A. I. Sakhanenko, On first-passage times for symmetric random walks without Lindeberg condition, *Sib. Èlektron. Mat. Izv.*, 2023, Volume 20, Issue 1, 86–99

DOI: 10.33048/semi.2023.20.008

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 20, №1, стр. 86–99 (2023) УДК 519.214
DOI 10.33048/semi.2023.20.008 MSC 60G50;60G40

О ВРЕМЕНАХ ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ БЕЗ УСЛОВИЯ ЛИНДЕБЕРГА

А.И. Саханенко

Abstract. We consider exit times for random walks with independent but not necessarily identically distributed increments. We are going to describe an asymptotic behavior of the probability that the random walk stays above the moving boundary for a long time. In the paper by D. Denisov, A. Sakhanenko, and V. Wachtel (Ann. Probab., 2018) an universal asymptotic formula for such probability was found in the case when the random walk satisfies the classical Lindeberg condition. Now we investigate a question if it is possible to find similar asymptotics for more general random walks when increments may have infinite variances, but the central limit theorem is still valid. We obtain such result for a class of walks with symmetrically distributed increments.

Keywords: random walk, symmetric distribution, exit time, central limit theorem, moving boundary.

1. Введение и основные результаты.

1.1. **Введение.** Рассмотрим случайное блуждание

$$S_k := X_1 + \cdots + X_k, \quad k = 1, 2 \ldots,$$

Sakhanenko, A.I., On first-passage times for symmetric random walks without Lindeberg condition.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект № FWNF-2022-0010, а также при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-51-12007.

Поступила 22 ноября 2022 г., опубликована 13 февраля 2023 г.

построенное по независимым случайным величинам $X_1, X_2, \dots$. Для последовательности $\{g_k\}$ действительных чисел введём величину

$$T := \inf\{k \geq 1 : S_k \leq g_k\}$$

равную времени первого пересечения меняющейся границы $\{g_k\}$ случайным блужданием $\{S_k\}$. Основной целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения распределения этого времени:

$$\mathbf{P}(T > n) = \mathbf{P}\Big(\min_{1\leq k\leq n}(S_k - g_k) > 0\Big).$$

В данной статье рассматривается случай, когда блуждание $\{S_n\}$ принадлежит области притяжения нормального закона. Точнее, мы предполагаем, что существует такая числовая последовательность $\{b_n\}$, что

(1) S_n/b_n сходится по распределению к стандартному нормальному закону,

и что вдобавок

$$X_n/b_n \xrightarrow{P} 0 \qquad \text{и} \qquad b_n \to \infty. \tag{2}$$

(В (1), (2) и далее все пределы берутся при $n \to \infty$.)

Будем также считать, что граница $\{g_n\}$ меняется медленнее, чем нормирующая последовательность, т. е. что

$$g_n/b_n \to 0. \tag{3}$$

Кроме того, чтобы исключить тривиальные случаи, мы предполагаем, что

$$\mathbf{P}(T > n) > 0 \quad \text{для всех} \quad n \geq 1. \tag{4}$$

Хорошо известным классическим случаем, когда (1) может выполняться, является случай нулевых средних и конечных дисперсий:

$$\forall k \geq 1 \;\; \mathbf{E}X_k = 0 \qquad \text{и} \qquad B_n^2 := \sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k^2 \to \infty. \tag{5}$$

Если ещё условие Линдеберга

$$L_n(\varepsilon) := \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k^2; |X_k| > \varepsilon B_n] \to 0 \quad \text{для каждого} \quad \varepsilon > 0 \tag{6}$$

верно, то (1) и (2) справедливы при $b_n = B_n$. В недавней статье [1] было показано, что при выполнении этих классических условий (5) и (6) имеет место также следующая асимптотика:

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{U_g(B_n^2)}{B_n}, \tag{7}$$

где U_g — положительная медленно меняющаяся функция со значениями

$$U_g(B_n^2) = \mathbf{E}[S_n - g_n; T > n], \quad n \geq 1.$$

До статьи [1] такая точная асимптотика, как (7), была известна только для независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{X_k\}$ (см. подробности и библиографию в [1]).

1.2. **Постановка задачи.** Известно, что центральная предельная теорема (1) может быть верной и для случайных величин $\{X_k\}$ с бесконечными дисперсиями или даже без средних значений. Введём функции:

$$\Sigma_n(u) := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(|X_k| > u) \qquad \text{и} \qquad B_n^2(u) := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}[X_k^2 \wedge u^2], \tag{8}$$

где мы используем стандартные обозначения:

$$u \vee v := \max\{u, v\} \qquad \text{и} \qquad u \wedge v := \min\{u, v\}.$$

Подчеркнём, что для симметрично распределенных $X_1, X_2, \ldots$, из сходимостей (1) и (2) мы с необходимостью имеем (см. подробности ниже, в замечании 3), что

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \Sigma_n(\varepsilon b_n) \to 0, \tag{9}$$

а также

$$B_n^2(b_n) \sim b_n^2 \sim b_{n+1}^2 \to \infty. \tag{10}$$

В настоящей статье вместо (9) мы используем следующее более ограничительное условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad Q_n(\varepsilon) := b_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{P}(|X_k| > \varepsilon b_n)}{b_k} \to 0; \qquad \text{где} \quad Q_n(\varepsilon) \geq \Sigma_n(\varepsilon b_n). \tag{11}$$

Легко видеть, что из предположения (11) следует (см. также ниже замечание 4), что существуют числа $\{\varepsilon_n\}$ такие, что:

$$\varepsilon_n \to 0 \qquad \text{и} \qquad Q_n(\varepsilon_n) \to 0. \tag{12}$$

