

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Боголюбов, Некоторые результаты высокотемпературных разложений для модели Изинга в произвольном внешнем поле, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1981, том 101, 11–27

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

16 января 2025 г., 21:05:24



НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ  
МОДЕЛИ ИЗИНГА В ПРОИЗВОЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Введение

Одним из традиционных методов исследования трехмерной модели Изинга является метод высокотемпературных разложений термодинамических функций по степеням обратной температуры.

Цель этого метода — анализ критического поведения модели, а точность полученных результатов определяется длиной известного отрезка высокотемпературного ряда.

Первые высокотемпературные ряды модели Изинга в нулевом внешнем поле были построены в начале пятидесятых годов. За тридцать лет исследований для моделей с взаимодействием ближайших соседей усилиями различных групп найдено: в разложении логарифма статсуммы 18 коэффициентов для простой кубической решетки (КУБ), 16 для объемоцентрированной (ОЦК) и 14 для гранецентрированной (ГЦК) решеток [1], в разложении восприимчивости 19 коэффициентов для простой кубической [2], и по 15 для решеток ОЦК и ГЦК [3,4].

Столь длинные отрезки рядов удалось рассчитать с помощью техники "диаграмм на решетке", которая, к сожалению, резко усложняется при включении внешнего поля или при усложнении вида взаимодействия.

Для решеток с взаимодействием двух слоев соседей известно значительно меньшее число членов [14].

Более удобная при наличии внешнего поля или сложного вида взаимодействия диаграммная техника предложена в работах [5,6]. Она будет коротко изложена в первом разделе.

С помощью этой техники строятся высокотемпературные разложения в произвольном поле в переменных температура-намагниченность; нами были вычислены девять порядков для решеток с взаимодействием только ближайших соседей и восемь порядков для решеток с взаимодействием двух слоев соседей. Некоторые из полученных рядов приводятся в Приложении.

Во втором параграфе исследуется область сходимости этих рядов и приводятся результаты прямой проверки справедливости гипотезы подобия.

В последнем параграфе обсуждается критическое поведение решеток с взаимодействием двух слоев соседей. Расчеты, проведенные стандартным методом отношений, достаточно явно указывают на сла-

буду неуниверсальность критических показателей. Так, критический показатель восприимчивости  $\chi$  для гранецентрированной и кубической решеток с взаимодействием двух слоев соседей (ПЦК-2), (КВБ-2) (координационное число  $q = 18$ ) ближе к значению 1,21 или к "универсальному" 1,25). Отметим, что решетка ОЦК-2 ( $q = 14$ ) обладает универсальным поведением, т.е. неуниверсальное поведение наблюдается для решеток  $q > 18$ .

Автор выражает глубокую благодарность А.Н.Васильеву за большое внимание и участие в работе.

### § I. Диаграммная техника и высокотемпературное разложение

Статсумма рассматриваемой модели имеет вид:

$$\mathcal{Z}(x, \alpha) = \text{Tr} \exp \left[ \frac{x}{2} \sum_{i,k} \lambda_{ik} \sigma_i \sigma_k + \alpha \sum_i \sigma_i \right] \quad (I)$$

где  $\sigma_i = \pm 1$ ,  $x = \frac{J}{kT}$ ,  $J$  - обменный интеграл,  $\alpha = \frac{h}{kT}$  - приведенное поле ( $h$  - внешнее поле).

Матрица обменного взаимодействия  $\lambda_{ik} = 1$ , если узлы  $i$  и  $k$  взаимодействуют, и  $\lambda_{ik} = 0$  в противном случае (обменный интеграл  $J$  берется одинаковым для всех взаимодействующих пар  $i, k$ ).

В термодинамическом пределе, т.е. при стремлении числа узлов решетки  $N$  к бесконечности, конечным остается удельное значение логарифма статсуммы


$$W(x, \alpha) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \mathcal{Z}_N$$

Для логарифма статсуммы известно стандартное представление связными графиками [7].

Рассмотрим преобразование Лежандра удельного логарифма статсуммы  $W(x, \alpha)$  по внешнему полю  $\alpha$  [5]:

$$\varphi(x, \alpha) = W(x, \alpha) - \alpha \frac{\partial W(x, \alpha)}{\partial \alpha}; \quad \alpha = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad (2)$$

Сопряженная к  $\alpha$  переменная  $d$  имеет смысл намагниченности, так что  $\varphi$  есть функция температуры и намагниченности.

Переход от поля к намагниченности эквивалентен переходу от химического потенциала к плотности в статистике классического неидеального газа, т.е. к вириальному разложению. Согласно второй теореме Майера [7] в вириальном разложении остаются лишь звездные диаграммы (без точек сочленения типа ). В отличие от газа, для модели Изинга в аналогичном разложении присутствуют также и незвездные диаграммы. Все они, однако, довольно легко учитываются с помощью некоторого "рецепта компенсации", приводящего в конечном итоге лишь к изменению правил расчета звездных графиков [6].

