



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

E. S. Polovinkin, Differential inclusions with measurable-pseudo-Lipschitz right-hand side, *Trudy Mat. Inst. Steklova*, 2013, Volume 283, 121–141

DOI: 10.1134/S0371968513040092

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 44.211.34.178

November 2, 2024, 20:40:31



УДК 517.9

Дифференциальные включения с измеримо-псевдолипшицевой правой частью¹

Е. С. Половинкин²

Поступило в ноябре 2012 г.

Для дифференциальных включений в банаховых пространствах с измеримо-псевдолипшицевой правой частью получены теоремы существования, теоремы об овыпуклении типа теоремы Филиппова–Важевского. Также описаны некоторые свойства множества решений таких дифференциальных включений, являющиеся обобщением классических теорем о непрерывной зависимости и о дифференцировании решений по начальным данным.

DOI: 10.1134/S0371968513040092

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании необходимых условий оптимальности первого порядка в экстремальных задачах, опирающихся на множество решений некоторого дифференциального включения, основное внимание обращается на поведение решений дифференциального включения в окрестности решения, которое подозрительно на экстремальность. Однако условия на задачу, и в том числе условия на правую часть дифференциального включения, как правило, носят глобальный характер, т.е. полагается, что многозначное отображение, входящее в правую часть дифференциального включения, измеримо по одной переменной и в каком-то смысле гладко или удовлетворяет условию Липшица в метрике Хаусдорфа по другой переменной. Кроме того, при переходе к более простой задаче, в которой правая часть включения принимает выпуклые значения, применяется операция вычисления выпуклой оболочки от всего множества, стоящего в правой части включения. В то же время возможно ослабление условий задачи, если накладывать лишь локальные условия на правую часть дифференциального включения в окрестности графика оптимального решения, использовать локальное овыпукление правой части в той же окрестности. Для реализации этой идеи необходимы новые теоремы существования, новые теоремы об овыпуклении (релаксации) и другие свойства решений дифференциальных включений с ослабленными условиями на правую часть. В данной работе мы развиваем эту идею, опираясь на результаты А.Ф. Филиппова и Т. Важевского [1–3], а также на результаты, полученные ранее автором совместно с Г.В. Смирновым в работах [4–6] и позднее автором в работах [7–13]. В данной работе обобщены качественные свойства решений дифференциальных включений со случая, когда правая часть дифференциального включения измерима по t и удовлетворяет условию Липшица по x , на случай, когда правая часть удовлетворяет локальным условиям под названием “измеримо-псевдолипшицевость” в окрестности некоторой функции, а также со случая, когда решения принадлежали конечномерному

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00139а, 13-01-00295а) и федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

²Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный, Московская обл., Россия.

E-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

пространству \mathbb{R}^n , на случай рефлексивного банахова пространства. В частности, в работе для таких включений получены теорема существования решений, теорема об овыпуклении правой части (о релаксации), теорема о дифференцировании по начальным данным и другие.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $T \doteq [t_0, t_1]$ — отрезок прямой, E — сепарабельное банахово пространство. Через $B_r(a) \doteq \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ ($\overline{B_r(a)} \doteq \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$) обозначаем открытый (замкнутый) шар с центром в точке $a \in E$ радиуса $r > 0$. Для всякого множества A через $\text{co } A$ и $\overline{\text{co}} A$ обозначаем выпуклую оболочку и выпуклую замкнутую оболочку множества A в банаховом пространстве E . *Полунормой множества A в банаховом пространстве E* называется величина $\|A\| \doteq \sup\{\|a\| \mid a \in A\}$. Пусть $\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x - y\| \mid y \in A\}$ — расстояние от точки x до множества A в банаховом пространстве E .

Напомним, что *функцией отклонения множества A от другого множества B в пространстве E* называется функция вида

$$h^+(A, B) \doteq \inf\{r > 0 \mid A \subset B + B_r(0)\}, \quad (2.1)$$

а *расстоянием по Хаусдорфу между множествами A и B в пространстве E* называется функция вида

$$h(A, B) \doteq \max\{h^+(A, B), h^+(B, A)\}.$$

Через $\text{AC}(T, E)$ обозначаем *линейное нормированное пространство абсолютно непрерывных функций*, т.е. для каждой функции $f: T \rightarrow E$ из этого пространства существует суммируемая по Бохнеру функция $f': T \rightarrow E$ такая, что для каждого $t \in T$ справедливо равенство

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t f'(\tau) d\tau,$$

т.е. $f': T \rightarrow E$ — производная абсолютно непрерывной функции $f: T \rightarrow E$.

Норма в пространстве $\text{AC}(T, E)$ определяется по формуле $\|f\|_{\text{AC}} \doteq \|f(t_0)\|_E + \|f'\|_{L_1}$, где $\|f'\|_{L_1} \doteq \int_{t_0}^{t_1} \|f'(\tau)\|_E d\tau$ — норма производной функции f' в пространстве Лебега–Бохнера $L_1(T, E)$. Через $L_1(T, E)$, как обычно, обозначаем нормированное пространство классов эквивалентностей интегрируемых по Бохнеру функций, действующих из T в E .

Через $\mathcal{P}(E)$ обозначаем множество всех подмножеств из банахова пространства E , через $\mathcal{F}(E)$ — пространство непустых замкнутых подмножеств из пространства E , через $\mathcal{K}(E)$ — метрическое пространство непустых компактных подмножеств из пространства E с метрикой Хаусдорфа.

Пусть задано многозначное отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$. Напомним, что *эффективным множеством* многозначного отображения F называется множество $\text{dom } F \doteq \{(t, x) \mid F(t, x) \neq \emptyset\}$. *Графиком* этого отображения называется множество

$$\text{graph } F \doteq \{(t, x, y) \in T \times E \times E \mid y \in F(t, x), (t, x) \in \text{dom } F\}.$$

Пусть для отображения $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ определено *дифференциальное включение* вида

$$x' \in F(t, x), \quad t \in T. \quad (2.2)$$

Решением дифференциального включения (2.2) на отрезке T называется всякая абсолютно непрерывная функция $x(\cdot) \in \text{AC}(T, E)$, у которой производная функция $x': T \rightarrow E$ является суммируемой по Бохнеру ветвью отображения $F(\cdot, x(\cdot))$.

Через $x(\cdot) = x(\cdot, x_0)$ будем обозначать любое решение дифференциального включения (2.2) с начальным условием $x(t_0, x_0) = x_0$, определенное на всем отрезке T (при условии, что такое решение существует). Через $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ обозначаем множество в $AC(T, E)$ всех решений $x(\cdot, x_0)$ дифференциального включения (2.2) на отрезке T при условии, что $x_0 \in C_0$.

3. ИЗМЕРИМО-ПСЕВДОЛИПШИЦЕВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ

Ж.-П. Обен в работе [14] ввел и исследовал следующее понятие псевдолипшицевости многозначного отображения.

Определение 1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Отображение $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ называется *псевдолипшицевым около точки* $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \text{graph } F \subset X \times Y$, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ и $l > 0$ такие, что для всех $x_1, x_2 \in B_{\alpha_1}(x_0)$ справедливо включение

$$F(x_1) \cap B_{\alpha_2}(y_0) \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \quad (3.1)$$

Отметим одно важное свойство таких отображений.

Лемма 1. Пусть отображение $F: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ псевдолипшицево около точки $(x_0, y_0) \in \text{graph } F$. Определим отображение $G(x) \doteq F(x) \cap B_{\alpha_2}(y_0)$ при $x \in B_{\alpha_1}(x_0)$. Тогда это отображение $G: B_{\alpha_1}(x_0) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ является полунепрерывным снизу (пн.сн.).

Доказательство. Для доказательства того, что отображение G пн.сн., достаточно показать, что для любой точки $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \text{graph } G$ и произвольной последовательности $\{x_k\}$, сходящейся к точке \tilde{x} , существует последовательность $y_k \in G(x_k)$, которая сходится к точке \tilde{y} . Так как $\tilde{y} \in B_{\alpha_2}(y_0)$, то число $\varepsilon \doteq \alpha_2 - \|\tilde{y} - y_0\|$ положительно. Так как в силу псевдолипшицевости F имеем $\tilde{y} \in F(x_k) + l\|x_k - \tilde{x}\|\overline{B_1(0)}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то существуют $y_k \in F(x_k)$ такие, что $\|y_k - \tilde{y}\| \leq l\|x_k - \tilde{x}\|$. Поэтому найдется номер k_0 такой, что при $k \geq k_0$ имеем $l\|x_k - \tilde{x}\| < \varepsilon$, откуда следует, что $y_k \in G(x_k)$ при всех $k \geq k_0$. \square

Мы хотим обобщить определение 1 на случай “неавтономного” отображения, т.е. когда отображение F имеет вид $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ и по $t \in T$ нет гладкости. Соответствующее условие псевдолипшицевости этого отображения по $x \in E$ принимает более сложную, чем в автономном случае, форму.

