И. Я. Билый, Метод параболического уравнения в анизотропной теории упругости, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1981, том 117, 27–38

И.Я.Билый

МЕТОД ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Известно, что основные понятия и формулы лучевого метода с успехом обощаются на случаи как изотропных, так и анизотропных упругих сред [I] . Однако, хорошо развитая в акустической теории техника локальных разложений применялась лишь в изотропной теории упругости [2] . В настоящей статье изучаются возможности метода параболического уравнения Леонтовича-Фока применительно к плоской задаче дифракции анизотропной упругой волны на гладком выпуклом контуре.

I. Постановка задачи.

Рассмотрим плоскую неоднородную анизотропную среду, характеризуемую тензором упругих постоянных $a_{ik,jl}(x)$ и плотностью $\rho(x)\,(i,j,k,l=1,2;\ x=(x^1,x^2))$. Зависимость процессов распространения и дифракции волн от времени t будем считать гармонической (множитель $exp\{-i\omega t\}$ везде опускается), тогда система уравнений теории упругости примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(a_{ik,jl}\frac{\partial U^j}{\partial x^l}\right)+\omega^2\rho U^i=0 \qquad i,j,k,l=1,2 \tag{I.I}$$

где U^j - составляющие вектора смещений, $\omega\to\infty$ - большой параметр задачи. Напомним, что компоненты тензора упругих постоянных удовлетворяют соотношениям симметрии:

$$a_{ik,jl}=a_{ki,jl}=a_{ik,lj}=a_{jl,ik}$$

и положительной определенности:

$$a_{ik,jl}\,\varepsilon_{ik}\,\varepsilon_{jl}\geqslant\alpha\sum_{i,k=1,2}(\varepsilon_{ik})^2 \qquad \alpha>0.$$

Рассматриваемая среда занимает внешность ограниченной области Ω на плоскости (x^1,x^2) . Гладкая граница области Ω , кривая S (рис.I), задается уравнениями

$$S:\quad x^k=X^k(s)\quad s\in[0,L]\ ,\ k=1,2 \tag{I.2}$$

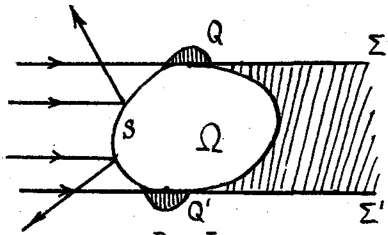

Рис.I

где S – длина дуги, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки $x \in S$. Контур S будем считать выпуклым в том смысле, что он имеет всюду положительный радиус кривизны * по отношению к падающей волне $\vec{U}^{(n)}$, задаваемой своим лучевым разложением [I] :

$$\vec{U}^{(n)} = e^{i\omega\tau_n(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{U}_n^{(n)}(x)(-i\omega)^{-n}. \qquad (I.3)$$

Пусть поле лучей $\vec{U}^{(n)}$ регулярно, и имеется два предельных луча Σ и Σ' , касающихся S соответственно в точках Q и Q' . Мы будем строить отраженную волну $\vec{U}^{(отр)}$ в малой окрестности точки Q , поэтому примем ее за начало координат и положим $\tau_n(x)\big|_{x=0}=0$. Для простоты будем рассматривать краевые условия

$$\vec{U}\big|_S = 0. \qquad (I.4)$$

2. Трансверсальные координаты.

Прежде чем перейти непосредственно к построению поля отраженной волны в окрестности точки O введем более естественную для данной задачи, чем декартова, систему координат, связанную с контуром S .

Определим функции Гамильтона $H_1(x,p)$ и $H_2(x,p)$ как корни уравнения

$$\det \| a_{ij}^{k\ell} p_k p_\ell - \rho\lambda\delta_{ij} \| = 0 \qquad (2.I)$$

относительно неизвестного λ .
(здесь введено обозначение $a_{ij}^{k\ell} = a_{ik,j\ell}$).