Диаграммное разложение термодинамического потенциала можно записать в виде

$$\varphi(x, d) = f(d) + \sum_{\text{звездн. } \mathcal{D}} x^{N(\mathcal{D})} C(\mathcal{D}) A(\mathcal{D}_{\text{комп}}) \prod_{\mathcal{D}} U_n(d), \quad (3)$$

$$\text{где } f(d) = \ln 2 - \frac{1}{2} \left[ (1+d) \ln(1+d) + (1-d) \ln(1-d) \right]$$

- нулевое приближение. Суммирование проводится по всем звездным графикам. Каждая линия дает множитель  $x$ , по степеням которого и ведется разложение,  $N(\mathcal{D})$  - полное число линий в графике (порядок диаграммы),  $C(\mathcal{D})$  - симметричный коэффициент,  $A(\mathcal{D})$  - численное значение компенсированного графика. Произведение  $\prod_{\mathcal{D}} U_n(d)$  берется по всем вершинным множителям  $U_n(d)$  диаграммы. Эти вершинные множители вычисляются по формуле

$$U_n(d) = (1-d^2) \frac{d}{d} U_{n-1}(d), \quad U_1(d) = d, \quad (4)$$

где  $d$  - намагниченность, и зависят лишь от числа  $n$ , сходящихся в данной вершине линий. Произведение вершинных множителей звездной диаграммы представляет собой некоторый полином по четным степеням  $d$ , причем старшей степенью будет  $d^{2N}$ .

Расчет ряда (3) существенно облегчается тем, что перебирать надо не все звездные, а лишь майеровские звездные диаграммы, т.е. диаграммы без двоянных, строенных и т.д. линий, так как  $\lambda_{ик}^n = \lambda_{ик}$ .

Симметричные коэффициенты изменяются очень просто —  $m!$  в знаменатель на каждую  $m$ -кратную линию, поэтому суммирование по размножению линий легко выполнить на ЭВМ.

В первых семи порядках имеются 16 майеровских звездных диаграмм, в восьмом еще 16, в девятом еще 42. Всего в девятом порядке надо считать 74 диаграммы.

Важно то, что в разложении (3) сами диаграммы, их симметричные коэффициенты и вершинные множители одинаковы для всех решеток, а от типа взаимодействия зависят лишь численные значения диаграмм.

Практический расчет рода (3) проводится в два этапа. На первом этапе надо перечислить все майеровские звездные диаграммы до заданного порядка включительно, найти их симметричные коэффициенты и численные значения  $A(\mathcal{D})$  каждой диаграммы для выбранной решетки. На втором этапе надо вычислить компенсированные значения диаграмм.

Под компенсированным значением диаграммы понимается выражение

$$A(\mathcal{D}) + \sum c_s A(\mathcal{D}_s), \quad (5)$$

где  $A(\mathcal{D})$  — численное значение исходной звездной диаграммы, а  $A(\mathcal{D}_s)$  — численные значения соответствующих ей незвездных диаграмм, получаемых различными стягиваниями исходной звездной со специально подобранными коэффициентами  $c_s$  [6].

Мы строили высокотемпературные роды (3) с точностью до девятого порядка включительно (т.е. до  $x^9$ ) для трех объемных решеток ГЦК-I, ОЦК-I, КУБ-I с взаимодействием ближайших соседей и с точностью до восьмого порядка этих же решеток, но с взаимодействием двух слоев соседей (ГЦК-2, ОЦК-2, КУБ-2), и а также для двух плоских — квадратной и треугольной с взаимодействием ближайших соседей. Численные значения майеровских звездных диаграмм для перечисленных решеток приведены в [8, 9]. Мы рассматривали лишь изотропную модель, хотя наш метод пригоден и для анизотропного взаимодействия.

Перегруппировав род (3) по степеням безразмерного множителя  $x$ , получим высокотемпературное разложение потенциала  $\varphi$  в виде:

$$\varphi(x, d) = f(d) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n C_{nk} d^{2k}. \quad (6)$$

Коэффициенты  $C_{nk}$  являются конечным продуктом расчета. Они имеют смысл структурных постоянных, определяемых решеткой и видом взаимодействия.

Род (6) удобнее исследовать, переписав его по степеням приведенной температуры  $v = x/x_B$ , где  $x_B = 1/q$  - вейссовская температура,  $q$  - координационное число решетки. Коэффициенты  $C_{nk}$  при этом заменяются на  $L_{nk} = C_{nk} x_B^n$

$$\varphi(x, \alpha) = f(\alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} \sum_{n=k}^{\infty} L_{nk} v^n = f(\alpha) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} P_k(v). \quad (7)$$

В Приложении приводятся полиномы  $P_k(v)$  для ГЦК-1, ОЦК-2, ГЦК-2 и КУБ-2 решеток (ряды для остальных перечисленных решеток содержатся в [I0, II]).

