идеал в кольце P_r, который определяется множеством допустимых r-наборов. Из теоремы Гильберта о нулях следует, что однородные компоненты I_r^k и J_r^k совпадают для достаточно больших k.

При $k \geqslant r$ можно проверить, что условия обращения симметрического многочлена в нуль в различных классах допустимых точек линейно-независимы. Отсюда следует, что размерность однородной симметрической компоненты $\mathrm{Sym}_r \cap I_r^{k+r-1}$ идеала I_r при $k \geqslant r$ выражается формулой

$$\dim (\mathrm{Sym}_r \cap I_r^{k+r-1}) = p_r(k+r-1) - \sum_{j=0}^{r-2} p(j), \tag{5}$$

где через $p_r(n)$ обозначено число разбиений n в сумму $\leqslant r$ неупорядоченных слагаемых.

Предполагаем, что на самом деле идеалы I_r и J_r совпадают (для $r \leqslant 3$ это проверено). Пока утверждение не доказано, можно утверждать лишь, что

$$\dim L^{k,r} = \dim (\mathrm{Sym}_r \cap J_r^{k+r-1}) \leqslant p_r(k+r-1) - \sum_{j=0}^{r-2} p(j). \tag{6}$$

Теперь мы в состоянии сформулировать основной технический результат работы.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Vect}\,\mathbf{R}^1$ *— алгебра Ли, порожденная двумя векторными полями* ξ *и* η, *находящимися в общем положении. Эта алгебра биградуирована (степенями относительно* ξ *и* η): $\mathfrak{a} = \bigoplus \mathfrak{a}^{k,r}$, *и справедливы неравенства*

$$\dim \mathfrak{a}^{k,r} \leqslant p_r(k+r-1) + p_k(k+r-1) - p(k+r-1). \tag{7}$$

При каждом фиксированном r *неравенство превращается в равенство для достаточно большого* k.

Доказательство. Мы можем предполагать, что $k \geqslant r$. Нужное нам соотношение (7) следует из (6) и из легко проверяемого комбинаторного тождества

$$p_k(n) = p(n) - \sum_{j=0}^{n-k-1} p(j) \qquad \text{при } k \geqslant \frac{n}{2} - 1.$$

Если верна сформулированная выше гипотеза о совпадении идеалов J_r и I_r, то производящая функция двойной последовательности $\dim \mathfrak{a}^{k,r}$ вычислима явно:

$$f_{\mathfrak{a}}(x, y) = \frac{1}{x-y}\left(x^2 \prod_{k \geqslant 0} (1 - x^k y)^{-1} - y^2 \prod_{k \geqslant 0} (1 - x y^k)^{-1}\right). \tag{8}$$

Отсюда для последовательности $a_n = \dim \bigoplus_{k+r=n} \mathfrak{a}^{k,r}$ вытекает формула

$$a_n = (n+1)\, p(n-1) - 2 \sum_{k=2}^{n} d(k-1)\, p(n-k),$$

где $d(n)$ — число делителей n. Используя известный результат Рамануджана [4], получаем асимптотику

$$a_n \sim \frac{1}{4\sqrt{3}} e^{\pi \sqrt{2/3n}}. \tag{9}$$

Без использования гипотезы о совпадении I_r и J_r можно прийти лишь к более слабому утверждению:

$$\ln a_n \sim \pi \sqrt{2/3n}.$$

4. Полученные сведения до некоторой степени позволяют выяснить структуру алгебры $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}/I$. В частности, справедлива

Теорема 2. *Идеал I имеет бесконечное число образующих.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathfrak{g}$ элементы степени 3 по y. Они образуют пространство $\mathfrak{g}^{*,3}$ и при изоморфизме, построенном в п. 2, переходят в элементы пространства

$$L^3 \subset \mathrm{Sym}_3 = \mathbf{R}[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], \text{ где } \varphi_1 = i_1 + i_2 + i_3,$$
$$\varphi_2 = i_1 i_2 + i_2 i_3 + i_3 i_1, \quad \varphi_3 = i_1 i_2 i_3.$$