Условие 1. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ таково, что для него заданы число $\delta > 0$, функции $y(\cdot) \in AC(T, E)$, $\rho(\cdot), l(\cdot), \eta(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$ и $\xi(\cdot) \in C(T, \mathbb{R}_+^1)$, множество W и отображение $G(t, x)$ такие, что

$$\xi(t) \geq \delta, \quad \rho(y'(t), F(t, y(t))) \leq \rho(t), \quad \rho(t) + l(t)\xi(t) \leq \eta(t) \quad \forall t \in T,$$

$$W \doteq \{(t, x) \in T \times E \mid \|x - y(t)\| \leq \xi(t), t \in T\},$$

$$G(t, x) \doteq F(t, x) \cap (y'(t) + \eta(t)B_1(0)). \quad (3.2)$$

При этом F удовлетворяет трем условиям:

- 1) для любой точки $(t, x) \in W$ множества $G(t, x)$ непусты;
- 2) для любой функции $v(\cdot) \in C(T, E)$, у которой $\text{graph } v \subset W$, отображение $t \rightarrow G(t, v(t))$ измеримо на отрезке T ;
- 3) для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in W$ справедливы включения

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \quad (3.3)$$

Определение 2. В случае, когда $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ удовлетворяет условиям 1)–3), объединенным в одно условие 1, будем говорить, что отображение F является *измеримо-псевдолипшицевым в окрестности функции* $y(\cdot)$.

Отметим, что, используя понятие функции отклонения одного множества от другого $h^+(A, B)$ (см. (2.1)), получаем, что включение (3.3) эквивалентно неравенству

$$h^+(G(t, x_1), F(t, x_2)) \leq l(t)\|x_1 - x_2\|.$$

Очевидно, что если отображение F измеримо по t и удовлетворяет сильному условию Липшица (т.е. в метрике Хаусдорфа) по x , то выполнены и слабые — локальные условия 1.

4. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Важное значение в теории дифференциальных включений имеет известная теорема Филиппова [1, 2] о существовании решения дифференциального включения с липшицевой правой частью, доказанная в [1] для случая \mathbb{R}^n .

Обобщение этой теоремы на случай сепарабельного банахова пространства E , а также на случай измеримо-псевдолипшицевых отображений F (см. условие 1) принимает следующий вид.

Теорема 1. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности некоторой функции $y(\cdot) \in AC(T, E)$, т.е. заданы число $\delta > 0$, функции $l(\cdot), \rho(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$ и существует число $\beta > 0$ такие, что приведенные в условии 1 функции $\xi(\cdot) = \xi_\beta(\cdot)$ и $\eta(\cdot) = \eta_\beta(\cdot)$ вычисляются по формулам

$$\xi_\beta(t) \doteq e^{m(t)+\beta} \left(\delta + \int_{t_0}^t e^{-m(\tau)} \rho(\tau) d\tau (1 + \beta) \right), \quad m(t) \doteq \int_{t_0}^t l(\tau) d\tau, \quad (4.1)$$

$$\eta_\beta(t) \doteq l(t)\xi_\beta(t) + \rho(t)(1 + \beta) \quad \forall t \in T. \quad (4.2)$$

Тогда для любой начальной точки $x_0 \in B_\delta(y(t_0))$ существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$ дифференциального включения (2.2), причем справедливы оценки

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \xi_\beta(t), \quad \|x'(t) - y'(t)\| \leq \eta_\beta(t) \quad \forall t \in T. \quad (4.3)$$

Доказательство. Приведем процедуру построения последовательности пар функций $\{x_k(\cdot), v_k(\cdot)\}_{k=0}^\infty$, определенных на отрезке T со значениями в пространстве E , по правилу

$$x_0(t) \doteq y(t), \quad x_{k+1}(t) \doteq x_0 + \int_{t_0}^t v_k(\tau) d\tau, \quad t \in T. \quad (4.4)$$

Каждая функция $v_k(\cdot)$ выбирается с помощью функции $x_k(\cdot)$ как функция, суммируемая по Бохнеру и удовлетворяющая включению $v_k(t) \in R_k(t)$ при п.в. $t \in T$, где

$$R_k(t) \doteq F(t, x_k(t)) \cap (x'_k(t) + \rho_k(t)\overline{B_1(0)}), \quad (4.5)$$

$$\rho_0(t) \doteq \rho(t) \left(1 + \frac{\beta}{2} \right), \quad \rho_k(t) \doteq \varrho(x'_k(t), F(t, x_k(t))) \left(1 + \frac{\beta}{2^{k+1}} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Покажем, что такой выбор возможен. Так как по условию теоремы $\beta > 0$, то при всех $k \in \mathbb{N}$ по определению отображения $R_k(\cdot)$ его значения $R_k(t)$ непусты и замкнуты при п.в. $t \in T$. Кроме того, докажем индукцией по $k \in \mathbb{N}$, что для всех отображений R_k из (4.5) справедливы равенства

$$R_k(t) = G(t, x_k(t)) \cap (x'_k(t) + \rho_k(t)\overline{B_1(0)}), \quad (4.6)$$

$$\varrho(x'_k(t), F(t, x_k(t))) = \varrho(x'_k(t), G(t, x_k(t))), \quad (4.7)$$

где отображение $G(t, x)$ взято из условия 1 и определяется по формуле (3.2) при $\eta(\cdot) = \eta_\beta(\cdot)$ из (4.2). Если справедливы эти равенства, то каждая функция $\rho_k: T \rightarrow \mathbb{R}_+^1$ и каждое отображение $R_k: T \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримы и по теореме Ш. Кастена [15] у $R_k(\cdot)$ существует плотное семейство измеримых ветвей на отрезке T , одну из которых и берем в качестве функции $v_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда по построению и по (4.6) каждая функция $v_k(\cdot)$ суммируема по Бохнеру, так как $\|v_k(t)\| \leq \|y'(t)\| + \eta_\beta(t)$, и удовлетворяет включению $v_k(t) \in G(t, x_k(t))$.

Итак, для доказательства формулы (4.6) на первом шаге индукции в силу неравенства $\rho_0(t) < \eta_\beta(t)$ при п.в. $t \in T$ получаем

$$R_0(t) = F(t, y(t)) \cap (y'(t) + \rho_0(t)\overline{B_1(0)}) = G(t, y(t)) \cap (y'(t) + \rho_0(t)\overline{B_1(0)}),$$

вследствие чего отображение $R_0(t)$ измеримо и для выбранной измеримой ветви $v_0(t)$ справедливо включение $\|v_0(t)\| \leq \|y'(t)\| + \rho_0(t)$, т.е. $v_0(\cdot)$ — суммируемая функция.

Далее считаем, что при некотором $k \in \mathbb{N}$ уже доказана формула (4.6), причем при $s \in \overline{1, k}$ выбранные функции $v_s(\cdot)$ суммируемы и удовлетворяют включениям $v_s(t) \in G(t, x_s(t))$, $t \in T$. В силу (4.4) получаем, что $x'_{k+1}(t) = v_k(t) \in G(t, x_k(t))$, откуда в силу измеримо-псевдолиппшицевости F следует

$$\begin{aligned} \varrho(x'_{k+1}(t), F(t, x_{k+1}(t))) &\leq \rho(x'_{k+1}(t), G(t, x_k(t))) + h^+(G(t, x_k(t)), F(t, x_{k+1}(t))) \leq \\ &\leq l(t)\|x_k(t) - x_{k+1}(t)\|, \end{aligned}$$

т.е.

$$\rho_{k+1}(t) \leq l(t)\|x_k(t) - x_{k+1}(t)\| \left(1 + \frac{\beta}{2^{k+2}}\right) \quad \forall t \in T. \quad (4.8)$$

Заметим, что на предыдущих шагах $s \leq k$ при выборе функции $v_s(\cdot)$ из R_s мы получили бы оценку $\|v_s(t) - v_{s-1}(t)\| = \|x'_{s+1}(t) - x'_s(t)\| \leq \rho_s(t)$ и аналогично (4.8) неравенство

$$\|x'_{s+1}(t) - x'_s(t)\| \leq l(t)\|x_s(t) - x_{s-1}(t)\| \left(1 + \frac{\beta}{2^{s+1}}\right) \quad \forall t \in T. \quad (4.9)$$

Интегрируя неравенство $\|x'_1(t) - x'_0(t)\| \leq \rho_0(t)$, получаем оценку $\|x_1(t) - x_0(t)\| < \delta + \int_{t_0}^t \rho(\tau) d\tau (1 + \beta)$ при любом $t \in T$. Подставляя эту оценку в правую часть неравенства (4.9) при $s = 1$ и интегрируя последнее неравенство, получаем оценку для $\|x_2(t) - x_1(t)\|$.