## § 2. Сходимость высокотемпературных разложений.

### Прямая проверка гипотезы подобия

Функциональный ряд (6) описывает всю поверхность термодинамического потенциала  $\varphi(x, \alpha)$  как функцию двух переменных - температуры и намагниченности. Наличие второй переменной (намагниченности) позволяет получать из функционального ряда все обычные высокотемпературные ряды в нулевом поле дифференцированием по намагниченности. Важно то, что один функциональный ряд пригоден для описания критического поведения при  $T > T_c$  и  $T < T_c$  одновременно. Обычно в этих двух областях используются совершенно различные ряды - высокотемпературные и низкотемпературные.

Для определения зависимости  $\alpha = \alpha(x, \alpha)$  следует воспользоваться "уравнением стационарности"

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\alpha$$

или, после подстановки (7),

$$-\alpha \operatorname{arctg} \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} 2k \alpha^{2k-1} \sum_{n=k}^{\infty} L_{nk} v^n = -\alpha \quad (8)$$

Зная точно критическую температуру, можно, исходя из этого ряда, вычислить критический индекс  $\delta$  ( $\alpha \sim \alpha^\delta$ ,  $T = T_c$ ). Обратив ряд, мы получим высокотемпературное разложение для намагниченности в произвольном внешнем поле  $\alpha$ . Уравнение (8) можно также решать численно. Критической температурой в данном приближении  $\varphi_n$  является то значение  $T$ , при котором появляется спонтанная намагниченность; совпадающая с тем значением  $T$ , при котором восприимчивость  $\chi \sim \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}\right)^{-1}$  обращается в бесконечность. В следующей таблице приведена зависимость  $V_c$  от числа  $n$  учитываемых членов в разложении (6).

Таблица 1.

$$[(V_c - 1) \cdot 10^4]$$

$n$	2	3	4	5	6	7	8
ГЦК-1	1010	1436	1650	1776	1856	1912	1955
ОЦК-2	0839	1222	1439	1560	1638	1694	1734
ГЦК-2	0627	0900	1061	1163	1233	1281	1321
КУБ-2	0627	0900	1061	1164	1235	1286	1324

Рассмотрим поведение функции  $\varphi_n(x, \alpha)$  (ГЦК-1 решетка) при различных фиксированных температурах:  $V = 0,5$ ;  $V = 1,15$ ;  $V = 1,25$ ;  $V = 2,5$ .

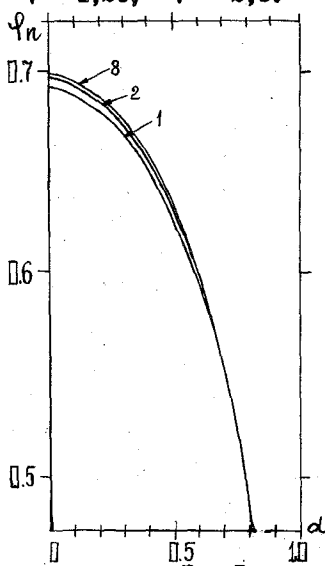


Рис. 1

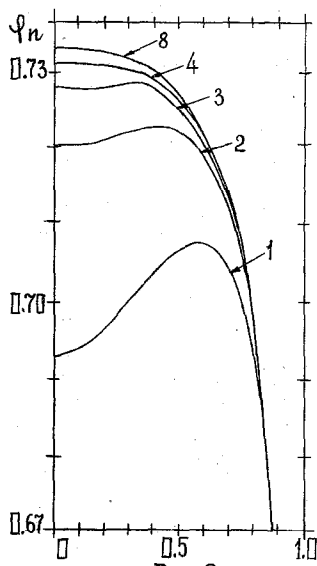


Рис. 2

**I. Высокая температура:**  $V = 0,5 \ll V_c = 1,225$  (Рис.1)

В этой области последовательность  $\varphi_n(\alpha)$  сходится достаточно быстро, причем скорость сходимости увеличивается с ростом  $\alpha$ .

**II. Температура немного выше критической:**  $V = 1,15 < V_c = 1,225$  (Рис.2)

Эта область интересна тем, что  $V_c^{(1)}$ ,  $V_c^{(2)}$  и  $V_c^{(3)}$  меньше 1,15. На рисунке видно, что в первых трех порядках мы имеем характерную яму нестабильности, максимум которой определяют соответственно  $\alpha_{cn}^{(1)}$ ,  $\alpha_{cn}^{(2)}$  и  $\alpha_{cn}^{(3)}$ . Для  $n > 3$  поведение  $\varphi_n$  в этой области аналогично ее поведению в области I, но скорость сходимости меньше.