Пусть для определенности гамильтониан H_1 соответствует $\vec{U}^{(n)}$, т.е. $\tau_n(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$H_1(x, \nabla\tau_n) = 1 \qquad (2.2)$$

---

* Это понятие будет уточнено позднее (см.конец раздела 3)

Поскольку характеристики уравнения (2.2) являются экстремалями соответствующего функционала $\int L\, d\tau$ [I], их поле можно строить, задавая начальное направление на кривой S. Возьмем это направление касательным к S, а для функции поля $\varphi(x)$ положим $\varphi(0)=0$. Таким образом построено поле лучей соскальзывания с функцией поля $\varphi(x)$. Обозначим через τ квазидлину дуги кривой, отсчитываемую от точки O:

$$\tau=\tau(s)=\varphi(X(s)) \tag{2.3}$$

и построим на S поле вектора $\vec{\xi}(\tau)$, ортогонального градиенту $\nabla\varphi$ (рис.2)

$$\xi^k\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}=0.$$

Беря τ в качестве нового параметра, задающего S введем трансверсальные координаты (τ,n) по формуле:

$$x^k=X^k(\tau)+n\xi^k(\tau) \qquad k=1,2. \tag{2.4}$$

Вектор $\vec{\xi}(\tau)$ нормируем так чтобы выполнялось равенство:

$$\left.\frac{\partial(x^1,x^2)}{\partial(\tau,n)}\right|_{n=0}=1.$$

Это можно сделать, т.к. система координат (τ,n) регулярна в некоторой окрестности кривой S (градиент $\nabla\varphi$ не может быть ортогонален соответствующему лучу в силу положительной определенности $a_{ij}^{k\ell}$).

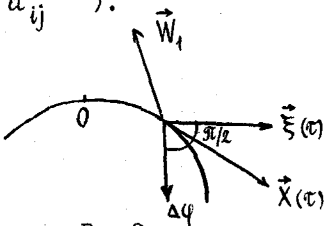

Рис.2

Введем еще несколько необходимых обозначений. Обозначим через $\vec{W}_1(x)$ вектор смещений, отвечающий полю лучей соскальзывания и нормированный специальным образом:

$$\rho|\vec{W}_1|^2=1.$$

Векторы $\vec{W}_1(x)$ и $\vec{U}_0^{(n)}(x)$ удовлетворяют уравнению

$$a_{ij}^{k\ell}\,p_k p_\ell V^j-\rho V^i=0 \qquad i,k,j,\ell=1,2, \tag{2.5}$$

где соответственно полагается $p_k=\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$ и $p_k=\frac{\partial\tau_n}{\partial x^k}$. Заметим, что в точке O $\vec{W}_1$ и $\vec{U}_0^{(n)}$ коллинеарны, т.к. по построению

$$\nabla\tau_n\big|_{x=0}=\nabla\varphi\big|_{x=0}$$

Обозначим $\vec{W}_1(\tau) \overset{def}{=} \vec{W}_1(\tau, n)\big|_{n=0}$.

3. Дополнительное поле лучей.

Введем в рассмотрение еще одно поле лучей, связанное с кривой S и в некотором смысле двойственное полю лучей соскальзывания.

Перейцем к координатам (τ, n) и рассмотрим уравнение (2.5) для лучей соскальзывания. По построению координатной системы (τ, n)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}\bigg|_{n=0} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\bigg|_{n=0} = 1,$$

отсюда получаем при $x \in S$

$$[a^{\tau\tau}_{ij} - \rho g_{ij}]\, W^j_1(\tau) = 0$$

или в векторной форме

$$L(\tau)\vec{W}_1(\tau) = 0. \tag{3.1}$$

Здесь $g_{ij}(x) = \frac{\partial x^k}{\partial q^i}\frac{\partial x^k}{\partial q^j}$ $(q^1 = \tau, q^2 = n)$ – компоненты евклидова метрического тензора.