Уточнив для этого случая лемму 2, легко убедимся, что L^3 состоит из тех многочленов от φ_1, φ_2, φ_3, которые обращаются в нуль, если

$$\left(1 : \frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} : \frac{\varphi_3}{\varphi_1^3}\right) = (27:9:1) \text{ или } \left(1 : \frac{\varphi_2}{\varphi_1^2} : \frac{\varphi_3}{\varphi_1^3}\right) = (4:1:0).$$

Этот идеал порождается многочленами $P_1 = \varphi_1^3 - 4\varphi_1\varphi_2 + 9\varphi_3$ и $P_2 = \varphi_1^2\varphi_2 - 4\varphi_2^2 + 3\varphi_1\varphi_3$. Поэтому производящая функция для последовательности $\lambda_k = \dim L^{k,3}$ имеет вид

$$\lambda(x) = \frac{x + x^2 - x^5}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}. \tag{10}$$

С другой стороны, производящая функция для последовательности $\gamma_k = \dim \mathfrak{g}^{k,3}$ имеет вид (см. [5]):

$$\gamma(x) = \frac{x + x^2}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}. \tag{11}$$

Таким образом, градуированное пространство $I^{*,3} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} I^{k,3}$ бесконечномерно. Его производящая функция равна $x^5(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}$.

Предположим теперь, что I имеет конечное число образующих, и пусть $X_1, \ldots, X_n$ — все однородные образующие, лежащие в $I^{*,3}$. Тогда, поскольку $I^{*,1}=I^{*,2}=\{0\}$, пространство $I^{*,3}$ порождается элементами вида $(\mathrm{ad}\, x)^{k_i} X_i$. Если $X_i \in \mathfrak{g}^{l_i,3}$, то производящая функция для $I^{*,3}$ должна иметь вид $\frac{\sum x^{l_i}}{1-x}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

A. A. Kirillov, M. L. Kontsevich

THE GROWTH OF A LIE ALGEBRA GENERATED BY TWO GENERIC VECTOR FIELDS ON A STRAIGHT LINE

The paper deals with a Lie algebra generated by two generic vector fields on a straight line. It is proved that this algebra has an intermediate growth (between a polynomial and an exponential growth). A hypothetical explicit formula is given for dimensions of homogeneous components.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gelfand I. M., Kirillov A. A. Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie. — Publs. math. Inst. hautes étud. sci., 1966, N 31, 509—523.
2. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М., 1979.
3. MacDonald I. G. Affine root systems and Dedekind's η-function. — Invent. math., 1972, 15, N 2, 91—143.
4. Ramanujan S. Collected papers. N. Y., 1962.
5. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли, гл. I—III. М., 1976.

Поступила в редакцию
07.12.82

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА, 1983, № 4

УДК 517

В. П. Паламодов

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОМОГРАФИИ

Метод томографии состоит в отыскании неизвестной плотности среды μ по данным ее просвечивания розой параллельных пучков радиации той или иной природы. Он применяется в различных задачах неконтактного контроля [1—6]. Обычно пучки радиации располагаются в одной плоскости, и поэтому плотность можно считать функцией двух переменных x, y. Наблюдаемой величиной является интенсивность a излучения, прошедшего среду. Она связана с начальной интенсивностью пучка a_0 законом

$$a(l) = a_0 \exp\left(-\int_l \mu(x, y)\, ds\right), \tag{1}$$

где l — траектория луча, а ds — некоторая плотность на этом луче. Предположим, что излучение монохроматично, его частота и интенсивность a_0 не меняются. Полагаем также, что лучи не искривляются. Эта гипотеза достаточно хорошо выполняется для рентгеновского излучения, применяемого в медицине, и для других жестких излучений. Из нее вытекает, что ds есть элемент евклидовой длины, а μ — полупроизведение коэффициента поглощения среды и (известного) волнового числа излучения.