А. Б. Венков, Замечание о дискретном спектре автоморфного лапласиана для обобщенной циклоидальной подгруппы общей фуксовой группы, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 160, 31–36

А.Б.Венков

ЗАМЕЧАНИЕ О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ АВТОМОРФНОГО ЛАПЛАСИАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЦИКЛОИДАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ ОБЩЕЙ ФУКСОВОЙ ГРУППЫ

Как стало понятным к настоящему времени проблема существования дискретного спектра автоморфного лапласиана для общей фуксовой группы первого рода является очень трудной. Конечно, речь здесь идет о ситуации некокомпактной фуксовой группы первого рода Γ, когда соответствующий автоморфный лапласиан имеет конечнократный непрерывный спектр. Для кокомпактной Γ автоморфный лапласиан $A(\Gamma)$ имеет только дискретный спектр и для него выполняется асимптотическая формула Вейля

$$N_\Gamma(\lambda)\sim\frac{|F|}{4\pi}\lambda\quad,\qquad \lambda\to\infty\,, \tag{I}$$

где N_Γ – функция распределения дискретного спектра $A(\Gamma)$, $|F|$ – – инвариантный объем фундаментальной области F группы Γ на гиперболической плоскости H.

Если предположить теперь, что Γ – некокомпактна, но $|F|<\infty$ (это предположение будет в силе на протяжении оставшейся части работы), то формула (I) преобразуется

$$N_\Gamma(\lambda)+M_\Gamma(\lambda)\sim\frac{|F|}{4\pi}\lambda\;,\quad \lambda\to\infty\;, \tag{2}$$

где

$$M_\Gamma(\lambda)=-\int_{-T}^{T}\frac{\varphi'}{\varphi}\left(\tfrac{1}{2}+it\right)dt\;,\quad T^2+\tfrac{1}{4}=\lambda$$

и $\varphi(\frac{1}{2}+it)$ – определитель автоморфной матрицы рассеяния на непрерывном спектре. (см. [I]). Первоначально считалось весьма вероятным, что порядок роста функции $M_\Gamma(\lambda)$ меньше порядка $N_\Gamma(\lambda)$ в самой общей ситуации группы Γ. Дело в том, что с точки зрения теории возмущения, непрерывный спектр лапласиана $A(\Gamma)$ порождается одномерным оператором (см. [2]). Геометрически фундаментальная область F устроена так, что каждый ее касп (выход на бесконечность) содержит лишь один луч геодезической, проходящий через заданную точку внутри F. Кроме этого, для модулярной группы $PSL(2,\mathbb{Z})$ и некоторых ее конгруэнц-подгрупп удалось вычислить детерминанты φ в терминах ζ-функции Римана и L-рядов Дирихле. При этом оказалось, что

$$M_\Gamma(\lambda) = \underset{\lambda\to\infty}{O}(\lambda^{1/2}\ln\lambda)$$

и, следовательно, для таких групп верна формула Вейля (I). Но до сих пор простых соображений (типа теории возмущения) и более тонких не хватает чтобы оправдать (I) в сколько-нибудь общей ситуации. Более того, как показано в [3], [4], из стандартных гипотез теории чисел (типа расширенной гипотезы Римана для специальных L-функций) следует, что для общей группы Γ $M_\Gamma(\lambda)$ имеет порядок такой же как $N_\Gamma(\lambda)$. Поэтому для общей группы Γ нельзя исключать и ограниченности функции $N_\Gamma(\lambda)$ (см. [4]), что противоречит ранее высказываемой гипотезе Рельке-Сельберга: *)

$$N_\Gamma(\lambda) \longrightarrow \infty\ . \tag{3}$$

С другой стороны, последняя гипотеза проверена для многих групп, хотя и специальных, имеющих нетривиальный соизмеритель (см. [5], [6]). Типичный результат здесь такой, для произвольной Γ_1 найдется подгруппа конечного индекса $\Gamma\subset\Gamma_1$, для которой (3) верно.

В настоящей работе мы продолжим исследование спектра $A(\Gamma)$ для некоторых Γ с нетривиальными соизмерителями и приведем простой пример групп, для которых можно более эффективно оценить рост $N_\Gamma(\lambda)$.