Продолжая процедуру последовательных подстановок и интегрирования неравенства (4.9) для всех $s = 1, 2, 3, \dots, k + 1$, в силу неравенства $\prod_{p=1}^s \left(1 + \frac{\beta}{2^p}\right) < e^\beta$ получаем неравенства

$$\|x'_{s+1}(t) - x'_s(t)\| \leq \rho_s(t) < l(t)f_{s-1}(t) \prod_{p=1}^s \left(1 + \frac{\beta}{2^p}\right) < l(t)f_{s-1}(t)e^\beta, \quad (4.10)$$

$$\|x_{s+1}(t) - x_s(t)\| < f_s(t) \prod_{p=1}^s \left(1 + \frac{\beta}{2^p}\right), \quad (4.11)$$

где

$$f_s(t) \doteq \delta \frac{(m(t))^s}{s!} + \int_{t_0}^t \frac{(m(t) - m(\tau))^s}{s!} \rho(\tau) d\tau (1 + \beta), \quad t \in T.$$

Для получения этих оценок мы воспользовались равенством (при $t \geq t_0$)

$$\int_{t_0}^t l(\tau_1) \left(\int_{t_0}^{\tau_1} l(\tau_2) \dots \left(\int_{t_0}^{\tau_{s-1}} l(\tau_s) d\tau_s \right) \dots d\tau_2 \right) d\tau_1 = \frac{1}{s!} \left(\int_{t_0}^t l(\tau) d\tau \right)^s,$$

справедливость которого легко доказать по индукции.

Рассмотрим функциональный ряд вида $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$, где $u_m(t) \doteq x_m(t) - x_{m-1}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $t \in T$. Очевидно, что $\sum_{s=1}^{k+1} u_s(t) = x_{k+1}(t) - y(t)$. Учитывая неравенства (4.10), (4.11) и неравенства $1 + \frac{z}{1!} + \dots + \frac{z^s}{s!} < e^z$ и $\prod_{p=1}^s (1 + \frac{z}{2^p}) < e^z$, верные при всех $z > 0$ и $s \in \mathbb{N}$, получаем следующие оценки:

$$\sum_{s=1}^{k+1} \|u_s(t)\| < \sum_{s=0}^k f_s(t)e^{\beta} < \xi_{\beta}(t), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \|x'_{k+1}(t) - y'(t)\| + \rho_{k+1}(t) &\leq \sum_{s=1}^{k+1} \|u'_s(t)\| + \rho_{k+1}(t) < \sum_{s=0}^{k+1} \rho_s(t) = \rho_0(t) + l(t) \sum_{s=0}^k f_s(t)e^{\beta} < \\ &< \rho_0(t) + l(t)\xi_{\beta}(t) = \eta_{\beta}(t) \quad \forall t \in T. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость включения

$$x'_{k+1}(t) + \rho_{k+1}(t)\overline{B_1(0)} \subset y'(t) + \eta_{\beta}(t)\overline{B_1(0)},$$

что влечет за собой справедливость равенства (4.7) и формулы (4.6) при $k+1$, что и требовалось доказать по индукции.

Из полученных оценок для частичных сумм рядов и полноты банахова пространства следует сходимость функционального ряда $\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t)$ и ряда, составленного из его производных, откуда получаем сходимость последовательностей $\{x_k(\cdot)\}$, $\{v_k(\cdot)\}$ к некоторой паре функций $x(\cdot)$, $v(\cdot)$, причем, переходя к пределу в соотношениях (4.4), получаем, что функция $x(\cdot)$ принадлежит пространству $AC(T, E)$ и является решением задачи $x'(t) \in F(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$. Теорема доказана. \square

Замечание 1. Полученное в теореме 1 решение $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$ в силу оценок (4.3) является также решением дифференциального включения с правой частью, равной $G(t, x)$, вычисляемой по формуле (3.2), т.е. $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(G, x_0)$.

Замечание 2. Теорема 1 остается, очевидно, справедливой при любом $\beta \geq 0$, если в ней условия измеримо-псевдוליпшицевости F заменены более сильными условиями измеримости по t и липшицевости по x .

Утверждение о непрерывной зависимости решений от начальных данных принимает следующий вид.

Следствие 1. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ удовлетворяет условию 1 около решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$ с начальным условием $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$ с некоторыми $\delta > 0$ и $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon < \delta e^{-m(t_1)}$ (где $m(t)$ определено в (4.1)) и любого $x_0 \in B_{\varepsilon}(\hat{x}_0)$ существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$, для которого справедлива оценка

$$\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{AC} < \delta(1 + m(t_1)).$$

Доказательство следствия очевидно. Выбирая $y(\cdot) \doteq \hat{x}(\cdot)$ в условии теоремы 1, получаем $\rho(t) = 0$, откуда $\xi_{\beta}(t) \doteq e^{m(t)+\beta}\varepsilon$ будет меньше δ при достаточно малом $\beta > 0$. \square

5. ТЕОРЕМА ОБ ОВЫПУКЛЕНИИ

Многих ученых давно интересовал вопрос о связи между семейством решений $\mathcal{R}_T(F, x_0)$ включения (2.2) и семейством решений $\mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} F, x_0)$ дифференциального включения с овыпукленной правой частью

$$z'(t) \in \overline{\text{co}} F(t, z(t)), \quad z(t_0) = x_0, \quad t \in T. \quad (5.1)$$

Впервые связь указанных семейств решений установили Т. Важевский и А.Ф. Филиппов. Важевский [3] для непрерывного ограниченного отображения $F: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ доказал, что каждое решение включения (5.1) является равномерным пределом функций $y_k(t)$ таких, что

$$\varrho(y'_k(t), \overline{\text{extr } \overline{\text{co}} F(t, y_k(t))}) \rightarrow 0 \quad \text{при п.в. } t \in T.$$

Филиппов [1] показал, что при условии липшицевости по x ограниченного отображения $F: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ множество решений $\mathcal{R}_T(F, x_0)$ всюду плотно в множестве решений $\mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} F, x_0)$ в метрике пространства $C(T, \mathbb{R}^n)$. Многие авторы пытались ослабить условия данной теоремы Филиппова об овыпуклении. Однако А. Плис в работе [16] построил контр-пример, показывающий, что теорема Филиппова неверна, если F является лишь непрерывным отображением.

Докажем теорему, которая будет обобщением теоремы Филиппова об овыпуклении на случай измеримо-псевдолипшицева отображения в банаховом пространстве.

Для этого нам потребуется следующее усиление условия измеримо-псевдолипшицевости отображения.

Условие 2. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ удовлетворяет условию 1 с соответствующими параметрами δ , $y(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, $l(\cdot)$, $\eta(\cdot)$ и $\xi(\cdot)$, множеством W и отображением $G(t, x)$. Определим функцию $\tilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t)$ и

$$\tilde{G}(t, x) \doteq F(t, x) \cap (y'(t) + \tilde{\eta}(t)B_1(0)). \quad (5.2)$$

Пусть справедливы дополнительные условия:

- 2') для любой функции $v(\cdot) \in C(T, E)$, у которой $\text{graph } v \subset W$, отображение $t \rightarrow \tilde{G}(t, v(t))$ измеримо на отрезке T ;
- 3') для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in W$ справедливы включения

$$\tilde{G}(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \quad (5.3)$$

Определение 3. В случае, когда $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ удовлетворяет приведенному выше условию 2, будем говорить, что отображение F является *строго измеримо-псевдолипшицевым в окрестности* функции $y(\cdot)$.

Проведенная с помощью условия 2 локализация отображения F около некоторой функции $y(\cdot)$ приводит к тому, что полученное в условии 2 ограниченное отображение \tilde{G} само является измеримо-псевдолипшицевым. Точнее, справедлива

Лемма 2. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ является строго измеримо-псевдолипшицевым в окрестности функции $y(\cdot)$, т.е. удовлетворяет условию 2. Тогда отображение $\tilde{G}: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ (определения см. в (3.2), (5.2)) само является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности функции $y(\cdot)$, причем справедливо включение

$$G(t, x_1) \subset \tilde{G}(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)} \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in W. \quad (5.4)$$

Доказательство. Отметим, что для любых чисел $r > 0$, $\rho > 0$, множества $A \subset E$ и точки $x \in E$ справедливо включение

$$(A + \overline{B_r(0)}) \cap B_\rho(x) \subset A \cap B_{r+\rho}(x) + \overline{B_r(0)}. \quad (5.5)$$

Из формул (3.2), (3.3), (5.2) и (5.5) для любых точек $(t, x_1), (t, x_2) \in W$ получаем

$$\begin{aligned} G(t, x_1) &\subset (F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}) \cap (y'(t) + \eta(t)B_1(0)) \subset \\ &\subset F(t, x_2) \cap (y'(t) + (l(t)\|x_1 - x_2\| + \eta(t))B_1(0)) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства $l(t)\|x_1 - x_2\| \leq 2\xi(t)l(t) \leq 2\eta(t)$ для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in W$ получаем включение (5.4). \square

Для произвольного многозначного отображения $Q: T \rightarrow \mathcal{P}(E)$ введем обозначения. Через $\mathcal{L}_T(Q)$ обозначим множество

$$\mathcal{L}_T(Q) \doteq \{f(\cdot) \in L_1(T, E) \mid f(t) \in Q(t) \text{ при п.в. } t \in T\}, \quad (5.6)$$

т.е. совокупность всех интегрируемых по Лебегу–Бохнеру однозначных ветвей отображения Q .