Чтобы сформулировать наши новые результаты, мы должны ввести случайные блуждания со срезанными приращениями. Для каждого $u > 0$ и всех $k \geq 1$ положим

$$X_k^{[u]} := (|X_k| \wedge u) \cdot \operatorname{sign}(X_k) = \begin{cases} u, & \text{если} \quad X_k \geq u, \\ X_k, & \text{если} \quad |X_k| \leq u, \\ -u, & \text{если} \quad X_k \leq -u. \end{cases} \tag{13}$$

Определим также

$$S_k(u) := \sum_{j=1}^{k} X_k^{[u]} \qquad \text{и} \qquad T^{(u)} := \inf\{k \geq 1 : S_k(u) \leq g_k\}. \tag{14}$$

Наша цель — доказать, что при соответствующих $u_n \to \infty$

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \mathbf{P}(T^{(u_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_n(u_n)}{b_n}. \tag{15}$$

где

$$E_n(u) := \mathbf{E}[S_n(u) - g_n \, ; T^{(u)} > n].$$

1.3. **Основные результаты.** В остальной части статьи мы используем следующие предположения.

(a) Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ распределены симметрично.

(b) Положительные действительные числа $\{b_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$ таковы, что выполняются условия (10) и (12).

(g) Границей $\{g_n\}$ является невозрастающая последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию (3); кроме того,

$$\mathbf{P}(X_1 > g_1^+) > 0 \qquad \text{и} \qquad \varepsilon_1 b_1 > g_1^+. \tag{16}$$

Ниже мы говорим, что *последовательность* $\{U_n\}$ *медленно меняется при* $b_n \to \infty$, в случае если

$$\forall c > 0 \quad U_{m(n)} \sim U_n, \quad \text{когда} \quad b_{m(n)} \sim c b_n \quad \text{и} \quad m(n) \to \infty. \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* **(a)**, **(b)** *и* **(g)**. *Предположим также, что действительные числа* $\{u_n\}$ *таковы, что при некотором* $N < \infty$

$$\forall n \geq N \quad u_n \geq v_n := \max_{1 \leq k \leq n} \varepsilon_k b_k \qquad \text{и} \qquad u_n Q_n(\varepsilon_n)/b_n \to 0. \tag{18}$$

Тогда верна асимптотическая формула (15) *и, кроме того, последовательность* $\{E_n(u_n)\}$ *медленно меняется при* $b_n \to \infty$.

В качестве $\{u_n\}$ в теореме 1 всегда можно брать $u_n = b_n$ или $u_n = v_n$ (см. обоснование в лемме 1).

1.4. **Частные случаи и комментарии.**

Следствие 1. *Пусть условие Линдеберга* (5)-(6) *имеет место вместе с предположениями* **(a)** *и* **(g)**, *в которых используются числа* B_n *вместо* b_n. *Тогда предположение* **(b)** *также выполняется, причём с необходимостью* $b_n \sim B_n$ *и верны все утверждения теоремы 1. В частности, в этом случае имеем следующую асимптотическую формулу*

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \mathbf{P}(T^{(u_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_n(u_n)}{b_n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_g(B_n^2)}{B_n}$$

для всех чисел $\{u_n\}$, *удовлетворяющих* (18).

Пример 1. *Пусть случайные величины* $\{X_k\}$ *распределены одинаково и симметрично, причём*

$$\mathbf{P}(|X_1| > x) = C(a) \frac{\log^{2a} x}{x^2} \quad \text{при всех} \quad x > e^a, \tag{19}$$

где $a \geq 0$ *и* $\mathbf{P}(|X_1| > e^a) = 1$. *Легко убедиться, что*

$$B_n^2(b_n) = n \int_0^{b_n} 2x \mathbf{P}(|X_1| > x) dx \sim b_n^2 := \frac{C(a)}{2a+1} n \log^{2a+1}(n+1) \to \infty. \tag{20}$$

В пункте 2.7 будет показано, что в этом случае все условия и утверждения Теоремы 1 справедливы для любых чисел $\{u_n\}$ *таких что*

$$u_n \sim C b_n \log^{1-3\beta}(n+1), \quad \text{когда} \quad 0 < \beta < 1/2 \quad \text{и} \quad C > 0. \tag{21}$$

Замечание 1. *Предположения* **(g)** *и* **(a)** *влекут за собой условие* (4)*. Кроме того, в этом случае*

$$G_n := \max_{k\le n}|g_k| = |g_1|\vee|g_n| = o(b_n). \tag{22}$$

Замечание 2. *Обозначим через N_0 минимальное число m такое, что случайная величина X_m имеет невырожденное распределение. При условии* **(a)** *в этом случае $X_k = 0$ для всех $k < N_0$. По этой причине представляется естественным считать X_{N_0} первым слагаемым в нашем блуждании; то есть предположить, что X_1 имеет невырожденное распределение. И мы действительно ввели это предположение в* (16)*, хотя и неявно.*

Замечание 3. *Напомним, что если имеет место сходимость* (2)*, то S_n/b_n является суммой независимых случайных величин $X_1/b_n, X_2/b_n, \ldots$, удовлетворяющих условию равномерной бесконечной малости:*

$$\max_{1\le j\le n}\mathbf{P}(|X_k|/b_n > \varepsilon) \to 0 \quad \textit{для каждого } \varepsilon > 0.$$

Следовательно, для симметрично распределенных $X_1, X_2, \ldots$ сходимости в (1) *и* (2) *имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия* (9) *и* (10)*. Доказательство этого известного факта можно найти, например, в книге Лоэва* [4] *(см. пункты 22.5 и 23.1 в русском переводе 1962 года).*

Замечание 4. *Пусть* (11) *выполнено при некоторых $\{b_n > 0\}$ и задано число $\varepsilon_1 > 0$. В этом случае*

$$\forall n\ge 2 \;\; Q_n(\varepsilon_n^*) \le \varepsilon_n^*, \quad \textit{при} \quad \varepsilon_n^* := \min\{\varepsilon > 0 : Q_n(\varepsilon)\le\varepsilon\} \to 0.$$

Таким образом, числа $\{\varepsilon_n = \varepsilon_n^*\}$ и $\{\varepsilon_n = \sup_{k\ge n}\varepsilon_k^*\}$ автоматически удовлетворяют предположению (12).