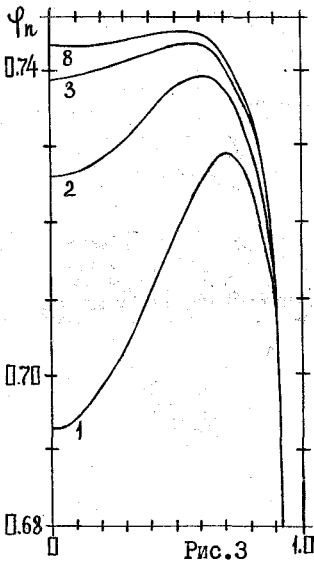


Рис.3

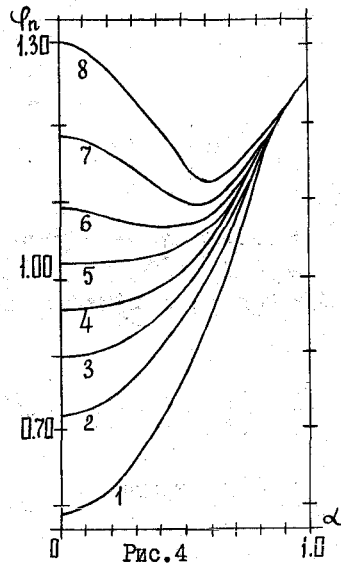


Рис.4

**III. Температура немного ниже критической:**  $V = 1,25 > V_c = 1,225$  (Рис.3).

В этой области, несмотря на то, что при намагниченности меньше спонтанной высокотемпературное разложение должно расходиться, оно представляет все же неплохой асимптотический ряд. Первые члены ряда довольно хорошо описывают поведение  $\varphi$ . Это подтверждается графиками рисунка, на котором видно, что  $\varphi$  действительно выходит на плато, как и должно быть в точной теории.

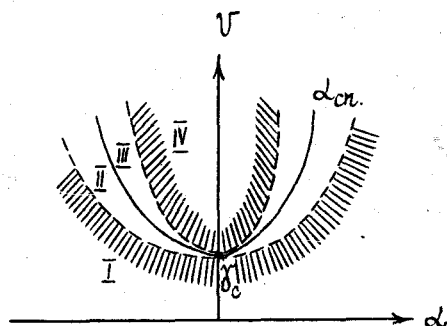
**IV. Низкая температура:**  $V = 2,5 \gg V_c = 1,225$  (Рис.4).

В этой области ряд быстро расходится: при  $\alpha = 0$  уже с ше-



стого порядка поправка  $\varphi_n - \varphi_{n-1}$  начинает возрастать, и на графике появляется характерный горб.

Суммируя сказанное выше, можно заключить, что плоскость  $(x, \alpha)$  естественно разделить на следующие области:



В области I высокотемпературный ряд сходится быстро.

В области II высокотемпературный ряд сходится медленно.

В области III он расходится, но начиная только с больших значений  $n$ .

В области IV высокотемпературный ряд быстро расходится.

Перейдем теперь к обсуждению гипотезы подобия. Согласно этой гипотезе, сингулярная часть термодинамического потенциала

$$\varphi_{\text{синг}}(x, \alpha) = \varphi(x, \alpha) - \varphi(x_c, 0) - (x - x_c) \frac{\partial \varphi(x_c, 0)}{\partial x}$$

в окрестности критической точки  $(x_c, 0)$  имеет вид

$$\varphi_{\text{синг}}(x, \alpha) = \left( \frac{x_c - x}{x_c} \right)^{2-\lambda} f \left( \frac{\alpha}{(x - x_c)^\beta} \right), \quad (8)$$

и существенно зависит только от комбинации  $\omega = \frac{\alpha}{(x - x_c)^\beta}$ .

Здесь  $\lambda$  - критический индекс теплоемкости,  $\beta$  - индекс намагниченности.

Из (8) вытекают различные соотношения между критическими индексами, которые можно проверить, вычислив эти индексы по обыч-

ным высокотемпературным рядам в нулевом поле. Как известно, [1, 3], проверка показала, что эти соотношения с хорошей степенью точности выполняются. Но это лишь следствие гипотезы подобия, а для прямой ее проверки нужна вся поверхность  $\varphi(x, \alpha)$ .

Опишем метод, который мы использовали для прямой проверки справедливости гипотезы подобия.

Если известна критическая температура  $x_c$  и критические показатели  $\lambda$  и  $\beta$ , то из (8) следует, что величина

$$\frac{\varphi_{\text{сим}}(x, \alpha)}{x^{2-\lambda}} = f(\omega), \quad \tau = \frac{x_c - x}{x_c} \quad (9)$$

должна быть постоянной на кривых  $\alpha = \omega \tau^\beta$ ,  $\omega = \text{const}$ . Это эквивалентно тому, что графики зависимости  $\ln \varphi_{\text{сим}}$  от  $\ln \tau$  должны представлять собой прямые с одинаковым наклоном  $2-\lambda$ , сдвинутые друг относительно друга на величину  $\ln f(\omega)$ .