Определение 4. *Интегралом Ауманна* отображения $Q: T \rightarrow \mathcal{P}(E)$ называется множество вида

$$J(\mathcal{L}_T(Q)) \doteq \left\{ x \in E \mid x = (L) \int_T f dt, f \in \mathcal{L}_T(Q) \right\}, \quad (5.7)$$

т.е. множество значений интегралов от всех интегрируемых по Лебегу–Бохнеру однозначных ветвей отображения Q (см. [17]). Как обычно, через \overline{A} обозначаем замыкание множества A в банаховом пространстве E , а для отображения $Q: T \rightarrow \mathcal{P}(E)$ через \overline{Q} обозначаем отображение со значениями $\overline{Q}(t) = \overline{Q(t)}$.

Известно следующее обобщение теоремы Ауманна–Олеха об интеграле на отрезке T (обобщение со случая значений из \mathbb{R}^n на случай значений из сепарабельного банахова пространства E ; см., например, [18]).

Теорема Ауманна–Олеха. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, а отображение $Q: T \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримо, причем существует функция $k(\cdot) \in L(T, \mathbb{R}_+^1)$ такая, что $\|Q(t)\| \leq k(t)$ при п.в. $t \in T$. Тогда справедливо равенство множеств*

$$\overline{J(\mathcal{L}_T(Q))} = \overline{J(\mathcal{L}_T(\overline{\text{co}} Q))},$$

причем эти множества являются выпуклыми.

Теорема 2. *Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ является строго измеримо-псевдодолитшицевым в окрестности некоторой функции $y(\cdot)$ с константой Липшица $l(\cdot)$, числами $\delta \in (0, 1)$, $\beta > 0$, функциями $\rho(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\eta(\cdot)$, $\tilde{\eta}(\cdot)$ и отображениями $G(t, x)$ и $\tilde{G}(t, x)$ из (3.2), (5.2), причем*

$$m(t) \doteq \int_{t_0}^t l(\tau) d\tau, \quad \alpha \doteq \frac{1}{3} \delta e^{-m(t_1)-2\beta}, \quad a \doteq \delta + e^{m(t_1)+2\beta} \int_{t_0}^{t_1} \rho(\tau) d\tau, \quad (5.8)$$

$$\xi(t) \doteq a, \quad \eta(t) \doteq (l(t)a + \rho(t)(1 + \beta)), \quad \tilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t), \quad t \in T. \quad (5.9)$$

Тогда для любых $u_0 \in B_\alpha(y(t_0))$, $v_0 \in B_\alpha(u_0)$ и любого решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} G, u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, v_0)$ такое, что $\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_C < \delta$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий теоремы следует, что множество решений $\mathcal{R}_T(G, u_0)$ и тем более множество решений $\mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} G, u_0)$ непусты. В самом деле, в силу формул (4.1), (4.2), (5.8) и (5.9) функции $\xi_\beta(\cdot)$ и $\eta_\beta(\cdot)$, взятые из условий теоремы 1, очевидно, удовлетворяют неравенствам $\xi_\beta(t) \leq a$ и $\eta_\beta(t) \leq \eta(t)$. Кроме того, справедливо включение $G(t, x) \subset \tilde{G}(t, x)$ при всех $(t, x) \in W$. Поэтому выполнены все условия теоремы 1 для отображения G , в силу которой, а также в силу замечания 1 получаем, что множество $\mathcal{R}_T(G, u_0)$ непусто.

Определим функцию $k(t) \doteq \|y'(t)\| + \eta(t)$. Очевидно, что $k(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$. По свойству интеграла Лебега существует конечное разбиение отрезка $T = [t_0, t_1]$ точками $\theta_0 = t_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < \dots < \theta_N = t_1$ такое, что для любого отрезка $T_n \doteq [\theta_{n-1}, \theta_n]$ имеем

$$\int_{T_n} k(s) ds \leq \frac{\alpha}{2}. \quad (5.10)$$

Пусть выбрано некоторое решение $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} G, u_0)$. Интегрируя $u'(t)$ на отрезке T_n , получаем, что $u(\theta_n) - u(\theta_{n-1}) \in J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{\text{co}} G(\cdot, u(\cdot))))$. В силу обобщенной теоремы Ауманна–Олеха справедливо равенство замыканий интегралов Ауманна–Лебега

$$\overline{J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{G}(\cdot, u(\cdot))))} = \overline{J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{\text{co}} G(\cdot, u(\cdot))))} \quad \forall n \in \overline{1, N},$$

из которого получаем

$$u(\theta_n) - u(\theta_{n-1}) \in \overline{J(\mathcal{L}_{T_n}(\overline{G}(\cdot, u(\cdot))))} \quad \forall n \in \overline{1, N}.$$

Это значит, что существуют функции $w_n(\cdot) \in \mathcal{L}_{T_n}(\overline{G}(\cdot, u(\cdot)))$ такие, что

$$\left\| u(\theta_n) - u(\theta_{n-1}) - \int_{T_n} w_n(s) ds \right\| < \frac{\alpha}{N+1} \quad \forall n \in \overline{1, N}. \quad (5.11)$$

Определим функцию $z(\cdot) \in \text{AC}(T, E)$ такую, что

$$z(t_0) = u_0 \quad \text{и} \quad z'(t) = w_n(t) \quad \text{при п.в. } t \in T_n.$$

Это значит, что $z(\theta_n) - z(\theta_{n-1}) = \int_{T_n} w_n(s) ds$, откуда в силу (5.11), суммируя по всем $n \in \overline{1, k}$ при $k \in \overline{1, N}$, получаем

$$\|u(\theta_k) - z(\theta_k)\| < \alpha \quad \forall k \in \overline{1, N}. \quad (5.12)$$

Для любого $t \in T$ найдется $k \in \overline{1, N}$ такое, что $t \in T_{k+1}$. Так как значения $\|u'(s)\|$ и $\|z'(s)\|$ ограничены значением $k(s)$ при п.в. $s \in T$, то в силу (5.10) и (5.12) получаем

$$\|u(t) - z(t)\| \leq \|u(\theta_k) - z(\theta_k)\| + \|u(t) - u(\theta_k)\| + \|z(t) - z(\theta_k)\| < 2\alpha.$$

По построению $z'(t) \in \overline{G(t, u(t))} \subset \tilde{G}(t, u(t))$ при п.в. $t \in T$. Поэтому получаем

$$\varrho(z'(t), F(t, z(t))) \leq \varrho(z'(t), G(t, u(t))) + h^+(G(t, u(t)), F(t, z(t))) \leq l(t)\|u(t) - z(t)\| \leq 2\alpha l(t).$$

Кроме того, из включения $z'(t) \in \overline{G(t, u(t))}$ и из определения отображения G следует, что $\|z'(t) - y'(t)\| \leq \eta(t)$, откуда

$$\|z(t) - y(t)\| \leq \alpha + \int_{t_0}^t \eta(s) ds.$$

Определим отображение

$$H(t, x) \doteq F(t, x) \cap (z'(t) + 2\eta(t)\overline{B_1(0)}), \quad (t, x) \in W.$$

Очевидно, что $\overline{G(t, x)} \subset H(t, x) \subset \tilde{G}(t, x)$ при любых $(t, x) \in W$. Таким образом, показали, что отображение F является измеримо-псевдолипшицевым в некоторой окрестности функции $z(\cdot)$,

а именно в окрестности $V \doteq \{(t, x, z) \mid \|x - z(t)\| < \delta - \alpha + 2 \int_{t_0}^t \eta(s) ds, \|z - z'(t)\| \leq 2\eta(t)\}$. По теореме 1 для любого $v_0 \in B_\alpha(u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(H, v_0) \subset \mathcal{R}_T(\tilde{G}, v_0) \subset \mathcal{R}_T(F, v_0)$ такое, что

$$\begin{aligned} \|z(t) - v(t)\| &\leq \tilde{\xi}_\beta(t) \doteq e^{m(t)+\beta} \left(\alpha + \int_{t_0}^t e^{-m(s)} 2\alpha l(s) ds (1 + \beta) \right) \leq \\ &\leq 3\alpha e^{m(t)+2\beta} - 2\alpha e^\beta (1 + \beta) < \delta - 2\alpha \quad \forall t \in T. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\|z'(t) - v'(t)\| \leq \tilde{\eta}_\beta(t) \doteq l(t) \tilde{\xi}_\beta(t) + 2\alpha l(t)(1 + \beta) \leq 3\alpha e^{m(t)+2\beta} l(t) < \eta(t).$$

Выведенные оценки показывают, что решение $v(\cdot)$ не выходит из заданной в теореме 1 окрестности V . Кроме того, очевидно получаем, что

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \|u(t) - z(t)\| + \|z(t) - v(t)\| < 2\alpha + (\delta - 2\alpha) = \delta,$$

что и завершает доказательство теоремы. \square

Следствие 2. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримо по t и липшицево по x с константой Липшица $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$. Пусть существует функция $k(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$ такая, что $\|F(t, x)\| \leq k(t)$ при всех $x \in E$ и при п.в. $t \in T$. Тогда для любого $\delta > 0$, $u_0 \in E$, $v_0 \in B_{\delta/2}(u_0)$ и любого решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} F, u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, v_0)$ такое, что $\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_C < \delta$.