Построим теперь поле лучей, соответствующее гамильтониану H_2, причем на функцию поля ψ наложим краевое условие

$$\psi\big|_n = \tau \qquad \text{или}$$
$$\psi_\tau\big|_{n=0} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}\bigg|_{n=0} = 1, \qquad \psi(0) = 0. \tag{3.2}$$

Будем считать, что это можно сделать единственным способом, причем построенные лучи уходят внутрь среды под ненулевым углом к вектору $\frac{d}{d\tau}\vec{X}(\tau)$, а вещественная функция $\psi_n(\tau) = \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big|_{n=0}$ нигде на S не обращается в нуль.

Соответствующий вектор поляризации $\vec{W}_2(\tau, n)$ (пока не нормированный) удовлетворяет системе уравнений

$$(a^{k\ell}_{ij}\, \psi_k \psi_\ell - \rho g_{ij})\, W^j_2 = 0.$$

Обозначим $\vec{W}_2(\tau) \overset{def}{=} \vec{W}_2(\tau, n)\big|_{n=0}$. Оказывается, что для любого τ векторы $\vec{W}_1(\tau)$ и $\vec{W}_2(\tau)$ линейно независимы. Прежде, чем показать это сформулируем важное для дальнейших рассмотрений

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Уравнение

$$L(\tau)\vec{U}(\tau)=\vec{N}(\tau), \qquad \text{где } N_i(\tau)=(a_{ij}^{n\tau}+a_{ij}^{\tau n})W_1^j(\tau)$$

разрешимо относительно $\vec{U}$ при любом τ, т.е. имеет место тождество

$$a_{ij}^{n\tau}W_1^j(\tau)W_1^i(\tau)=0. \tag{3.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для произвольной пары $p=(p_n,p_\tau)$ вектор $\vec{W}(p)$ определяется равенствами.

$$a_{ij}^{k\ell}p_k p_\ell W^j(p)-\rho H_1(p)g_{ij}W^j(p)=0. \tag{3.4}$$

$$|\vec{W}(p)|^2\rho=1.$$

Тогда, очевидно,

$$H_1(p)=a_{ij}^{k\ell}p_k p_\ell W^j(p)W^i(p). \tag{3.5}$$

Продифференцируем (3.5) по p_n и, пользуясь (3.4), получим:

$$\frac{\partial H_1(p)}{\partial p_n}=2a_{ij}^{nk}p_k W^j(p)W^i(p). \tag{3.6}$$

Положим теперь в (3.6) $H=0$, $p_n=\varphi_n=0$, $p_\tau=\varphi_\tau=1$. Левая часть (3.6) равна нулю в силу того, что лучи соскальзывания касаются S', и предложение доказано.

Докажем теперь

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Векторы $\vec{W}_1(\tau)$ и $\vec{W}_2(\tau)$ линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим обратное, тогда

$$(a_{ij}^{k\ell}\varphi_k\varphi_\ell-\rho g_{ij})W_1^j(\tau)=0.$$

Но в силу (3.I) и (3.2) это означает, что

$$(a_{ij}^{\tau n}+a_{ij}^{n\tau}+a_{ij}^{nn}\varphi_n)W_1^j(\tau)=0.$$

Домножим эти равенства на $W_1^i(\tau)$, просуммируем по i и воспользуемся Предложением I. В результате получим:

$$a_{ij}^{nn}W_1^j(\tau)W_1^i(\tau)=0,$$

чего не может быть в силу положительной определенности тензора $a_{ij}^{k\ell}$. Предложение 2 доказано.

Теперь можно нормировать вектор $W_2(\tau)$ потребовав выполнения соотношения

$$L(\tau)\vec{W}_2(\tau) = \vec{N}(\tau) \qquad \text{(см. Предложение I)}$$

В заключение раздела введем понятия эффективного радиуса кривизны и скорости распространения волны $U^{(n)}$ вдоль S.