Замечание 5. *Наша гипотеза состоит в том, что если в теореме 1 вместо предположения* **(b)** *требовать только сходимости* (1) *и* (2)*, то условие* (11) *будет необходимым для выполнения* (15) *при $u_n = b_n$.*

Остальная часть статьи посвящена доказательствам сформулированных выше утверждений.

2. Доказательства

2.1. **Специальные уровни срезок.**

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* **(a)** *и* **(b)**. *Тогда*

$$v_n = \max_{1\le k\le n}\varepsilon_k b_k = o(b_n) \quad \textit{и} \quad B_n(v_n)\sim b_n\sim b_{n+1}\sim \overline{b}_n := \max_{1\le k\le n} b_k. \tag{23}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что ввиду (8)

$$\forall\, u\ge v>0 \quad 0\le B_n^2(u)-B_n^2(v) = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[(X_k^{[u]})^2 - v^2\,;|X_k|>v] \le u^2\Sigma_n(v). \tag{24}$$

Далее, при $k(n) := \min\{k\le n : b_k = \overline{b}_n\}\to\infty$ мы из (10) очевидно имеем:

$$B_n^2(b_n)\sim b_n^2 \le \overline{b}_n^2 = b_{k(n)}^2 \sim B_{k(n)}^2(b_{k(n)}) = B_{k(n)}^2(\overline{b}_n) \le B_n^2(\overline{b}_n). \tag{25}$$

А из (24) и (9) получаем:

$$B^2_{k(n)}(\bar b_n) - B^2_n(b_n) \le B^2_n(\bar b_n) - B^2_n(b_n) \le \bar b^2_n \Sigma_n(b_n) \quad \text{и} \quad \Sigma_n(b_n) \to 0.$$

Но из последних соотношений и (25) вытекает, что

$$b^2_n \sim B^2_n(b_n) \ge B^2_{k(n)}(\bar b_n) - \bar b^2_n \Sigma_n(b_n) \sim \bar b^2_n(1 - \Sigma_n(b_n)) \sim \bar b^2_n \ge b^2_n.$$

Значит, $\bar b^2_n \sim b^2_n$.

Введём теперь числа $l(n) := \min\{k \le n : b_k > \sqrt{\bar b_n}\} \to \infty$. Из (12) имеем:

$$\bar\varepsilon_n := \sup_{k \ge n} \varepsilon_k \to 0, \qquad \bar\varepsilon_1 < \infty \qquad \text{и} \qquad \bar\varepsilon_{l(n)} \to 0.$$

Следовательно, в силу определения величины v_n,

$$v_n \le \max_{1 \le k < l(n)} \varepsilon_k b_k + \max_{l(n) \le k \le n} \varepsilon_k b_k \le \bar\varepsilon_1 \sqrt{\bar b_n} + \bar\varepsilon_{l(n)} \bar b_n = \bar b_n o(1) = o(b_n).$$

И тем самым доказано первое соотношение в (23).

Таким образом, $v_n \le b_n$ при всех достаточно больших n. И при всех таких n из (24) получаем, что

$$0 \le B^2_n(b_n) - B^2_n(v_n) \le b^2_n \Sigma_n(v_n) \le b^2_n \Sigma_n(\varepsilon_n b_n) = o(b^2_n), \tag{26}$$

потому что $\Sigma_n(\varepsilon_n b_n) \le Q_n(\varepsilon_n) \to 0$ в силу (12). А поскольку ещё $B^2_n(b_n) \sim b^2_n$ в силу (10), то из (26) и (10) следует, что $B_n(v_n) \sim b_n \sim b_{n+1}$. Теперь все соотношения в (23) доказаны. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* **(a)**, **(b)** *и* **(g)**. *Тогда*

$$\mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_n(v_n)}{b_n}. \tag{27}$$

Доказательство. Мы собираемся применить основной результат из [2] к случайным величинам $\{X_{k,n}\}$ и границе $\{g_{k,n}\}$, где

$$X_{k,n} := \frac{X^{[v_n]}_k}{B_n(v_n)}, \quad S_{k,n} := X_{1,n} + \ldots + X_{k,n} \quad \text{и} \quad g_{k,n} := -\frac{g_k}{B_n(v_n)}. \tag{28}$$

Из (22) и (23) легко видеть, что

$$\max_{k \le n} |X_{k,n}| \le r_n := \frac{v_n}{B_n(v_n)} \to 0 \quad \text{и} \quad g^*_n := \max_{k \le n} |g_{k,n}| = \frac{G_n}{B_n(v_n)} \to 0. \tag{29}$$

Свойства (29) позволяют применить основное утверждение теоремы 1 из [2] к величинам из (28). В результате, используя обозначение $Z_{k,n} := S_{k,n} - g_{k,n}$ получаем, что

(30)

$$\mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) = \mathbf{P}\Big(\min_{k \le n} Z_{k,n} > 0\Big) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E}\Big[Z_{n,n}\,; \min_{k \le n} Z_{k,n} > 0\Big] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_n(v_n)}{B_n(v_n)}.$$