Доказательство. По теореме 1 множество $\mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} F, u_0)$ непусто. Пусть $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} F, u_0)$ и $\delta > 0$. Выбираем $y(t) \equiv 0$, $\xi(t) \equiv \delta$, $\rho(\cdot) = k(\cdot)$, $\eta(t) = l(t) + k(t)$. Тогда очевидно, что $G(t, x) = H(t, x) = F(t, x)$ для всех $(t, x) \in W$, и по теореме 2 получаем искомое решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, v_0)$. \square

Следствие 3. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ является строго измеримо-псевдодлипищевым в окрестности решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$, т.е. удовлетворяет условию 2 с некоторыми $\delta \in (0, 1)$, $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$, $m(t) = \int_{t_0}^t l(s) ds$, $\eta(t) \doteq (l(t) + 1)\delta$ и $\tilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t)$. Пусть $\alpha \doteq \frac{\delta}{3} e^{-m(t_1)}$. Тогда для любых $u_0 \in B_\alpha(\hat{x}_0)$, $v_0 \in B_\alpha(u_0)$ и решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\overline{\text{co}} G, u_0)$ существует решение $v(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, v_0)$ такое, что $\|u(\cdot) - v(\cdot)\|_C < \delta$.

6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ПО НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Пусть заданы многозначное отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ и дифференциальное включение

$$x' \in F(t, x), \quad t \in T. \quad (6.1)$$

Считаем, что множество решений $\mathcal{R}_T(F, C_0)$ задачи Коши дифференциального включения непусто. (Это можно гарантировать, например, потребовав выполнения условий теорем существования и продолжимости решений задачи Коши для дифференциального включения.)

Зафиксируем некоторое решение $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$ дифференциального включения (6.1).

Приведем частные случаи определения измеримо-псевдодлипищевца (и строго измеримо-псевдодлипищевца) отображения F в окрестности решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$, т.е. когда отображение F удовлетворяет условию 1 (или условию 2) при $y(t) = \hat{x}(t)$.

Условие 3. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ таково, что существует решение $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$. Пусть существуют число $\delta > 0$, функции $l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$ и $\eta(t) \doteq (l(t) + 1)\delta$,

$t \in T$, а также множество $W \doteq \{(t, x) \in T \times E \mid \|x - \hat{x}(t)\| \leq \delta, t \in T\}$ такие, что выполнены три условия:

1) непусты множества

$$G(t, x) \doteq F(t, x) \cap (\hat{x}'(t) + \eta(t)B_1(0)) \quad \forall (t, x) \in W; \quad (6.2)$$

2) для любой функции $v(\cdot) \in C(T, E)$, у которой $\text{graph } v \subset W$, отображение $t \rightarrow G(t, v(t))$ измеримо;

3) для любых точек $(t, x_1), (t, x_2) \in W$ справедливы включения

$$G(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \quad (6.3)$$

При выполнении условия 3 отображение F называется *измеримо-псевдолишцевым в окрестности решения $\hat{x}(\cdot)$* .

Условие 4. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ измеримо-псевдолишцево в окрестности решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$ (т.е. удовлетворяет условию 3). Пусть определены функция $\tilde{\eta}(t) \doteq 3\eta(t)$, $t \in T$, и множества

$$\tilde{G}(t, x) \doteq F(t, x) \cap (\hat{x}'(t) + \tilde{\eta}(t)B_1(0)) \quad \forall (t, x) \in W. \quad (6.4)$$

Пусть дополнительно выполнены условия:

2') для любой функции $v(\cdot) \in C(T, E)$, у которой $\text{graph } v \subset W$, отображение $t \rightarrow \tilde{G}(t, v(t))$ измеримо;

3') для любых $(t, x_1), (t, x_2) \in W$ справедливы включения

$$\tilde{G}(t, x_1) \subset F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|\overline{B_1(0)}. \quad (6.5)$$

При выполнении условия 4 отображение F называется *строго измеримо-псевдолишцевым в окрестности решения $\hat{x}(\cdot)$* .

Условие 5. Допустим, что отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ в окрестности решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$ удовлетворяет условию 3. Допустим также, что отображение $G: W \rightarrow \mathcal{P}(E)$, определяемое формулой (6.2), удовлетворяет равенству

$$G(t, x) = \text{co } G(t, x) \quad \forall (t, x) \in W. \quad (6.6)$$

Следуя работам [18, 11], напомним понятия верхней (или контингентной) и нижней производных многозначного отображения Q .

Верхняя производная $D_U Q(z_0): E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ отображения $Q: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ в точке $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } Q}$ для любого направления $u \in E$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} D_U Q(z_0)(u) &= \limsup_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ x \rightarrow u}} \lambda^{-1}(Q(x_0 + \lambda x) - y_0) \doteq \\ &\doteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\substack{\lambda \in (0, \varepsilon) \\ x: \|x - u\| < \varepsilon}} [\lambda^{-1}(Q(x_0 + \lambda x) - y_0) + \overline{B_\varepsilon(0)}]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Нижняя производная $D_L Q(z_0): E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ отображения $Q: X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ в точке $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\text{graph } Q}$ для любого направления $u \in X$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} D_L Q(z_0)(u) &= \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \left(\limsup_{x \rightarrow u} \lambda^{-1}(Q(x_0 + \lambda x) - y_0) \right) \doteq \\ &\doteq \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{\lambda \in (0, \delta)} \bigcup_{x \in \overline{B_\varepsilon(u)}} [\lambda^{-1}(Q(x_0 + \lambda x) - y_0) + \overline{B_\varepsilon(0)}]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Пусть заданы отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ и решение $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0)$. Тогда при каждом фиксированном $t \in T$ определим отображение $F_t: E \rightarrow \mathcal{F}(E)$, где $F_t(x) \doteq F(t, x)$, и для него рассмотрим определенные выше верхнюю $D_U F_t$ и нижнюю $D_L F_t$ многозначные производные в точке $(\hat{x}(t), \hat{x}'(t)) \in E \times E$ графика $\text{graph } F_t \doteq \{(x, y) \in E \times E \mid y \in F(t, x)\}$ по направлению $u \in E$. Так как в дальнейшем считаем, что решение $\hat{x}(\cdot)$ зафиксировано, то удобно эти производные переобозначить

$$F'_U(t, u) \doteq D_U F_t(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))(u), \quad (6.9)$$

$$F'_L(t, u) \doteq D_L F_t(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))(u). \quad (6.10)$$

Тогда по аналогии с введенными выше обозначениями $\mathcal{R}_T(F, x_0)$ для множества решений включения (6.1) символами $\mathcal{R}_T(F'_U, u_0)$ и $\mathcal{R}_T(F'_L, u_0)$ будем обозначать множества всех решений задач Коши соответствующих дифференциальных включений

$$u'(t) \in F'_U(t, u(t)), \quad t \in T \doteq [t_0, t_1], \quad (6.11)$$

$$u'(t) \in F'_L(t, u(t)), \quad t \in T, \quad (6.12)$$

с начальным условием $u(t_0) = u_0$. Включения (6.11), (6.12) называют *дифференциальными включениями в вариациях* относительно начального дифференциального включения (6.1) и его решения $\hat{x}(\cdot)$.

Аналогично если для дифференциального включения (6.1) выполнено условие 3, то при любом фиксированном $t \in T$ и любом $M \in \{L, U\}$ для отображений $x \rightarrow G(t, x) \doteq G_t(x)$ и $x \rightarrow \overline{\text{co}} G(t, x) \doteq \overline{\text{co}} G_t(x)$ (где $G(t, x)$ определяется по $F(t, x)$ в (6.2)) обозначим их M -производные в точке $(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ графика $\text{graph } G_t(\cdot) \subset \text{graph } \overline{\text{co}} G_t(\cdot)$ по направлению $u \in E$ через $G'_M(t, u)$ и $CG'_M(t, u)$. Таким образом,

$$G'_M(t, u) \doteq D_M G_t(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))(u), \quad (6.13)$$

$$CG'_M(t, u) \doteq D_M \overline{\text{co}} G_t(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))(u), \quad (6.14)$$

$$CF'_M(t, u) \doteq D_M \overline{\text{co}} F_t(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))(u). \quad (6.15)$$

Отметим, что в силу принципа локализации производной (см. [11]) справедливы соотношения

$$F'_M(t, u) = G'_M(t, u) \subset CG'_M(t, u) \subset CF'_M(t, u), \quad t \in T, \quad u \in E, \quad M \in \{L, U\}.$$

Мы хотим исследовать свойства производной множества решений задачи Коши дифференциального включения (6.1) по начальным данным.