Мы исследовали случай ГЦК-I решетки. В качестве  $\lambda$  и  $\beta$  выбирались общепринятые значения  $1/8$  и  $5/16$  соответственно,  $V_c = 1.225$ ,  $\omega = 0, 1, 2$ . Значения  $\varphi_{\text{сим}}$  вычислялись на ЭВМ по экстраполяционной формуле

$$\varphi(x, \alpha) = \varphi_n(x, \alpha) + \frac{B(x, \alpha)}{n^{\lambda(x, \alpha)} q^n(x, \alpha)}, \quad (10)$$

где  $B$ ,  $\lambda$ ,  $q$  - некоторые параметры.

В результате в области  $x < x_c$  получена

Таблица 2

$\tau$	$\omega = 0$		$\omega = 1$		$\omega = 2$	
	$ \ln \varphi_{\text{сим}}  $	$f(\omega)$	$ \ln \varphi_{\text{сим}}  $	$f(\omega)$	$ \ln \varphi_{\text{сим}}  $	$f(\omega)$
0.03	7.757	0.3066	7.475	-0.4066	6.062	-0.670
0.04	7.277	0.2888	6.917	-0.4142	5.515	-1.683
0.05	6.909	0.2746	6.474	-0.4243	5.087	-1.698
0.06	6.611	0.2629	6.110	-0.4339	4.738	-1.711
0.07	6.361	0.2530	5.802	-0.4424	4.442	-1.724
0.08	6.144	0.2445	5.534	-0.4499	4.185	-1.735

В идеале функция  $f$  должна зависеть только от  $\omega$ , и быть постоянной внутри каждого столбца таблицы, а ее значения должны изменяться лишь от столбца к столбцу. У нас же, хотя функция  $f$  и не постоянна в каждом столбце, однако изменение ее значения в

столбце значительно меньше изменения ее значения от столбца к столбцу.

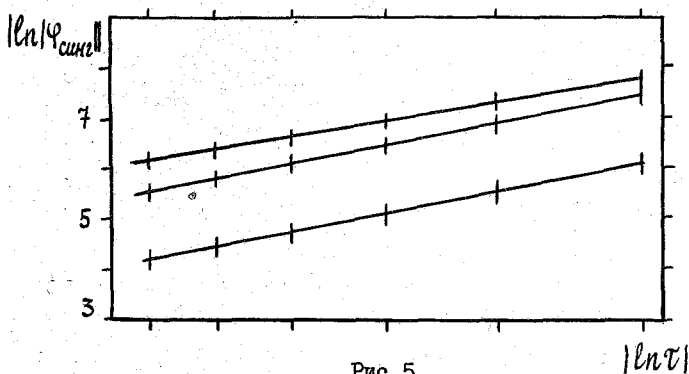


Рис.5

На Рис.5 видно, что точки  $|\ln|\varphi_{\text{сина}}||$  в масштабе  $|\ln\tau|$  хорошо ложатся на прямые. Наклон этих прямых для  $\omega = 0, 1, 2$  равен 1,636; 1,986; 1,917; Полученные значения отличаются от  $2-\lambda = 1.875$ . Это можно объяснить тем, что сходимость нашего ряда довольно медленная, и для  $n=9$  мы еще находимся в области, на которую влияют поправочные члены в экстраполяционной формуле (10). С ростом  $\omega$ , а следовательно, и  $\lambda$ , сходимость ряда улучшается, и при  $\omega = 2$  наклон 1,917 наиболее близок к 1,875 (отметим, что для определения индекса теплоемкости  $\lambda$  обычно используют гораздо более длинные ряды в нулевом поле). Тот факт, что мы получили линейную зависимость  $|\ln|\varphi_{\text{сина}}||$  от  $|\ln\tau|$ , явно свидетельствует в пользу справедливости гипотезы подобия.

### § 3. Универсальность?

Модель Изинга на решетке типа Union-Jack с парным взаимодействием между первыми, вторыми и третьими соседями эквивалентна восьмивершинной модели [12]. Как известно, критические показатели этой и некоторых других точно решаемых плоских моделей являются непрерывными функциями констант взаимодействия. Это противоречит гипотезе универсальности, согласно которой критическое поведение не должно зависеть от относительной величины этих констант и от типа решетки.

Может ли "простая" модель Изинга с взаимодействием двух сло-

ев соседей обладать неуниверсальным поведением? На этот вопрос, возникший в середине семидесятих годов, до сих пор не получено достаточно убедительного ответа. Это связано, во-первых, с трудностью вычислений высокотемпературных рядов для взаимодействия не ближайших соседей, во-вторых, со сложностью их экстраполяции вследствие медленной сходимости рядов.