Пусть

$$L[0,1](\tau) = \left[\frac{\partial}{\partial n} L(n,\tau)\right]\Big|_{n=0} \quad -$$

линейный оператор с матричными элементами

$$(L[0,1](\tau))_{ij} = \left[\frac{\partial}{\partial n}(a_{ij}^{\tau\tau}(n,\tau) - \rho g_{ij})\right]\Big|_{n=0}.$$

Определим величины $R(\tau)$ и $C(\tau)$ по формулам

$$\frac{2}{R(\tau)} = (L[0,1]\vec{W}_1,\vec{W}_1)[(L(\tau)\vec{W}_2,\vec{W}_2) + (a^{nn}\vec{W}_1,\vec{W}_1)]^2$$

$$C(\tau) = [(L(\tau)\vec{W}_2, W_2) + (a^{nn}\vec{W}_1,\vec{W}_1)]^3, \tag{3.7}$$

где $(a^{nn})_{ij} = a_{ij}^{nn}$.

Назовем $R(\tau)$ эффективным радиусом кривизны S по отношению к $\vec{U}^{(n)}$, а $C(\tau)$ – скоростью распространения H_1 – волн вдоль S.

4. Параболическое уравнение Леонтовича-Фока.

Запишем уравнения теории упругости в трансверсальных координатах (τ, n) :

$$[\nabla_k a_{ij}^{k\ell}\nabla_\ell + \omega^2\rho g_{ij}]\, U^j = 0. \tag{4.I}$$

Здесь ∇_k – оператор ковариантного дифференцирования. Будем искать решение (4.I) в окрестности точки $x=0$ в виде

$$\vec{U} = e^{i\omega\tau}\vec{V}(\tau, n,\omega), \tag{4.2}$$

предполагая, что [3]

$$\left|\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial\tau^2}\right| \gg \left|\frac{\partial\vec{V}}{\partial\tau}\right| \gg |\vec{V}|, \quad \left|\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial n^2}\right| \gg \left|\frac{\partial\vec{V}}{\partial n}\right| \gg |\vec{V}|$$

Подставляя (4.2) в (2.I) и свертывая известные тензоры получаем уравнение для $\vec{V}$:

$$\omega^2 L(\tau,n)\vec{V} = i\omega\left[\Lambda^k \frac{\partial\vec{V}}{\partial q^k} + F^\tau\vec{V}\right] + \tag{4.3}$$
$$+ a^{k\ell}\frac{\partial^2\vec{V}}{\partial q^k\partial q^\ell} + F^\ell\frac{\partial\vec{V}}{\partial q^\ell} + B\vec{V},$$

где $L_{ij}(\tau,n) = a_{ij}^{\tau\tau}(\tau,n) - \rho(\tau,n)g_{ij}(\tau,n)$;

$$\Lambda_{ij}^k = a_{ij}^{\tau k} + a_{ij}^{k\tau}\ ; \quad [a^{k\ell}]_{ij} = a_{ij}^{k\ell},$$

а F_{ij}^ℓ и B_{ij} выражаются через $a_{ij}^{k\ell}$ и коэффициенты связности $\Gamma_{\ell m}^k$.

Введем локальные переменные $\mathfrak{z}$ и ν по формулам [3] :

$$\mathfrak{z} = \omega^{1/3}C_\mathfrak{z}\tau = \frac{\omega^{1/3}\tau}{\sqrt[3]{2R^2(0)C(0)}} \tag{4.4}$$
$$\nu = \omega^{2/3}C_\nu n = \frac{2^{1/3}\omega^{2/3}n}{\sqrt[3]{C(0)R(0)}}$$

(см. (3.7)).