Для этого рассмотрим также верхнюю и нижнюю производные отображения $x \rightarrow \mathcal{R}_T(F, x)$, т.е. отображения вида

$$\mathcal{R}_T(F, \cdot): E \rightarrow \mathcal{P}(\text{AC}(T, E)),$$

в точке его графика $(\hat{x}_0, \hat{x}(\cdot)) \in E \times \text{AC}(T, E)$ по направлению $u \in E$. Обозначая эти производные через $D_U^{\text{AC}}(u)$ и $D_L^{\text{AC}}(u)$, получаем

$$D_U^{\text{AC}}(u) \doteq \limsup_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ x \rightarrow u}} \frac{\mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0 + \lambda x) - \hat{x}(\cdot)}{\lambda}, \quad (6.16)$$

$$D_L^{\text{AC}}(u) \doteq \liminf_{\lambda \rightarrow 0} \left(\limsup_{x \rightarrow u} \frac{\mathcal{R}_T(F, \hat{x}_0 + \lambda x) - \hat{x}(\cdot)}{\lambda} \right). \quad (6.17)$$

Верхний и нижний пределы в (6.16), (6.17) нужно понимать как пределы многозначных отображений со значениями, принадлежащими пространству $Y \doteq \text{AC}(T, E)$.

В тоже время отображение $x \rightarrow \mathcal{R}_T(F, x)$ можно понимать как отображение, значениями которого являются подмножества пространства непрерывных функций $C(T, E)$, т.е. отображение вида

$$\mathcal{R}_T(F, \cdot): E \rightarrow \mathcal{P}(C(T, E)).$$

В этом случае верхняя и нижняя производные отображения $x \rightarrow \mathcal{R}_T(F, x)$ в точке его графика $(\hat{x}_0, \hat{x}(\cdot))$ по направлению $u \in E$ вычисляются по тем же формулам (6.16), (6.17) при условии, что понятия верхнего и нижнего пределов понимаются в более широком смысле — в смысле пространства $Y \doteq C(T, E)$. При этом соответствующие производные будем обозначать через $D_U^C(u)$ и $D_L^C(u)$.

Теорема 3. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримо-псевдодлишицево в окрестности решения $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ (т.е. выполнено условие 3), а F'_L определено в (6.10). Тогда для любого $u_0 \in E$ и любого решения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_L, u_0)$, у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$, справедливо включение $u(\cdot) \in D_L^{\text{AC}}(u_0)$. Кратко это можно записать так:

$$\mathcal{R}_T(F'_L, u_0) \cap (E \times L_\infty(T, E)) \subset D_L^{\text{AC}}(u_0). \quad (6.18)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное решение $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_L, u_0)$, у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$ и $u_0 \in E$. В силу принципа локализации производной для отображений $G(t, x)$ из (6.2) и $G'_L(t, u)$ из (6.13) получаем, что $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(G'_L, u_0)$, т.е.

$$u'(t) \in G'_L(t, u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad u(t_0) = u_0.$$

Кроме того, так как $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$, существует число $\vartheta > 0$ такое, что $\|u'(t)\| \leq \vartheta$ при п.в. $t \in T$.

Выберем произвольные числа $\beta \in (0, 1)$ и $\alpha > 0$ такие, чтобы выполнялись неравенства $2\alpha(1 + 2\|u(\cdot)\|_{\text{AC}}(1 + m(t_1))) \leq \delta e^{-m(t_1)-1}$ и $2\vartheta\alpha \leq \delta$, где $m(t) = \int_{t_0}^t l(\tau) d\tau$, $\delta > 0$ и $l(\cdot)$ из условия 3. Тогда для всех $\lambda \in (0, \alpha)$ оценим расстояние

$$\varrho(\hat{x}'(t) + \lambda u'(t), F(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t))) = \lambda \varrho\left(u'(t), \frac{F(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t)) - \hat{x}'(t)}{\lambda}\right) \equiv \lambda \rho(t, \lambda).$$

Из включения $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_L, u_0)$ следует, что при п.в. $t \in [t_0, t_1]$ значения функции $\rho(t, \lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow +0$. Кроме того, функции $t \rightarrow \rho(t, \lambda)$ измеримы и равномерно ограничены по норме суммируемой по Лебегу функцией. Покажем последнее. В силу очевидного неравенства $\varrho(x, B) \leq \varrho(x, A) + h^+(A, B)$, верного для всех $x \in E$, получаем

$$\begin{aligned} \rho(t, \lambda) &\leq \|u'(t)\| + \varrho\left(0, \frac{F(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t)) - \hat{x}'(t)}{\lambda}\right) = \|u'(t)\| + \frac{1}{\lambda} \varrho(\hat{x}'(t), F(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t))) \leq \\ &\leq \|u'(t)\| + \frac{1}{\lambda} \varrho(\hat{x}'(t), G(t, \hat{x}(t))) + \frac{1}{\lambda} h^+(G(t, \hat{x}(t)), F(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t))) \leq \\ &\leq \|u'(t)\| + l(t)\|u(t)\|. \end{aligned}$$

Итак, суммируемая мажоранта получена. При этом $\int_{t_0}^{t_1} \rho(t, \lambda) dt \leq (1 + m(t_1))\|u(\cdot)\|_{\text{AC}}$. По теореме Лебега (см., например, [19]) отсюда следует

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \rho(t, \lambda) dt = 0. \quad (6.19)$$

Пусть произвольная точка $v \in E$ такая, что $\|u_0 - v\| \leq 1$. В силу выбора числа α при любом $\lambda \in (0, \alpha)$ для функций вида

$$\xi_{\lambda, \beta}(t) \doteq e^{m(t)+\beta} \left(\lambda \|v - u_0\| + \int_{t_0}^t e^{-m(s)} \lambda \rho(s, \lambda) ds (1 + \beta) \right), \quad t \in T, \quad (6.20)$$

$$\eta_{\lambda, \beta}(t) \doteq l(t) \xi_{\lambda, \beta}(t) + \lambda \rho(t, \lambda) (1 + \beta), \quad t \in T, \quad (6.21)$$

получаем оценки

$$\xi_{\lambda}(t) < \frac{\delta}{2}, \quad \eta_{\lambda}(t) < (1 + l(t))\delta \quad \forall t \in T, \quad (6.22)$$

причем в силу формул (6.20), (6.21) найдется число $A > 0$ такое, что при всех $\lambda \in (0, \alpha)$

$$\max \left\{ \xi_{\lambda}(t_0), \int_{t_0}^{t_1} \eta_{\lambda}(s) ds \right\} \leq \lambda A \left(\|v - u_0\| + \int_{t_0}^{t_1} \rho(s, \lambda) ds \right). \quad (6.23)$$

Таким образом, выполнены необходимые оценки (6.22) измеримо-псевдолипшицевости отображения F в окрестности функции уклонения $y_{\lambda}(\cdot) \doteq \widehat{x}(\cdot) + \lambda u(\cdot)$, в силу которых по теореме 1 для любых $\lambda \in (0, \alpha)$ и $v \in B_{\alpha}(u_0)$ существует решение $x_{\lambda}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \widehat{x}_0 + \lambda v)$ такое, что

$$\|x_{\lambda}(\cdot) - \widehat{x}(\cdot) - \lambda u(\cdot)\|_{AC} \leq 2\lambda A \left(\|v - u_0\| + \int_{t_0}^{t_1} \rho(s, \lambda) ds \right).$$

Отсюда при условии, что $v \rightarrow u_0$, $\lambda \rightarrow +0$, в силу равенства (6.19) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_{\varepsilon} \in (0, \alpha]$ такое, что для всех $\lambda \in (0, \alpha_{\varepsilon})$ и $v \in B_{\alpha_{\varepsilon}}(u_0)$

$$u(\cdot) \in \frac{x_{\lambda}(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)}{\lambda} + \varepsilon B_1^{AC}(0) \subset \frac{\mathcal{R}_T(F, \widehat{x}_0 + \lambda v) - \widehat{x}(\cdot)}{\lambda} + \varepsilon B_1^{AC}(0). \quad (6.24)$$

В итоге, переходя к пределу по $\lambda \rightarrow +0$ и $v \rightarrow u_0$, получаем, что $u(\cdot) \in D_L^{AC}(u_0)$. Теорема доказана. \square

Следствие 4. Пусть заданное отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримо по t и липшицево по x с суммируемой константой $l(\cdot)$. Пусть задано решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$. Тогда справедливо включение

$$\mathcal{R}_T(F'_L, u_0) \subset D_L^{AC}(u_0) \quad \forall u_0 \in E. \quad (6.25)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, отличие лишь в том, что доказательство следствия проводится для дифференциального включения, в правой части которого стоит липшицево по x отображение F , и поэтому в заключительной части доказательства нужно использовать не общую теорему 1, а ее более простую версию для липшицева по x отображения F (см. замечание 1). В результате этого для доказательства существования решения $x_{\lambda}(\cdot)$ не требуется накладывать условие существенной ограниченности на функцию $\|u'(\cdot)\|$, достаточно ее суммируемость по Лебегу, которая очевидно следует из абсолютной непрерывности функции $u(\cdot)$.