Перейдем теперь к основной части работы. Фуксова группа первого рода Γ характеризуется условием конечности объема своей фундаментальной области Γ относительно инвариантной меры на H. Это конечнопорожденная дискретная подгруппа группы $PSL(2,\mathbb{R})$ - группы конформных гомеоморфизмов H. Группа Γ задается образующими:

$$\begin{aligned}&A_1,A_2,\dots,A_g,\ B_1,B_2,\dots,B_g \text{ - гиперболические},\\ &V_1,\dots,V_h \text{ - параболические},\\ &E_1,\dots,E_k \text{ - эллиптические}\end{aligned} \tag{4}$$

и соотношениями

$$[A_1,B_1]\dots[A_g,B_g]E_1\dots E_k V_1\dots V_h = 1\,,$$
$$E_1^{n_1} = E_2^{n_2} = \dots = E_k^{n_k} = 1$$

(мы считаем, что $h\geq 1$).

---

*) В работе [7] показано, что для многообразия с каспами M, метрика которого в компактной части M выбирается в общем положении, спектр соответствующего лапласиана не содержит дискретного на непрерывном. Вопрос состоит в том, что в какой мере метрика локально симметрического пространства $\Gamma\setminus H$ для общей фуксовой группы первого рода Γ является произвольной в этом смысле.

Как говорят в этом случае Γ имеет сигнатуру $(g, n_1, \ldots, n_k; h)$. Хорошо известно, что любой эллиптический (параболический) элемент из Γ сопряжен степени одного из E_j (V_j) в Γ и никакие нетривиальные степени образующих (4) не сопряжены в Γ. Фундаментальная область $F = \Gamma \backslash H$, компактифицированная добавлением h-точек, снабжается естественной аналитической структурой и превращается в компактную риманову поверхность рода g. Объем F вычисляется по формуле Гаусса-Бонне

$$|F| = 2\pi \left[2g - 2 + h + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \right].$$

Мы будем интересоваться специальными подгруппами конечного индекса общей группы Γ, которые будем называть обобщенными циклоидальными. Напомним, что циклоидальный подгруппой $\mathring{\Gamma}$ модулярной группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ называется подгруппа конечного индекса с сигнатурой $(\mathring{g}, \mathring{n}_1, \ldots, \mathring{n}_\ell; 1)$. Циклоидальные подгруппы были расклассифицированы Г.Петерсоном и изучались многими авторами. В спектральной теории автоморфных функций они также играют важную роль, как пример групп, в классе которых удается доказать существование малых собственных значений автоморфных лапласианов, не являющихся вычетами рядов Эйзенштейна (см. [8]).

Обобщенной циклоидальной подгруппой $\mathring{\Gamma}$ группы Γ назовем подгруппу с сигнатурой $(\mathring{g}, \mathring{n}_1, \ldots, \mathring{n}_\ell; \mathring{h})$, где $\mathring{h} = h$. Вопрос о существовании обобщенной циклоидальной подгруппы заданного индекса d в группе Γ является специализацией общей проблемы существования подгруппы $\mathring{\Gamma}$ с заданной сигнатурой. $(\mathring{g}, \mathring{n}_1, \ldots, \mathring{n}_\ell; \mathring{h})$. В общей ситуации эта проблема пока еще не решена, так как она связана с известной проблемой Гурвица о реализуемости специальных накрытий (см. [9]). Напомним один из возможных подходов к решению этой проблемы. Пусть Γ имеет сигнатуру $(g, n_1, \ldots, n_k; h)$ и $[\Gamma : \mathring{\Gamma}] = d$, $\mathring{\Gamma} \subset \Gamma$. Хорошо известно, что две сигнатуры связаны следующим соотношением Римана-Гурвица

$$2\mathring{g} - 2 + \mathring{h} + \sum_{j=1}^{\ell} \left(1 - \frac{1}{\mathring{n}_j}\right) = d\left[2g - 2 + h + \sum_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{n_j}\right)\right],$$

что эквивалентно по формуле Гаусса-Бонне равенству $|\mathring{F}| = d|F|$, где $\mathring{F}$ - фундаментальная область группы $\mathring{\Gamma}$. Кроме соотношения (5) выполняются неравенства:

$$g \leq \mathring{g}, \quad h \leq \mathring{h} \leq dh \tag{6}$$

и условия делимости: каждое $\mathring{n}_j$ делит какое-либо n_i. Пусть $\mathring{n}_1, \ldots, \mathring{n}_\ell$ максимальное множество различных $\mathring{n}_j$ и каждое $\mathring{n}_q$ встречается b_q раз, $1 \leq q \leq \ell$. Положим

$$\varepsilon_{iq} = \begin{cases} 0, & \mathring{n}_q \nmid n_i \\ 1, & \mathring{n}_q \mid n_i \end{cases}, \qquad \Delta_{iq} = \frac{n_i}{\mathring{n}_q} .$$

Рассмотрим диофантову систему уравнений

$$\exists x_{iq} \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow \begin{cases} \sum_i \varepsilon_{iq} x_{iq} = b_q \\ \sum_q \Delta_{iq} x_{iq} = d \end{cases} \tag{7}$$

Оказывается (см. [9]), разрешимость системы (7) вместе с соотношениями (5), (6) является необходимым и достаточным условиями для существования в Γ подгруппы $\mathring{\Gamma}$ с указанной сигнатурой и индексом. Во многих случаях разрешимость системы (7) выполняется автоматически, и соотношение Римана-Гурвица оказывается определяющим, откуда следует тривиально существование обобщенных циклоидальных подгрупп.