Поскольку $B_n(v_n) \sim b_n$ в силу (23), то (27) следует теперь из (30). □

2.2. **Сравнение уровней усечения.** Далее в статье по умолчанию используются целые m, n и действительные числа u, v со следующими свойствами:

$$n \ge m \ge 1 \qquad \text{и} \qquad u \ge v > 0. \tag{31}$$

Введем случайные величины:

$$Z_n(u) := S_n(u) - g_n, \quad \underline{Z}_n(u) := \min_{1\le k\le n} Z_k(u), \quad \alpha(v) := \min\{k \ge 1 : |X_k| > v\}.$$

Отметим, что $\alpha(v)$ — это момент остановки и что

(32)

$$\forall j < \alpha(v) \quad X_j^{[u]} = X_j^{[v]}, \quad S_j(u) = S_j(v), \quad Z_j(u) = Z_j(v), \quad \underline{Z}_j(u) = \underline{Z}_j(v).$$

Положим

$$T_n^{(u)} := T^{(u)} \wedge n \quad \text{и} \quad P_n(u,v) := \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(T^{(u)} > k-1)\mathbf{P}(|X_k| > v), \tag{33}$$

причём мы всегда считаем, что $\mathbf{P}(T^{(u)} > 0) = 1$.

Предложение 1. *Пусть случайные величины $X_1, X_2, \dots$ независимы. Тогда для любого целого числа $n \ge 1$ и всех действительных $u \ge v > 0$ имеет место следующее соотношение:*

$$\mathbf{P}(\alpha(v) \le T^{(u)} \le n) \le \mathbf{P}(T_n^{(u)} \ge \alpha(v)) = \mathbf{P}(T_n^{(v)} \ge \alpha(v)) \le \inf_{u\in[v,\infty)} P_n(u,v). \tag{34}$$

Кроме того, в этом случае

$$\Big|\mathbf{P}(T^{(u)} > n) - \mathbf{P}(T^{(v)} > n)\Big| \le \mathbf{P}(T_n^{(v)} \ge \alpha(v)), \tag{35}$$

$$\Big|\mathbf{P}(T > n) - \mathbf{P}(T^{(v)} > n)\Big| \le \mathbf{P}(T_n^{(v)} \ge \alpha(v)). \tag{36}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\{T^{(u)} \ge k\} = \{T^{(u)} > k-1\} = \{\underline{Z}_{k-1}(u) > 0\}$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}(T^{(u)} \wedge n \ge \alpha(v)) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\alpha(v) = k, T^{(u)} \ge k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\alpha(v) = k, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0)$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\alpha(v) = k, \underline{Z}_{k-1}(v) > 0) = \mathbf{P}(T^{(v)} \wedge n \ge \alpha(v)), \tag{37}$$

где мы применили (32) при $j = k-1 < k = \alpha(v)$. Далее,

$$\mathbf{P}(\alpha(v) = k, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0) = \mathbf{P}(\alpha(v) > k-1, |X_k| > v, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0)$$

$$\le \mathbf{P}(|X_k| > v, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0) = \mathbf{P}(|X_k| > v)\mathbf{P}(\underline{Z}_{k-1}(u) > 0), \tag{38}$$

где мы использовали независимость случайных величин X_k и $Z_{k-1}(u)$. Суммируя оценки в (38), получаем из (37), что

$$\mathbf{P}(T^{(u)} \wedge n \ge \alpha(v)) \le \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(|X_k| > v)\mathbf{P}(\underline{Z}_{k-1}(u) > 0) = P_n(u,v).$$

Из этого неравенства и (37) следует (34).

Учитывая (32), легко видеть, что

$$\alpha(v) \le T^{(u)} \wedge T^{(v)}, \quad \text{когда} \quad T^{(u)} \ne T^{(v)}.$$

Но из этого факта и (34) имеем:

$$P_{u,v,n} := \mathbf{P}(T^{(u)} > n,\, T^{(v)} \le n) \le \mathbf{P}(\alpha(v) \le T^{(v)} \le n), \tag{39}$$

$$P_{v,u,n} = \mathbf{P}(T^{(v)} > n,\, T^{(u)} \le n) \le \mathbf{P}(\alpha(v) \le T^{(u)} \le n). \tag{40}$$

Теперь заметим, что

$$\mathbf{P}(T^{(v)} > n) - P_{v,u,n} \le \mathbf{P}(T^{(u)} > n) \le \mathbf{P}(T^{(v)} > n) + P_{u,v,n}.$$

Это соотношение вместе с (39), (40) и (34) влечёт (35).

Наконец, (36) следует из (35) при $u \to \infty$. □

2.3. **Свойства математических ожиданий $E_m(\cdot)$.** Мы собираемся доказать следующее утверждение.

Предложение 2. *Предположим, что условия* **(a)** *и* **(g)** *выполнены вместе со свойствами* (31). *Тогда*

$$0 \le E_n(u) - E_m(u) \le (u + g_n - g_m)\mathbf{P}(T^{(u)} > m), \tag{41}$$

$$|E_n(u) - E_n(v)| \le 2(u + g_1 - g_n)\mathbf{P}(T_n^{(v)} \ge \alpha(v)). \tag{42}$$

Кроме того, в этом случае

$$\forall n \ge 1 \quad \forall u \ge \varepsilon_1 b_1 \qquad E_n(u) \ge E_1(u) \ge K_0 := \mathbf{E}(X_1^{[\varepsilon_1 b_1]} - g_1^+)^+ > 0. \tag{43}$$

Доказательство основано на двух леммах.