Поскольку рассчитанные нами ряды на один порядок длиннее известных ранее, мы можем уточнить стандартный расчет критических температур и показателей методом отношений [13].

В этом методе используются ряды восприимчивости в нулевом внешнем поле, которые рассчитывались по формуле

$$\chi^{-1} = 1 - 2P_1(v)$$

Воспользовавшись рядами Приложения, получим:

ОЦК-2 (  $q = 14$  )

$$\chi = 1 + v + 0.928572v^2 + 0.834306v^3 + 0.735649v^4 + 0.641345v^5 + 0.554868v^6 + 0.477421v^7 + 0.409097v^8 \quad (II)$$

ГЦК-2 (  $q = 18$  )

$$\chi = 1 + v + 0.944444v^2 + 0.870370v^3 + 0.790639v^4 + 0.711581v^5 + 0.636291v^6 + 0.566341v^7 + 0.502235v^8 \quad (I2)$$

КУБ-2 (  $q = 18$  )

$$\chi = 1 + v + 0.944444v^2 + 0.870370v^3 + 0.790639v^4 + 0.711532v^5 + 0.636199v^6 + 0.566119v^7 + 0.501911v^8 \quad (I3)$$

Составим таблицу отношений  $\mu_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}$ , где  $\alpha_n$  - коэффициенты рядов  $\chi$ .

Таблица 3  
( $\mu_n \cdot 10^4$ )

n	4	5	6	7	8
ОЦК-2	8817	8718	8652	8604	8569
ГЦК-2	9084	9000	8942	8901	8868
КУБ-2	9084	8999	8941	8898	8866

Зависимость  $\mu_n$  от  $1/n$  хорошо описывается формулой [13]:

$$\mu_n = \mu \left\{ 1 + \frac{\gamma - 1}{n} \right\},$$

ее график при  $1/n = 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) пересекает ось ординат в точке  $\mu = V_c^{-1}$ . Получаем:

ОЦК-2	$V_c = 1.202$	
ГЦК-2	$V_c = 1.156$	(14)
КУБ-2	$V_c = 1.156$	

Критические температуры можно найти также методом последовательных приближений по данным Таблицы I. Точки  $V_c^{(n)}$  довольно хорошо ложатся на прямую в масштабе  $1/n$ . Экстраполяция к нулю  $1/n$  дает следующие значения критических температур:

ОЦК-2	$V_c = 1.203$	
ГЦК-2	$V_c = 1.158$	(15)
КУБ-2	$V_c = 1.159$	

Примем за критические температуры средние арифметические значения (14) и (15):

ОЦК-2	$V_c = 1.203$	
ГЦК-2	$V_c = 1.157$	(16)
КУБ-2	$V_c = 1.158$	

Зная критические температуры, найдем показатель  $\gamma$  по формуле

Таблица 4  $[(\gamma - 1) \cdot 10^3]$

$n$	4	5	6	7	8
ОЦК-2	243	244	245	245	247
ГЦК-2	204	207	208	209	208
КУБ-2	208	210	212	213	213

Приходим к следующим значениям для  $\gamma$ :

ОЦК-2	$\gamma = 1.25$
ГЦК-2	$\gamma = 1.21$
КУБ-2	$\gamma = 1.21$

Во всяком случае видно, что для решеток ГЦК-2, КУБ-2 критический показатель  $\gamma$  меньше значения 1.24, вычисленного по методу ренорм-группы.

Недостатком метода отношений является большая чувствительность к небольшим ошибкам  $V_c$ . Поэтому интересно проследить за поведением других критических показателей, в частности,  $\delta$  и  $\delta'$ . Чтобы не использовать экстраполированных значений  $V_c$ , мы придерживались следующей методики. Индекс  $\delta$  в каждом приближении

$$\varphi_n \text{ вычислялся по формуле } \delta \sim \frac{\ln \left| \frac{\partial \varphi_n(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right|}{\ln \alpha} \text{ в точке}$$

$x_c^{(n)}$  ( $x_c^{(n)}$  - критическая температура в  $n$ -ом приближении).  
 Индекс теплоемкости вычислялся по формуле  $\alpha \sim \frac{\ln C^{(n)}}{\ln \tau^{(n)}}$ , где  
 $C^{(n)}$  - значение теплоемкости в  $n$ -ом приближении,  $\tau^{(n)}$  - безразмерное отклонение от "своей" критической температуры  $x_c^{(n)}$ .  
 Зависимость  $\delta$  и  $\alpha$  от  $1/n$  показана на рисунках 6 и 7.