Перейдем теперь к собственно спектральной части работы. В [5] было доказано следующее утверждение: пусть $\mathring{\Gamma} \subset \Gamma$ - нормальная подгруппа индекса $d < \infty$ (Γ как и ранее, произвольная фуксова группа первого рода с $h \geqslant 1$), тогда при больших λ выполняется неравенство (неравенство главных членов асимптотики):

$$N_{\mathring{\Gamma}}(\lambda) \geqslant \Big(\sum_{\chi \in (\mathring{\Gamma} \setminus \Gamma)^*} \dim^2 V(\chi) \Big) \frac{|\mathring{F}|}{4\pi d} \lambda , \quad \lambda \to \infty ,$$

где $(\mathring{\Gamma} \setminus \Gamma)^*$ - множество всех регулярных представлений фактор-группы $\mathring{\Gamma} \setminus \Gamma$. Регулярность представления здесь означает следующее: χ - - унитарное конечномерное представление продолжается с $\mathring{\Gamma} \setminus \Gamma$ на Γ и обладает тем свойством, что спектр соответствующего автоморфного лапласиана $A(\Gamma; \chi)$ - чисто дискретный (это зависит от значений χ на образующих параболических подгрупп Γ, подробнее см. в [5]), V - пространство представления χ. Для обобщенной циклоидальной подгруппы этот результат существенно упрощается и усиливается, что является основным замечанием данной работы.

ТЕОРЕМА. Для функции распределения дискретного спектра оператора $A(\mathring{\Gamma})$ выполняется асимптотическая формула

$$N_{\mathring{\Gamma}}(\lambda) \sim N_{\Gamma}(\lambda) + \frac{|F_0|}{4\pi} \frac{(d-1)}{d} \lambda , \quad \lambda \to \infty ,$$

где $\mathring{\Gamma}$ - обобщенная циклоидальная подгруппа индекса d в Γ.

СЛЕДСТВИЕ. Если в условии теоремы для $N_\Gamma(\lambda)$ выполняется формула Вейля (I), то она выполняется и для $N_{\mathring{\Gamma}}(\lambda)$.

Приведем краткое доказательство теоремы. В основе доказательства лежит простая идея о том, что для Γ и $\mathring{\Gamma}$ из условия теоремы, система рядов Эйзенштейна, а значит и автоморфная матрица рассеяния, в существенном, та же самая. Сравним эти ряды. Имеем для $\operatorname{Re} s > 1$:

$$E_\alpha(z;s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\alpha \setminus \Gamma} \operatorname{Im}^s(\sigma_\alpha^{-1}\gamma z), \quad \mathring{E}_\alpha(z,s) = \sum_{\gamma \in \mathring{\Gamma}_\alpha \setminus \mathring{\Gamma}} \operatorname{Im}^s(\mathring{\sigma}_\alpha^{-1}\gamma z),$$