Лемма 3. *При выполнении условия* **(a)** *верны следующие представления:*

$$E_n(u) = \mathbf{E}[g_n - S_{T^{(u)}}\,; T^{(u)} \le n] - g_n = \mathbf{E}[g_{T^{(u)}} - S_{T^{(u)}}\,; T^{(u)} \le n] - \mathbf{E}g_{T^{(u)}\wedge n}. \tag{44}$$

Если же предположение **(g)** *также выполняется, то имеют место соотношения* (41), (43), *а также и*

$$g_{T^{(u)}} \ge S_{T^{(u)}} = S_{T^{(u)}-1} + X_{T^{(u)}}^{[u]} > g_{T^{(u)}-1} - u \ge g_{T^{(u)}} - u. \tag{45}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что (45) сразу следует из определений (14) и (13) случайных величин $T^{(u)}$ и $X_k^{[u]}$ в случае, когда последовательность $\{g_n\}$ — невозрастающая. Далее, из равенства (12) в [3] (там оно доказано в лемме 3) имеем

$$E_n(u) = \mathbf{E}[-S_{T^{(u)}}\,; T^{(u)} \le n] - g_n\mathbf{P}(T^{(u)} > n). \tag{46}$$

Из этого тождества после очевидных преобразований легко получить оба представления в (44). Кроме того, из (46) очевидно следует, что для всех $n \ge m \ge 1$

$$E_n(u) - E_m(u) = \mathbf{E}[g_{T^{(u)}} - S_{T^{(u)}}\,; m < T^{(u)} \le n] + \mathbf{E}[g_m - g_{T^{(u)}\wedge n}\,; m < T^{(u)}]. \tag{47}$$

Подставляя оценки из (45) в (47), мы приходим к (41).

Наконец, мы имеем из (16) при $u \ge \varepsilon_1 b_1 > g_1^+$, что

$$\begin{aligned} E_1(u) &\ge \mathbf{E}[X_1^{[u]} - g_1\,; X_1 > 0] \ge \mathbf{E}[X_1^{[\varepsilon_1 b_1]} - g_1\,; X_1 > 0] \\ &\ge \mathbf{E}[X_1^{[\varepsilon_1 b_1]} - g_1^+\,; X_1 > g_1^+] = K_0 = \mathbf{E}(X_1^{[\varepsilon_1 b_1]} - g_1^+)^+ > 0, \end{aligned} \tag{48}$$

потому что величина $X_1^{[u]}$ возрастает с ростом $u > 0$, в случае когда $X_1 > 0$. Теперь (41) и (48) дают (43). □

Лемма 4. *В условиях предложения 2*

$$|E_n(u) - E_n^*(v,v)| \le (u + g_1 - g_n)\mathbf{P}(\alpha(v) \le T^{(u)} \le n), \tag{49}$$

где

$$E_n^*(u,v) := \mathbf{E}[g_n - S_{T^{(u)}}\,; T^{(u)} < \alpha(v)] - g_n = E_n^*(v,v). \tag{50}$$

Доказательство. Если $T^{(u)} < \alpha(v)$, то из (32) следует, что $T^{(u)} = T^{(v)}$ и $S_{T^{(u)}} = S_{T^{(v)}}$. Таким образом, (50) доказано.

Теперь из представления (44) и определения (50) мы имеем, что

$$\Delta_n(u,v) := E_n(u) - E_n^*(u,v) = \mathbf{E}[g_n - S_{T^{(u)}}\,; \alpha(v) \le T^{(u)} \le n]. \tag{51}$$

Используя (45), получаем

$$\begin{aligned}|\Delta_n(u,v)| &\le \mathbf{E}[|g_n - g_{T^{(u)}}| + u\,; \alpha(v) \le T^{(u)} \le n] \\ &\le (u + g_1 - g_n)\mathbf{P}(\alpha(v) \le T^{(u)} \le n).\end{aligned}$$

Последнее неравенство влечёт (49), поскольку $\Delta_n(u,v) = E_n(u) - E_n^*(v,v)$ ввиду (50) и (51). □

Теперь мы имеем из (49), что

$$\begin{aligned}|E_n(u) - E_n(v)| &\le |E_n(u) - E_n^*(v,v)| + |E_n(v) - E_n^*(v,v)| \\ \le (u + g_1 - g_n)\mathbf{P}(\alpha(v) \le T^{(u)} \le n) &+ (v + g_1 - g_n)\mathbf{P}(\alpha(v) \le T^{(v)} \le n) \\ &\le 2(u + g_1 - g_n)\mathbf{P}(\alpha(v) \le T_n^{(v)}),\end{aligned}$$

где мы также использовали (34). Итак, (42) доказано.

Напомним, что остальные утверждения предложения 2 следуют из леммы 3.

2.4. **Верхние оценки вероятностей $\mathbf{P}(T^{(\cdot)} > k)$.** Ниже мы фиксируем последовательности $\{b_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ и $\{g_n\}$ и введём некоторые константы K и N_1, которые могут зависеть как от этих фиксированных последовательностей, так и от распределений величин $\{X_n\}$. Основная цель этого пункта - доказать следующее утверждение.

Предложение 3. *При выполнении условий* **(a)**, **(b)** *и* **(g)** *существует такое число* $K < \infty$, *что*

$$\forall n \ge 1 \quad \forall u \ge v_n \quad \max_{1 \le k \le n+1} b_k \mathbf{P}(T^{(u)} > k - 1) \le K E_n(u). \tag{52}$$

Вначале мы докажем пару лемм.