Разложим коэффициенты системы (4.3) в ряды по степеням n, обозначая коэффициенты разложений при n^α через $L[0,\alpha](\tau)$ ($L(0,0) = L(\tau)$), $\Lambda[0,\alpha]$ и т.д. (ноль слева в скобках показывает, что разложение проведено только по n), и перейдем к переменной ν. После этого при старшей степени ω^2 получим уравнение

$$L(\tau)\vec{V} = 0, \tag{4.5}$$

которому удовлетворяет любая вектор-функция вида:

$$\vec{V}_0 = g_0(\mathfrak{z},\nu)\vec{W}_1(\tau). \tag{4.6}$$

Попытаемся уточнить это приближение с помощью поправки $O(\omega^{-1/3})$, полагая

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega^{-1/3}\vec{V}_1 .$$

При $\omega^{5/3}$ получим уравнение для $\vec{V}_1$:

$$L(\tau)\vec{V}_1 = ic_\nu\frac{\partial g_0}{\partial\nu}\vec{N}(\tau) \tag{4.7}$$

откуда

$$V_1 = g_1(b,\nu)\vec{W}_1(\tau) + ic_\nu \frac{\partial g_0}{\partial \nu}\vec{W}_2(\tau), \tag{4.8}$$

т.е. на функцию $g_0(b,\nu)$ по-прежнему не накладывается никаких ограничений, и появляется новая произвольная функция $g_1(b,\nu)$.

Продолжим уточнение решения:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \omega^{-1/3}\vec{V}_1 + \omega^{-2/3}\vec{V}_2$$

и придем к уравнению для $\vec{V}_2$:

$$L(\tau)\vec{V}_2 = ic_\nu \frac{\partial g_1}{\partial \nu}\vec{N}(\tau) + c_\nu^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \nu^2}[\Lambda^n(\tau)\vec{W}_2(\tau) + a^{nn}(\tau)\vec{W}_1(\tau)] +$$

$$+ 2ic_b \frac{\partial g_0}{\partial b} a^{\tau\tau}(\tau)\vec{W}_1(\tau) + \frac{\nu}{c_\nu} g_0 L[0,1]\vec{W}_1(\tau). \tag{4.9}$$

Будем искать $\vec{V}_2$ в виде

$$\vec{V}_2 = g_2(b,\nu)\vec{W}_1(\tau) + ic_\nu \frac{\partial g_1}{\partial \nu}\vec{W}_2(\tau) + \vec{M}_2(b,\nu). \tag{4.10}$$

Подставим (2.10) в (4.9) и получим уравнение для $\vec{M}_2(b,\nu)$, в котором окончательно перейдем к переменным (b,ν) , разлагая правую часть по степеням τ :

$$L(0)\vec{M}_2 = c_\nu^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \nu^2}\left[\Lambda^n(0)\vec{W}_2(0) + a^{nn}(0)\vec{W}_1(0)\right] +$$

$$+ 2ic_b \frac{\partial g_0}{\partial b} a^{\tau\tau}(0)\vec{W}_1(0) + \frac{\nu}{c_\nu} g_0 L[0,1](0)\vec{W}_1(0) + O(\omega^{-1/3}). \tag{4.11}$$

Уравнение (4.11) разрешимо относительно $\vec{M}_2$, если главное приближение правой части ортогонально вектору $W_1(0)$, т.е. если выполняется параболическое уравнение Леонтовича-Фока [4] :

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial \nu^2} + \nu g_0 + i\frac{\partial g_0}{\partial b} = 0. \tag{4.12}$$

Если уравнение (4.12) удовлетворено, то $\vec{M}_2$ может быть найден в виде:

$$\vec{M}_2 = h_2(g_0)\vec{W}_2(0),$$

где h_2 - линейный дифференциальный оператор по b и ν с полиномиальными коэффициентами.