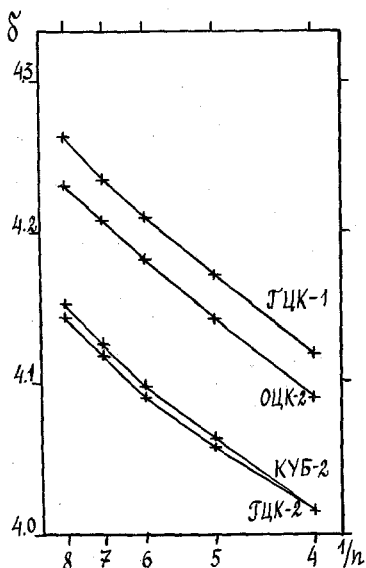


Рис.6

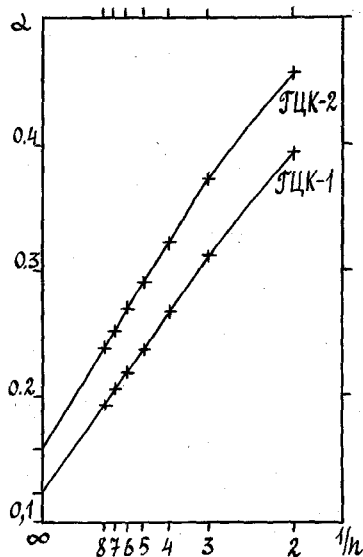


Рис.7

Не претендуя на точность в определении этих критических индексов, можно, видимо, заключить, что показатели  $\delta'$  и  $\alpha'$  для ГЦК-2 и КУБ-2 решеток несколько отличаются от значений  $\delta$  и  $\alpha$  для трехмерных решеток с взаимодействием ближайших соседей,

$$\delta > \delta', \quad d < d',$$

а решетка ОЦК-2 обладает универсальным поведением. Отметим, что неравенства  $\gamma' < \gamma$ ,  $\delta > \delta'$ ,  $d < d'$  не противоречат известным неравенствам между критическими показателями.

### Приложение

ЦК-I ( $q = 12$ )

$$P_0 = 0.0208333V^2 + 0.0046296V^3 + 0.0015673V^4 + 0.0006430V^5 + \\ + 0.0002967V^6 + 0.0001504V^7 + 0.0000818V^8 + 0.0000496V^9$$

$$P_1 = 0.5V - 0.0416666V^2 - 0.0115740V^3 - 0.0041473V^4 - \\ - 0.0018293V^5 - 0.0008909V^6 - 0.0004825V^7 - 0.0002855V^8 - \\ - 0.0001760$$

$$P_2 = 0.0208333V^2 + 0.0092592V^3 + 0.0032310V^4 + 0.0014789V^5 + \\ + 0.0007133V^6 + 0.0004178V^7 + 0.0003057V^8 + 0.0002098V^9$$

$$P_3 = -0.0023148V^3 - 0.0002893V^4 + 0.0001221V^5 + 0.0002411V^6 + \\ + 0.0001480V^7 - 0.0000508V^8 - 0.0000364V^9$$

$$P_4 = -0.0003616V^4 - 0.0005787V^5 - 0.0005452V^6 - 0.0003653V^7 + \\ + 0.0000092V^8 - 0.0000821V^9$$

$$P_5 = 0.0001639V^5 + 0.0001875V^6 + 0.0001082V^7 - 0.0002311V^8 + \\ + 0.0000435V^9$$

$$P_6 = -0.000026V^6 + 0.0000401V^7 + 0.0002645V^8 - 0.0000505V^9$$

$$P_7 = -0.0000169V^7 - 0.0001088V^8 + 0.0000918V^9$$

$$P_8 = 0.0000150V^8 - 0.0000598V^9$$

$$P_9 = 0.0000128V^9$$

ОЦК-2 ( $q = 14$ )

$$P_0 = 0.0178571V^2 + 0.0043731V^3 + 0.0016247V^4 + 0.0006693V^5 + \\ + 0.0003198V^6 + 0.0001659V^7 + 0.0000912V^8$$

$$P_1 = 0.5V - 0.0357142V^2 - 0.0114188V^3 - 0.0047462V^4 - \\ - 0.0020063V^5 - 0.0010253V^6 - 0.0005703V^7 - 0.0003342V^8$$

$$P_2 = 0.0178571V^2 + 0.0097181V^3 + 0.0046117V^4 + 0.0017502V^5 + \\ + 0.0009470V^6 + 0.0005825V^7 + 0.0003718V^8$$

$$P_3 = - 0.0026724V^3 - 0.0014837V^4 + 0.0001006V^5 + 0.0001414V^6 + \\ + 0.0000372V^7 + 0.0000012V^8$$

$$P_4 = - 0.0000065V^4 - 0.0007734V^5 - 0.0006504V^6 - 0.0003646V^7 - \\ - 0.0002235V^8$$

$$P_5 = 0.0002593V^5 + 0.0002959V^6 + 0.0001158V^7 + 0.0000324V^8$$

$$P_6 = - 0.0000285V^6 + 0.0000610V^7 + 0.0001168V^8$$

$$P_7 = - 0.0000276V^7 - 0.0000647V^8$$

$$P_8 = 0.0000088V^8$$

ПЦК-2 (q = 18)