Лемма 5. *При всех* $n \ge 1$

$$\forall\, u > 0 \quad \mathbf{E}[Z_n^+(u)]\mathbf{P}(T^{(u)} > n) \le E_n(u), \tag{53}$$

$$\forall\, v > 0 \quad \mathbf{E}[Z_n^+(v)] \ge \mathbf{E}[S_n^+(v)] - g_n^+ \ge \frac{3}{8}B_n(v) - v - g_n^+. \tag{54}$$

Доказательство. Неравенство (53) немедленно вытекает из леммы 25 в [1]. Далее, поскольку $|X_k^{[v]}| \le v$ для всех $k \ge 1$, мы можем повторить доказательство неравенств (52) и (55) из [2], используя величины $S_n(v)$, $B_n(v)$ и v вместо, S_m, B_m и r_n, соответственно. В результате получаем (54). □

Лемма 6. *Предположим, что случайные величины S и X независимы, а X симметрично распределена. Тогда*

$$\forall\, u \geq v > 0 \qquad \mathbf{E}(S + X^{[u]})^+ \geq \mathbf{E}(S + X^{[v]})^+. \tag{55}$$

Кроме того, для независимых и симметрично распределенных величин $\{X_k\}$

$$\forall n \geq 1 \ \ \forall u \geq v > 0 \qquad \mathbf{E}[Z_n^+(u)] \geq \mathbf{E}[Z_n^+(v)]. \tag{56}$$

Доказательство. Фиксируем $|X|$ и $S = a$ и берем условное математическое ожидание в (55). В результате получаем

$$2\mathbf{E}[(a + X)^+ \,\big|\, |X|] = (a + |X|)^+ + (a - |X|)^+ = 2a^+ + (|X| - |a|)^+. \tag{57}$$

Для доказательства последнего равенства проще всего исследовать отдельно случаи $a < 0$, $0 \leq |X| \leq a$ и $0 \leq a \leq |X|$.

Но из (57) нетрудно видеть, что следующая функция

$$f(a, b) := \mathbf{E}[(a + X)^+ \,\big|\, |X| = b]$$

монотонно не убывает по своему второму аргументу. Следовательно,

$$\forall a \quad \forall u \geq v > 0 \quad f(a, |X^{[u]}|) \geq f(a, |X^{[v]}|)$$

поскольку $|X_k^{[u]}| \geq |X_k^{[v]}|$ при $|u| \geq |v|$ как это следует из определения (13). А потому

$$\forall u \geq v > 0 \qquad \mathbf{E}(S + X^{[u]})^+ = \mathbf{E}f(S, |X^{[u]}|) \geq \mathbf{E}f(S, |X^{[v]}|) = \mathbf{E}(S + X^{[v]})^+.$$

Таким образом, мы получили (55).

Приступим теперь к выводу неравенства (56). При $k = 0, 1, \ldots, m$ введём величины

$$S_{k,n} := \sum_{1 \leq j < k} X_j^{[u]} + \sum_{k < j \leq n} X_j^{[v]} - g_n, \quad \text{причём} \quad \sum_{\emptyset} \ldots = 0.$$

Случайная величина $S := S_{k,n}$ очевидно не зависит от $X := X_k$. Поэтому, согласно (55),

$$E_{k,n} := \mathbf{E}(S_{k,n} + X_k^{[u]})^+ \geq \mathbf{E}(S_{k,n} + X_k^{[v]})^+ = \mathbf{E}(S_{k-1,n} + X_{k-1}^{[u]})^+ = E_{k-1,n}.$$

Повторяя этот приём n раз для $k = n, \ldots, 1$, получаем

$$\mathbf{E}[Z_n^+(u)] = E_{n,n} \geq E_{0,n} = \mathbf{E}[Z_n^+(v)].$$

Итак, (56) доказано. □

Доказательство предложения 3. Прежде всего напомним, что как показано в (41) и (43)

$$\forall n \geq k \geq 1 \ \ \forall u \geq v_1 \qquad E_n(u) \geq E_k(u) \geq E_1(u) \geq K_0 > 0. \tag{58}$$

Далее, из (54) при $v = v_n$, находим:

$$\mathbf{E}[Z_n^+(v_n)] \geq \frac{3}{8} B_n(v_n) - v_n - g_n^+ \sim \frac{3}{8} b_n \sim \frac{3}{8} b_{n+1} > \frac{1}{4} b_{n+1},$$

где мы также применили (3) и (23). Следовательно, существует натуральное число $N_1 < \infty$ такое, что

$$\forall n \geq N_1 \quad \forall u \geq v_n \quad \mathbf{E}[Z_n^+(u)] \geq \mathbf{E}[Z_n^+(v_n)] \geq b_{n+1}/4,$$

где мы ещё учли (56). Подставляя найденную оценку в (53), получаем, что

$$\forall n \geq N_1 \ \ \forall u \geq v_n \quad b_{n+1}\mathbf{P}(T^{(u)} > n) \leq 4E_n(u)$$

А заменив в приведённом неравенстве переменную n на $k-1$, мы приходим к следующему соотношению

$$\forall n \geq k > N_1 \ \ \forall u \geq v_n \geq v_{k-1} \quad b_k\mathbf{P}(T^{(u)} > k-1) \leq 4E_{k-1}(u) \leq 4E_n(u). \tag{59}$$

При выводе (59) мы использовали (58), а также тот факт, что последовательность $\{v_n\}$ не убывает.