Некоторое усиление теоремы 3 получаем с помощью теоремы 2 об овыпуклении.

Теорема 4. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ строго измеримо-псевдолипшицево около решения $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ (т.е. выполнено условие 4). Пусть $CG'_L(t, u)$ определено в (6.14). Тогда для любого $u_0 \in E$ и любого решения

$$u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(CG'_L, u_0), \quad (6.26)$$

у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$, справедливо включение $u(\cdot) \in D_L^C(u_0)$. Кратко это можно записать так:

$$\mathcal{R}_T(CG'_L, u_0) \cap (E \times L_\infty(T, E)) \subset D_L^C(u_0). \quad (6.27)$$

Доказательство. Фиксируем точку $u_0 \in E$ и произвольное решение $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(CG'_L, u_0)$, у которого $u'(\cdot) \in L_\infty(T, E)$. Пусть выбраны произвольные $v \in E$, $\|u_0 - v\| \leq 1$, и $\beta > 0$. Пусть число $\vartheta > 0$ такое, что $\|u'(t)\| \leq \vartheta$ при п.в. $t \in T$. Пусть $\delta > 0$, $l(\cdot)$, $G(t, x)$, $\bar{G}(t, x)$ из условия 4 и $m(t) \doteq \int_{t_0}^t l(\tau) d\tau$. Пусть число $\alpha > 0$ такое, что $\alpha e^{m(t_1)+\beta} \|u(\cdot)\|_{AC} \leq \delta$ и $\alpha\vartheta \leq \delta$. Определим функцию

$$\rho(t, \lambda) \doteq \varrho\left(u'(t), \frac{\bar{c}G(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t)) - \hat{x}'(t)}{\lambda}\right), \quad \lambda \in (0, \alpha). \quad (6.28)$$

В силу определения функции $u(\cdot)$ при почти каждом $t \in T$ значения функции $\rho(t, \lambda)$ стремятся к нулю при $\lambda \rightarrow 0$. Кроме того, функция $t \rightarrow \rho(t, \lambda)$ измерима. Покажем, что эта функция равномерно по $\lambda \in (0, \alpha)$ ограничена суммируемой функцией. Очевидно неравенство

$$\rho(t, \lambda) \leq \|u'(t)\| + \lambda^{-1} \varrho(\hat{x}'(t), \bar{c}G(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t))).$$

Оценим последнее слагаемое. При любом $\lambda \in (0, \alpha)$ в силу условия 4, определения отображения $G(t, x)$ из (6.2) и неравенства (5.5) получаем

$$\begin{aligned} \hat{x}'(t) &\in G(t, \hat{x}(t)) \cap (\hat{x}'(t) + \lambda \|u(\cdot)\|_{AC} B_1(0)) \subset \\ &\subset (F(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t)) + l(t)\lambda \|u(t)\| \overline{B_1(0)}) \cap (\hat{x}'(t) + \lambda \|u(\cdot)\|_{AC} B_1(0)) \subset \\ &\subset F(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t)) \cap (\hat{x}'(t) + \lambda \|u(\cdot)\|_{AC} (1 + l(t)) B_1(0)) + l(t)\lambda \|u(t)\| \overline{B_1(0)} \subset \\ &\subset G(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t)) + l(t)\lambda \|u(t)\| \overline{B_1(0)}, \end{aligned}$$

откуда выводим, что $\varrho(\hat{x}'(t), \bar{c}G(t, \hat{x}(t) + \lambda u(t))) \leq l(t)\lambda \|u(t)\|$. В итоге имеем суммируемую мажоранту для ρ вида

$$\rho(t, \lambda) \leq \|u'(t)\| + l(t)\|u(t)\| \quad \forall t \in T. \quad (6.29)$$

Отсюда по теореме Лебега получаем равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{t_0}^{t_1} \rho(t, \lambda) dt = 0. \quad (6.30)$$

Для каждого $\lambda \in (0, \alpha)$ выбираем начальное отклонение вида $y_\lambda(\cdot) \doteq \hat{x}(\cdot) + \lambda u(\cdot)$, для которого в силу (6.28) справедлива оценка

$$\varrho(y'_\lambda(t), \bar{c}G(t, y_\lambda(t))) \leq \lambda \rho(t, \lambda), \quad t \in T. \quad (6.31)$$

Аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 3, получаем оценки вида (6.22) и (6.23). Поэтому для любого $\lambda \in (0, \alpha)$ и любого $v \in B_\alpha(u_0)$ при функции уклонения $y(t) \doteq y_\lambda(t)$ по теореме 1 существует решение $u_\lambda(\cdot) \in \mathcal{R}_T(\bar{c}G, \hat{x}(t_0) + \lambda v)$ с соответствующей оценкой расстояния до $y_\lambda(\cdot)$. Затем для полученного решения $u_\lambda(\cdot)$ в силу строгой измеримопсевдוליпшицевости F по теореме 2 при $\delta = \lambda^2$ получаем близкое к $u_\lambda(\cdot)$ решение исходного включения. В итоге показали, что существует решение $x_\lambda(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, \hat{x}(t_0) + \lambda v)$, для которого справедливы неравенства

$$\|x_\lambda(t) - (\hat{x}(t) + \lambda u(t))\| \leq \xi_{\lambda, \beta}(t), \quad t \in T, \quad (6.32)$$

где

$$\xi_{\lambda, \beta}(t) \doteq \int_{t_0}^t e^{m(t)-m(s)+\beta} \lambda \rho(s, \lambda) ds + \lambda \|u_0 - v\| e^{m(t)+\beta} (1 + \beta) + \lambda^2. \quad (6.33)$$

Отсюда и из равенства (6.30) получаем

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, v \rightarrow u_0} \|\lambda^{-1}(x_\lambda(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)) - x(\cdot)\|_C = 0. \quad (6.34)$$

Иначе говоря, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\alpha_\varepsilon \in (0, \alpha)$ такое, что для всех $\lambda, v: \lambda \in (0, \alpha_\varepsilon), \|u_0 - v\| < \alpha_\varepsilon$, справедливо соотношение

$$u(\cdot) \in \lambda^{-1}(x_\lambda(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)) + \overline{\varepsilon B_1^C(0)} \subset \lambda^{-1}(\mathcal{R}_T(F, \widehat{x}(t_0) + \lambda v) - \widehat{x}(\cdot)) + \overline{\varepsilon B_1^C(0)},$$

что и означает включение $u(\cdot) \in D_L^C(u_0)$. \square

Покажем, что в теоремах 3 и 4 направление $u \in E$ удобно выбирать из касательного конуса к множеству начальных значений C_0 . Напомним (см. [20, 11]), что *нижний касательный конус к множеству A в точке $a \in \overline{A}$* вычисляется по формуле

$$T_L(A; a) \doteq \left\{ v \in E \mid \lim_{\lambda \rightarrow 0} \rho(v, \lambda^{-1}(A - a)) = 0 \right\}.$$

Следствие 5. Пусть заданы отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ и решение $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$. Пусть выполнено условие 3 (или условие 4). Тогда включение (6.18) (включение (6.27)) означает, что для всякого $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F'_L, T_L(C_0, \widehat{x}(t_0))) \cap (E \times L_\infty(T, E))$ (всякого $u(\cdot) \in \mathcal{R}_T(CG'_L, T_L(C_0, \widehat{x}(t_0))) \cap (E \times L_\infty(T, E))$) найдется $\alpha > 0$ такое, что для всех $\lambda \in (0, \alpha)$ существуют решения $x_\lambda(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, C_0)$ и функции $o(\lambda, \cdot)$ из $AC(T, E)$ (из $C(T, E)$) такие, что

$$x_\lambda(t) = \widehat{x}(t) + \lambda u(t) + o(\lambda, t), \quad t \in T, \quad (6.35)$$

где $\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lambda^{-1} \|o(\lambda, \cdot)\|_{AC} = 0$ ($\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lambda^{-1} \|o(\lambda, \cdot)\|_C = 0$).