$$P_0 = 0.0138888V^2 + 0.0034293V^3 + 0.0013645V^4 + 0.0006308V^5 + \\ + 0.0003252V^6 + 0.0001803V^7 + 0.0001059V^8$$

$$P_1 = 0.5V - 0.0277777V^2 - 0.0092592V^3 - 0.0043724V^4 - \\ - 0.0022347V^5 - 0.0012603V^6 - 0.0007120V^7 - 0.0004860V^8$$

$$P_2 = 0.0138888V^2 + 0.0082304V^3 + 0.0049868V^4 + 0.0028323V^5 + \\ + 0.0017599V^6 + 0.0008855V^7 + 0.0008840V^8$$

$$P_3 = - 0.0024005V^3 - 0.0023148V^4 - 0.0013941V^5 - 0.0009134V^6 + \\ + 0.0000263V^7 - 0.0008691V^8$$

$$P_4 = 0.0003357V^4 + 0.0000762V^5 - 0.0000938V^6 - 0.0010300V^7 + \\ + 0.0006974V^8$$

$$P_5 = 0.0000895V^5 + 0.0002387V^6 + 0.0009694V^7 - 0.0007012V^8$$

$$P_6 = -0.0000563V^6 - 0.0003722V^7 + 0.0005895V^8$$

$$P_7 = 0.0000526V^7 - 0.00002691V^8$$

$$P_8 = 0.0000486V^8$$

КУБ-2 (q = 18)

$$P_0 = 0.0138888V^2 + 0.0034293V^3 + 0.0013645V^4 + 0.0006308V^5 + \\ + 0.0003245V^6 + 0.0001815V^7 + 0.0001067V^8$$



$$P_1 = 0.5V - 0.02777777V^2 - 0.0092592V^3 - 0.0043724V^4 - \\ - 0.002260IV^5 - 0.0012566V^6 - 0.0007583V^7 - 0.0004750V^8$$

$$P_2 = 0.0138888V^2 + 0.0082304V^3 + 0.0049868V^4 + 0.0029340V^5 + \\ + 0.0017356V^6 + 0.0011326V^7 + 0.0007548V^8$$

$$P_3 = -0.0024005V^3 - 0.0023148V^4 - 0.0015465V^5 - 0.0008400V^6 - \\ - 0.0005607V^7 - 0.0003729V^8$$

$$P_4 = 0.0003357V^4 + 0.0001778V^5 - 0.0001956V^6 - 0.0002676V^7 - \\ - 0.0002833V^8$$

$$P_5 = 0.000064IV^5 + 0.0003035V^6 - 0.0004034V^7 + 0.0004186V^8$$

$$P_6 = -0.0000725V^6 - 0.0001452V^7 - 0.0001602V^8$$

$$P_7 = 0.0000142V^7 + 0.0000053V^8$$

$$P_8 = 0.0000060V^8$$

#### Литература

1. Sykes M.F., Huntke D.L., McKenzie D.S., Neer B.R. J.Phys.A, 1972, v.5, p.667.
2. Gaunt D.S., Sykes M.F. J.Phys A, 1979, v.12, p.225.
3. Sykes M.F., Gaunt D.S., Roberto P.D., Wyles J.A. J.Phys.A, 1972, v.5, p.640.
4. McKenzie S. J.Phys A, 1975, v.8, p.2102.
5. Васильев А.Н., Раджабов Р.А. Теор. и мат. физ. 1974, т.21, с.49.
6. Васильев А.Н., Раджабов Р.А. Теор. и мат. физ. 1975, т.23, с.366.
7. Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л., Изд-во ЛГУ, 1976.
8. Боголюбов Н.М., Васильев А.Н., Раджабов Р.А., Корженевский А.Л. Вестник ЛГУ, 1976, № 4, с.7.
9. Боголюбов Н.М., Васильев А.Н. Вестник ЛГУ, 1977, № 22, с.137.
10. Боголюбов Н.М., Братцев Д.Ф., Васильев А.Н., Раджабов Р.А., Корженевский А.Л. Теор. и мат. физ., 1976, т.26, с.341.

11. Боголюбов Н.М., Братцев Д.Ф. Вестник ЛГУ,  
№ 10, с.113.
12. Jungling K., Obermaier G. J.Phys.C, 1974,  
v.7, p.2363.
13. Фишер М. Природа критического состояния. М., "Мир",  
1968.
14. Domb C., Dalton N.W. Proc.Phys.Soc., 1966, v.89,  
p.859.