Продолжая этот процесс можно получить формальное решение (4.I) вида:

$$\vec{U} = e^{i\omega\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_k\, \omega^{-k/3}, \tag{4.13}$$

где $$\vec{V}_k = g_k(b,\nu)\vec{W}_1(\tau) + i c_\nu \frac{\partial g_{k-1}}{\partial \nu}\vec{W}_2(\tau) + h_k(g_0,\dots,g_{k-2})\vec{W}_2(0)$$

$g_{-2} = g_{-1} = 0$, а функции $g_1, g_2, \dots$ удовлетворяют уже неоднородному параболическому уравнению. Заметим, что к тому же результату можно прийти, взяв за основу анзац

$$\vec{U} = e^{i\omega\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_k(b,\nu)\, \omega^{-k/3}. \tag{4.14}$$

В этом случае вектор-функции имеют такой вид:

$$\vec{V}_k(b,\nu) = g_k(b,\nu)\vec{W}_1(0) + \tilde{h}_k(g_0,\dots,g_{k-1})\vec{W}_2(0).$$

5. Волновое поле в окрестности точки 0. Формула Фока.

Отраженное поле в окрестности точки 0 при краевых условиях (I.4) может быть представлено в виде

$$\vec{U}_{\text{отр.}} = \vec{U}^{(\tau)} + \vec{U}^{(\psi)}, \tag{5.1}$$

где $\vec{U}^{(\tau)}$ – ряд (4.13), а

$$\vec{U}^{(\psi)} = e^{i\omega\psi(x)} \sum_{k=1}^{\infty} \vec{U}_k^{(\psi)} (-i\omega^{1/3})^{-k} \tag{5.2}$$

– ряд лучевого типа имеющий поправочный характер, причем начальные данные для $\vec{U}_k^{(\psi)}$ на поверхности S определяются через граничные значения $\vec{U}^{(n)}$ и $\vec{U}_j^{(\tau)}$, $j<k$.

Построим отраженное поле в главном, т.е. найдем $U_0^{(\tau)}$ и $U_1^{(\psi)}$. Для этого, прежде всего, необходимо представить $\vec{U}^{(n)}$ в виде (4.13), что легко сделать, разложив эйконал τ_n (а затем и $\vec{U}_n^{(n)}$) по степеням τ и n и перейдя к переменным b и ν:

$$\tau_n = \tau + \omega^{-1}\left(b\nu - \frac{b^3}{3}\right) + O\left(\omega^{-4/3}\right)$$

и

$$\vec{U}^{(n)} = e^{i\omega\tau} e^{i\left(b\nu - \frac{b^3}{3}\right)} \vec{U}_0^{(n)}(0) + \vec{O}\left(\omega^{-1/3}\right) \tag{5.3}$$

Воспользуемся известной формулой [3]

$$e^{i(b\nu-\frac{b^3}{3})}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathcal{L}} v(\zeta-\nu)e^{ib\zeta}\,d\zeta, \tag{5.4}$$

где v – функция Эйри в обозначении В.А.Фока, а $\mathcal{L}$ – контур (рис.3) интегрирование по которому ведется так:

по лучу ℓ_0 интегрируется функция $v(\zeta-\nu)e^{ib\zeta}=\frac{1}{2i}(W_1-W_2)e^{ib\zeta}$

по лучу ℓ_1 : $\frac{1}{2i}W_1(\zeta-\nu)e^{ib\zeta}$

по лучу ℓ_2 : $-\frac{1}{2i}W_2(\zeta-\nu)e^{ib\zeta}$.

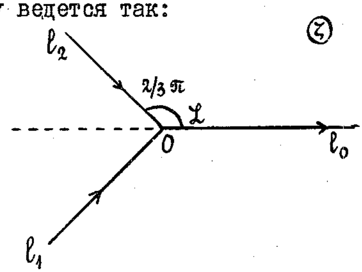

Рис.3

Таким образом

$$\vec{U}^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{i\omega\tau}\int\limits_{\mathcal{L}} v(\zeta-\nu)e^{ib\zeta}\,d\zeta\,\vec{U}_0^{(n)}(0)+\vec{O}(\omega^{-1/3}).$$