Наконец, применяя (43) при $u \geq v_1 = \varepsilon_1 b_1$, мы получаем, что

$$\forall n \geq 1 \ \ \forall k \in [1, N_1] \ \ \forall u \geq v_1 \quad \frac{b_k\mathbf{P}(T^{(u)} > k-1)}{E_n(u)} \leq \frac{b_k}{E_1(u)} \leq \frac{\max_{1\leq k\leq N_1} b_k}{K_0}. \tag{60}$$

Теперь (52) вытекает из (59) и (60) при $K := 4 + \max_{1\leq k\leq N_1} b_k/K_0 < \infty$. □

2.5. **Доказательство теоремы 1.** Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* **(a)**, **(b)** *и* **(g)**. *Тогда для всех* $u \geq v_n$

$$\mathbf{P}(T_n^{(u)} \geq \alpha(v_n)) \leq P_n(v_n, v_n) \leq KQ_n(\varepsilon_n)E_n(v_n)/b_n = o(E_n(v_n)/b_n), \tag{61}$$

$$\mathbf{P}(T_n^{(u)} > n) \leq K(1 + Q_n(\varepsilon_n))E_n(v_n)/b_n = O(E_n(v_n)/b_n). \tag{62}$$

Кроме того, в этом случае

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \mathbf{P}(T^{(u)} > n) \sim \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{E_n(v_n)}{b_n}. \tag{63}$$

Доказательство. Подставляя оценку (52) в (33), находим, что

$$\begin{aligned} P_n(v_n, v_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(T^{(v_n)} > k-1)\mathbf{P}(|X_k| > v_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{KE_n(v_n)}{b_k}\mathbf{P}(|X_k| > v_n) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{KE_n(v_n)}{b_k}\mathbf{P}(|X_k| > \varepsilon_n b_n) = KQ_n(\varepsilon_n)E_n(v_n)/b_n. \end{aligned}$$

И теперь (61) следует из (12).

После этого из (35) и (36) получаем:

$$\begin{aligned} \big|\mathbf{P}(T^{(u)} > n) - \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n)\big| &\leq P_n(v_n, v_n) = o(E_n(v_n)/b_n), \\ \big|\mathbf{P}(T > n) - \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n)\big| &\leq P_n(v_n, v_n) = o(E_n(v_n)/b_n) \end{aligned}$$

Но эти соотношения вместе с (27) немедленно дают нам (62) и (63). □

Лемма 8. *В условиях леммы 7*

$$\forall n \geq 1 \ \ \forall u \geq v_n \quad |E_n(u) - E_n(v_n)| \leq 2KQ_n(\varepsilon_n)E_n(v_n)\frac{u + g_1 - g_n}{b_n}. \tag{64}$$

В частности, $E_n(u_n) \sim E_n(v_n)$ *при выполнении условий теоремы 1.*

Доказательство. Подставляя (61) в (42) при $v = v_n$, мы находим (64). Далее, при выполнении условий (3), (12) и (18) мы имеем из (64) при $u = u_n$, что

$$Q_n(\varepsilon_n)\frac{u_n + g_1 - g_n}{b_n} \to 0, \quad \text{а потому} \quad E_n(u_n) - E_n(v_n) = o(E_n(v_n)).$$

Следовательно, $E_n(u_n) \sim E_n(v_n)$. □

Теперь первое утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из лемм 7 и 8. Доказательство второго основано на следующем утверждении.

Предложение 4. *В условиях теоремы 1 последовательность* $\{E_n(u_n)\}$ *медленно меняется при* $b_n \to \infty$.

Для произвольного $c \in (0, 1]$ выберем любые целые числа $m(n)$ со следующими свойствами:

(65) $$n \geq m = m(n) \geq 1 \quad \text{и} \quad b_{m(n)} \sim cb_n, \quad \text{так что} \quad Q_{m(n)}(\varepsilon_{m(n)}) \to 0.$$

Лемма 9. *В условиях теоремы 1*

(66) $$E_n(v_n) \sim E_{m(n)}(v_n) \sim E_{m(n)}(v_{m(n)}).$$

Доказательство. Ввиду (65) мы находим из (62) с $m(n)$ вместо n, что

(67) $$b_n\mathbf{P}(T^{(u)}_{m(n)} > n) \leq b_nK(1 + Q_{m(n)}(\varepsilon_{m(n)}))E_{m(n)}(v_{m(n)})/b_{m(n)} = o(E_{m(n)}(v_{m(n)}))$$

для всех $u \geq v_{m(n)}$. Далее, из (23) и (41) при $m = m(n)$ имеем для всех $u > 0$ что

$$0 \leq E_n(u) - E_{m(n)}(u) \leq (u + g_n - g_{m(n)})\mathbf{P}(T^{(u)} > m(n)) = o(b_n)\mathbf{P}(T^{(u)} > m(n)).$$

Подставляя теперь (67) в последнюю оценку при $u = v_n \geq v_{m(n)}$, получаем:

$$|E_n(v_n) - E_{m(n)}(v_n)| = o(E_{m(n)}(v_{m(n)})).$$

Но это соотношение влечёт первую эквивалентность в (66).

Ввиду (65) мы находим из (61) с $m(n)$ вместо n, что

(68) $$b_nP_{m(n)}(v_{m(n)}, v_{m(n)}) \leq b_nKQ_{m(n)}(\varepsilon_{m(n)})E_{m(n)}(v_{m(n)})/b_{m(n)} = o(E_{m(n)}(v_{m(n)})).$$

Далее из (42) и (34) с m вместо n имеем:

$$\forall m \geq 1 \ \ \forall u \geq v > 0 \qquad |E_m(u) - E_m(v)| \leq 2(u + g_1 - g_m)P_m(v, v).$$

Из этого неравенства при $m = m(n)$, $u = v_n$ и $v = v_{m(n)}$ приходим к

$$|E_{m(n)}(v_n) - E_{m(n)}(v_{m(n)})| \leq 2(v_n + g_1 - g_{m(n)})P_{m(n)}(v_{m(n)}, v_{m(n)}).$$

Подставляя (23) и (68) в последнюю оценку, имеем: $v_n + g_1 - g_{m(n)} = o(b_n)$ и

$$|E_{m(n)}(v_n) - E_{m(n)}(v_{m(n)})| = o(b_n) \cdot o(E_{m(n)}(v_{m(n)})/b_n) = o(E_{m(n)}(v_{m(n)})).$$

Отсюда следует второе соотношение в (66). □

Итак, последовательность $\{E_n(v_n)\}$ медленно меняется при $b_n \to \infty$, поскольку все условия в определении (17) выполняются когда $U_n = E_n(v_n)$, как это следует из (66) и (65).