$1 \leqslant \alpha \leqslant h$. Для пояснения введем следующие объекты. Пусть $z_1,\dots,z_h$ – параболические вершины (существенные) для Γ и $\mathring{\Gamma}$. Из определения $\mathring{\Gamma}$ следует, что эти вершины можно выбрать общими для Γ и $\mathring{\Gamma}$. Далее для $1 \leqslant \alpha \leqslant h$, $\sigma_\alpha \infty = z_\alpha$, $\mathring{\sigma}_\alpha \infty = z_\alpha$; $\sigma_\alpha, \mathring{\sigma}_\alpha \in PSL(2,\mathbb{R})$, $\Gamma_\alpha = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z_\alpha = z_\alpha\}$, $\mathring{\Gamma}_\alpha = \{\gamma \in \mathring{\Gamma} \mid \gamma z_\alpha = z_\alpha\}$, $\sigma_\alpha^{-1}\Gamma_\alpha\sigma_\alpha = \Gamma_\infty$, $\mathring{\sigma}_\alpha^{-1}\mathring{\Gamma}_\alpha\mathring{\sigma}_\alpha = \Gamma_\infty$, Γ_∞ -порождена образующей $z \to z+1$, $z \in H$. Очевидно $\mathring{\Gamma}_\alpha$ – подгруппа Γ_α. Пусть γ_α – образующая Γ_α, $\mathring{\gamma}_\alpha$ – образующая $\mathring{\Gamma}_\alpha$, тогда $\exists\, k_\alpha \in \mathbb{Z}^+$ такой, что $\mathring{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha^{k_\alpha}$. Нетрудно видеть, что $\exists\, \rho_\alpha \in PSL(2,\mathbb{R})$ такой, что $\sigma_\alpha = \mathring{\sigma}_\alpha \rho_\alpha$, более того, $\rho_\alpha z = k_\alpha^{-1} z$, $\forall z \in H$. Для указанных рядов Эйзенштейна хорошо известны разложения Фурье относительно параболических подгрупп $\Gamma_\alpha, \mathring{\Gamma}_\alpha$, соответственно. Мы ограничимся здесь лишь указанием постоянных членов, содержащих матрицу рассеяния и определяющих асимптотику рядов Эйзенштейна в параболических вершинах. Имеем

$$\begin{aligned} E_\alpha(\sigma_\beta z, s) &= \delta_{\alpha\beta} y^s + \varphi_{\alpha\beta}(s) y^{1-s} + \dots, \\ \mathring{E}_\alpha(\mathring{\sigma}_\beta z, s) &= \delta_{\alpha\beta} y^s + \mathring{\varphi}_{\alpha\beta}(s) y^{1-s} + \dots, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, для $z \in H$, $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть z (напомним $H = \{z \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$).

Заметим теперь, что каждая разность $\mathring{E}_\alpha(z,s) - E_\alpha(z,s)\, k_\alpha^{-s}$ является при $\operatorname{Re} s > 1$ ограниченной функцией на $\mathring{F}$, собственной для оператора метрики H. В силу самосопряженности автоморфного лапласиана $A(\mathring{\Gamma})$ эти разности равны тождественно нулю. Отсюда и из (8) получаем важное для нас соотношение между матрицами рассеяния

$$\mathring{\varphi}_{\alpha\beta}(s) = \varphi_{\alpha\beta}(s)\, k_\alpha^{1-2s} \tag{9}$$

и, следовательно, соотношение на их определители

$$\varphi_{\mathring{\Gamma}}(s) = \varphi_\Gamma(s) \prod_{\alpha=1}^{h} k_\alpha^{1-2s}. \tag{10}$$

Для окончания доказательства теоремы теперь достаточно воспользоваться асимптотической формулой (2), которая, кстати, называется формулой Вейля-Сельберга, и является следствием общей формулы следа Сельберга (см. [I], [5]). Эту формулу нужно применить для Γ и $\mathring{\Gamma}$ и сравнить полученные результаты.

Литература

I. S e l b e r g A. Harmonic analysis. Teil.2. Vorlesungsnie derschrift. Göttingen, 1954, 765.

2. Ф а д д е е в Л.Д. Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского. - Тр.ММО, I967, т.I7, с.323-349.

3. P h i l l i p s R.S., S a r n a k OP. On cusp forms for co-finite subgroups of $PSL(2,\mathbb{R})$. - Invent.math., 1985, vol.80, p.339-364.

4. D e s h o n i l l e r s J.-M., Iwaniec H., Phillips R.S., Sarnak P. Maass cusp forms. - Proc.Nat.Acad.Sci., 1985, vol.82, p.3533-3534.

5. В е н к о в А.Б. Спектральная теория автоморфных функций. - Тр.Мат.ин-та АН СССР, I98I, т.I53, с.3-I7I.

6. V e n k o v A.B., Spectral theory of automorphic functions for Fuchsian groups of the first kind and its applications to some classical problems of the monodromy theory. - In: Proc.Int.Congr.Math., Warszawa, Aug.16-24, 1983, vol.2. Warszawa; Amsterdam e.a., 1984, p.8909-919.

7. C o l i n d e V e r d i e r e Y. Pseudo-Laplaciens. I. - Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 1982, vol.32(3), 275-286.

8. З о г р а ф П.Г. О спектре автоморфных лапласианов в пространствах параболических функций. - Докл. АН СССР, I983,т.269, № 4, с.802-805.

9. K u l k a r n i R.S. An entension of a theorem of Kurosh and applications to Fucshien groups. - Mich. Math. J., 1983, vol.30, p.259-272.