Откуда однозначно находится

$$\vec{U}_0^{(\tau)}=-\sqrt{\frac{\rho(0)}{\pi}}\,\left|\vec{U}_0^{(n)}(0)\right|\int\frac{v(\zeta)}{W_1(\zeta)}W_1(\zeta-\nu)e^{ib\zeta}\,d\zeta\,\vec{W}_1(\tau), \tag{5.5}$$

а для суммарного поля имеет классическую формулу Фока [4] :

$$\vec{U}^{(n)}+\vec{U}_{\text{отр.}}=\frac{e^{i\omega\tau}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathcal{L}}\left[v(\zeta-\nu)-\frac{v(\zeta)}{W_1(\zeta)}W_1(\zeta-\nu)\right]e^{ib\zeta}\,d\zeta\,\vec{U}_0^{(n)}(0)+ \\ +\vec{O}(\omega^{-1/3}). \tag{5.6}$$

В случае краевых условий отсутствия напряжений на $S\left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}=0\right)$ в (3.6) отношение $v(\zeta)/W_1(\zeta)$ надо заменить на отношение производных $v'(\zeta)/W_1'(\zeta)$.

Вычислим теперь главное приближение $\vec{U}^{(\varphi)}$. Формулы лучевого метода [I] дают выражение для $\vec{U}^{(\varphi)}$ в лучевых координатах (φ,τ) :

$$\vec{U}(\varphi)=\frac{e^{i\omega\varphi}}{-i\omega^{1/3}}\,\frac{f(\tau,b)}{\sqrt{J(\tau,\varphi)}}\,\vec{S}(\tau,n)+\vec{O}(\omega^{-1/3}),$$

где $J(\tau,\varphi)$ – геометрическая расходимость дополнительного поля лучей, $\vec{S}(\tau,n)$ – вектор поляризации, коллинеарный вектору $\vec{W}_2(\tau,n)$

и имеющий норму $[\rho(\tau,n)]^{1/2}$, а функция $f(\tau,b)$ подлежит определению.

Рассматривая формулы (4.8) и (5.6) на поверхности S, т.е. при $\nu=0$ легко убедиться что краевые условия (I.4) диктуют однозначный выбор $f(\tau,b)$:

$$f(\tau,b)=-\frac{4}{3}C_\nu\left[\frac{\rho(0)\rho(\tau,\tau)J(\tau,\tau)}{\pi}\right]^{1/2}|\vec{W}_2(\tau)||\vec{U}_0^{(n)}|\,Q(b),$$

где функция $Q(b)$ определяется формулой

$$Q(b)=\int\limits_{l_2\cup l_0}\frac{e^{ib\zeta}}{W_1(\zeta)}\,d\zeta$$

(подобная функция встречалась уже в работах В.А.Фока [5]).

Итак $\vec{U}^{(\tau)}$ и $\vec{U}^{(\psi)}$ в главном определены, дальнейшие приближения (с большим объемом вычислений) также могут быть получены описанным методом.

Автор признателен В.М.Бабичу за внимание к работе.

Литература

I. Б а б и ч В.М. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в случае упругой неоднородной анизотропной среды. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн (ЛОМИ и ЛГУ) I96I, сборник У с.36-46.

2. Ч и х а ч е в Б.А. Дифракция высокочастотной упругой волны на границе двух неоднородных сред. Вестн.ЛГУ, I975, № I0, с.I42-I46.

3. Б а б и ч В.М., К и р п и ч н и к о в а Н.Я. Метод пограничного слоя в задачах дифракции. Изд-во ЛГУ, Л., I974, I24 с.

4. Л е о н т о в и ч М.А., Ф о к В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения. ЖЭТФ, I946, I6, № 7, с. 557-573.

5. Ф о к В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., I970, 5I7 с.

Bylyi I.Y. Parabolic Equation Method for Anisotropic Elastic Media.

The paper deals with problem of short-wave diffraction of two-dimensional elastic waves.

Though elastic media under consideration is anisotropic, the problem can be treated with Leontovitch - Fock method of parabolic equation.