С другой стороны, в условиях теоремы 1 имеем $E_n(u_n) \sim E_n(v_n)$ ввиду леммы 8. Но этот факт означает, что последовательность $\{E_n(u_n)\}$ также медленно меняется при $b_n \to \infty$.

Таким образом, предложение 4 и теорема 1 полностью доказаны.

2.6. **Доказательство следствия 1.** Если выполнено условие Линдеберга, то по центральной предельной теореме имеет место сходимость (1) с B_n вместо b_n. Но если в этом случае (1) верно ещё и для некоторого другого b_n, то с необходимостью $b_n \sim B_n$. Таким образом, вместо (11) с произвольным b_n достаточно показать, что (11) верно, когда $b_n = B_n$. Но этот факт вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 10. *Если выполняется условие Линдеберга* (6), *то*

(69)
$$\forall \varepsilon > 0 \quad B_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{P}(|X_k| > \varepsilon B_n)}{B_k} \le B_n \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{E}[X_k^2 : |X_k| > \varepsilon B_n]}{\varepsilon^2 B_n^2 B_k} \le \frac{2\sqrt{L_n(\varepsilon)}}{\varepsilon^2} \to 0.$$

Доказательство. Для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $B_n > 0$ введем обозначения:

$$w_k := \mathbf{E}[X_k^2 : |X_k| > \varepsilon B_n] \quad \text{и} \quad V_k := \sum_{j=1}^{k} w_j \le B_k^2, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Ясно, что для всех $n \ge 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{B_k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{w_k}{\sqrt{V_k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k - V_{k-1}}{\sqrt{V_k}} \le \int_0^{\sqrt{V_n}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{V_n} = 2B_n\sqrt{L_n(\varepsilon)}.$$

В результате получаем (69). □

2.7. **Доказательство утверждения из примера 1.** Прежде всего отметим, что при любых числах δ и u_n из (21)

$$(70) \qquad \varepsilon_n := \log^{-\beta}(n+1) \to 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_n b_n / u_n = O\big(\log^{2\beta-1}(n+1)\big) \to 0.$$

Таким образом, первые условия в (12) и (18) выполнены.

Теперь из (19) имеем:

(71)
$$\forall \varepsilon \in (0,1] \quad \varepsilon^2 \mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon b_n) \le C(a) \frac{\log^{2a} b_n}{b_n^2} = \frac{O(\log^{2a}(n+1))}{n \log^{2a+1}(n+1)} = \frac{O(1)}{n \log(n+1)}.$$

С другой стороны, легко видеть, что для всех действительных c

$$q_n(c) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k} \log^c(n+1)} \sim \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x} \log^c(x+1)} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\log^c(n+1)} = \frac{2n}{\sqrt{n} \log^c(n+1)}$$

по правилу Лопиталя. Следовательно, при $c = a + 1/2$ из (20) имеем, что

$$(72) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{b_n}{b_k} = q_n(a + 1/2) = \frac{b_n O(n)}{b_n} = O(n).$$

В силу определения (11) из (71) и (72) следует, что

$$(73) \qquad \forall \varepsilon \in (0,1] \quad \varepsilon^2 Q_n(\varepsilon) = \varepsilon^2 \mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon b_n) \sum_{k=1}^{n} \frac{b_n}{b_k} = \frac{O(1)}{\log(n+1)} \to 0.$$

Наконец, полагая $\varepsilon = \varepsilon_n$ в (73), получаем:

$$Q_n(\varepsilon_n) = \frac{O(1)}{\varepsilon_n^2 \log(n+1)} = O\big(\log^{2\beta-1}(n+1)\big) \to 0,$$

$$Q_n(\varepsilon_n)\frac{u_n}{b_n} = \frac{O\big(\log^{1-3\beta}(n+1)\big)}{\varepsilon_n^2 \log(n+1)} = O\big(\log^{-\beta}(n+1)\big) \to 0.$$

Итак, вторые условия в (12) и (18) также верны.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены и, как следствие, все утверждения этой теоремы имеют место с числами $\{u_n\}$ из (21) при использовании вспомогательной последовательности $\{\varepsilon_n\}$, введённой в (70).

References

[1] D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, *First-passage times for random walks with non-identically distributed increments*, Ann. Probab., **46**:6 (2018), 3313–3350. Zbl 1434.60126

[2] D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, *First-passage times for random walks in the triangular array setting*, in Chaumont, Loïc (ed.) et al., *A lifetime of excursions through random walks and Lévy processes. A volume in honour of Ron Doney's 80th birthday*, Birkhäuser. Prog. Probab., **78**, Cham, 181–203, 2021. Zbl 1496.60041

[3] R.A. Doney, *Spitzer's condition and ladder variables in random walks*, Probab. Theory Relat. Fields, **101**:4 (1995), 577–580. Zbl 0818.60060

[4] M. Loéve, *Probability Theory I*, Graduate Texts in Mathematics, **45**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1977. Zbl 0359.60001

Alexander Ivanovich Sakhanenko
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: aisakh@mail.ru