Доказательство. Для любого $x \in E$ и $\lambda > 0$ обозначим через $\pi_\lambda(x)$ произвольную точку из множества $C_0 \cap (\rho(x, C_0) + \lambda^2) \overline{B_1(x)}$. Пусть $u_0 \in T_L(C_0, \widehat{x}(t_0))$ таково, что для заданного в условии $u(\cdot)$ справедливо равенство $u(t_0) = u_0$. Тогда в доказательстве теоремы 3 (теоремы 4) при каждом $\lambda > 0$ уточним $v = v_\lambda$, а именно положим $v_\lambda \doteq \lambda^{-1}(\pi_\lambda(\widehat{x}(t_0) + \lambda u_0) - \widehat{x}(t_0))$. Тогда $x_\lambda(t_0) \doteq \widehat{x}(t_0) + \lambda v_\lambda \in C_0$. В силу очевидного неравенства $\|v_\lambda - u_0\| \leq \rho(u_0, \lambda^{-1}(C_0 - \widehat{x}(t_0))) + \lambda$ и включения $u_0 \in T_L(C_0, \widehat{x}(t_0))$ получаем, что $\|v_\lambda - u_0\|$ стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$, откуда вытекает включение (6.24) (равенство (6.34)) при $v = v_\lambda$, из которого следует равенство (6.35). \square

Замечание 3. Утверждения теорем 3, 4 и следствий 4, 5 обобщают хорошо известные теоремы для дифференциальных уравнений о дифференцировании решений по начальным данным. Последние, как правило, содержат требование о дифференцируемости правой части уравнения по фазовой переменной. Нам же достаточно выполнения локального условия измеримо-псевдолиппшицевости правой части включения.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $x'(t) = |x(t)| + x^2(t)$, $t \in [0, 1]$, и его решение $\widehat{x}(t) \equiv 0$, $t \in [0, 1]$. В этом случае $F'_L(t, u) = |u|$ и по теореме 3 для каждого $u_0 \in \mathbb{R}$ и каждого $u(\cdot)$ — решения задачи Коши для уравнения $u'(t) = |u(t)|$ при $u(0) = u_0$ для достаточно малых $\lambda > 0$ функция $\lambda u(t)$ с точностью до $o(\lambda, t)$ есть решение задачи Коши для уравнения $x'(t) = |x(t)| + x^2(t)$ при $x(0) = \lambda u_0$.

Отметим, что даже в случае выполнения условия Липшица на правую часть дифференциального включения не удастся расширить класс вариаций $u(\cdot)$, для которых выполнялось бы соотношение (6.25), переходом от решений задачи Коши для включения в вариациях (6.12) к большему множеству решений задачи Коши для включения в вариациях (6.11). Имеет место следующее обратное включение.

Теорема 5. Пусть $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримо по t и липшицево по x с суммируемой константой $l(\cdot)$. Пусть задано решение $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$, для которого определены верхние производные $F'_U(t, u)$ (с.м. (6.9)) и $D_U^{\text{AC}}(u)$ (с.м. (6.16)). Тогда для любого $u_0 \in E$ справедливо включение

$$D_U^{\text{AC}}(u_0) \subset \mathcal{R}_T(F'_U, u_0).$$

Доказательство. Если $u(\cdot) \in D_U^{\text{AC}}(u_0)$, то существуют последовательности чисел $\lambda_k \rightarrow +0$, векторов $u_k \rightarrow u_0$ и функций $x_k(\cdot, x_0 + \lambda_k u_k) \in \mathcal{R}_T(F, x_0 + \lambda_k u_k)$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $u(\cdot) = \lim_{\lambda_k \rightarrow +0} \lambda_k^{-1}(x_k(\cdot, x_0 + \lambda_k u_k) - \hat{x}(\cdot))$, где предел берется в пространстве $\text{AC}(T, E)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k^{-1}(x'_k(t, x_0 + \lambda_k u_k) - \hat{x}'(t))$ сходится к $u'(t)$ при п.в. $t \in T$. В свою очередь, в силу липшицевости по x отображения F получаем

$$\frac{x'_k(t, x_0 + \lambda_k u_k) - \hat{x}'(t)}{\lambda_k} \in \frac{F(t, \hat{x}(t) + \lambda_k u(t)) - \hat{x}'(t)}{\lambda_k} + l(t) \left\| \frac{x_k(t, x_0 + \lambda_k u_k) - \hat{x}(t)}{\lambda_k} - u(t) \right\|_{\overline{B_1(0)}}.$$

В пределе при $k \rightarrow +\infty$ получаем $u'(t) \in F'_U(t, u(t))$, $t \in T$, что и требовалось доказать. \square

Следствие 6. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримо по t и липшицево по x с суммируемой константой $l(\cdot)$. Пусть задано решение $\hat{x}(\cdot) \in \mathcal{R}_T(F, x_0)$. Пусть для каждого $t \in T$ отображение $x \rightarrow F(t, x)$ дифференцируемо в точке $(\hat{x}(t), \hat{x}'(t))$ по любому направлению $u \in E$ (в том смысле, что справедливо равенство $F'_L(t, u) = F'_U(t, u)$). Тогда для любого $u_0 \in E$ имеет место равенство

$$D_L^{\text{AC}}(u_0) = D_U^{\text{AC}}(u_0) = \mathcal{R}_T(F'_L, u_0).$$

7. О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

В этом разделе доказана теорема 6, которая уточняет теоремы 1 и 2. В ней доказано существование непрерывных отображений из множества начальных функций-приближений в множество решений дифференциального включения, правда, при дополнительном условии некоторой локальной выпуклости.

Введем обозначение. Для произвольного множества A из пространства $\text{AC}(T, E)$ и для любого $t \in T$ через $A|_t$ будем обозначать множество вида $A|_t \doteq \{x(t) \in E \mid x(\cdot) \in A\}$. Аналогично для всякого множества $W \subset \mathbb{R}^1 \times E$ через $W|_t$ будем обозначать множество $W|_t \doteq \{x \in E \mid (t, x) \in W\}$.

Пусть задано многозначное отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$, которое является измеримо-псевдολипшицевым в окрестности некоторой заданной функции $y(\cdot) \in \text{AC}(T, E)$, т.е. оно удовлетворяет условию 1. По этому условию заданы числа $\beta, \delta \in (0, 1)$, функции $\rho(\cdot), l(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$ такие, что $\varrho(y'(t), F(t, y(t))) \leq \rho(t)$ при п.в. $t \in T$, замкнутая область $W \subset T \times E$, отображение $G(t, x)$ по формуле (3.2) и функции $\xi(\cdot) = \xi_\beta(\cdot)$, $m(\cdot)$ и $\eta(\cdot) = \eta_\beta(\cdot)$, которые определены по формулам (4.1) и (4.2). Тогда для всякого $\varepsilon \geq 0$ и отображения $d: E \rightarrow E$ определим в пространстве $\text{AC}(T, E)$ множество

$$A_\varepsilon(F) \doteq \left\{ z(\cdot) \in \text{AC}(T, E) \mid \|d(z(t_0)) - z(t_0)\| \leq \delta; \varrho(z'(t), F(t, z(t))) \leq \rho(t), t \in T; \|z'(t) - y'(t)\| \leq \eta_\beta(t) - \rho(t)(1 + \beta), t \in T; \{(t, x) \mid t \in T, \|x - z(t)\| \leq \xi_\beta(t) + \varepsilon\} \subset W \right\}. \quad (7.1)$$

Также определим функции расстояния

$$\rho(t, x, z) \doteq \varrho(z, F(t, x)), \quad \rho_k(t, x, z) \doteq \rho(t, x, z)(1 + \beta \cdot 2^{-k}) \quad (7.2)$$

и отображения

$$R_k: W \times E \rightarrow \mathcal{F}(E), \quad R_k(t, x, z) \doteq \overline{(z + \rho_k(t, x, z)B_1(0)) \cap F(t, x)}. \quad (7.3)$$

Лемма 3. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности заданной функции $y(\cdot) \in \text{AC}(T, E)$, а $G: W \rightarrow \mathcal{P}(E)$ определено в (3.2). Тогда справедливо равенство

$$A_\varepsilon(F) = A_\varepsilon(G).$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любой точки $(t, x) \in W$ и любой точки $z \in E$, удовлетворяющей условиям $\|z - y'(t)\| < \eta_\beta(t) - \rho(t)(1 + \beta)$ и $\varrho(z, F(t, x)) \leq \rho(t)$, справедливо равенство

$$\varrho(z, F(t, x)) = \varrho(z, G(t, x)). \quad (7.4)$$

Так как $G(t, x) \subset F(t, x)$, всегда $\varrho(z, F(t, x)) \leq \varrho(z, G(t, x))$. Докажем обратное неравенство. В силу условий на выбор z для любого числа $\alpha \in (0, \beta)$ существует точка $w_\alpha \in F(t, x)$ такая, что $\|z - w_\alpha\| \leq \varrho(z, F(t, x))(1 + \alpha)$. Поэтому $\|w_\alpha - y'(t)\| \leq \|w_\alpha - z\| + \|z - y'(t)\| < \eta_\beta(t)$, т.е. $w_\alpha \in G(t, x)$ и $\varrho(z, G(t, x)) \leq \|z - w_\alpha\| \leq \varrho(z, F(t, x))(1 + \alpha)$. Устремляя α к нулю, получаем равенство (7.4), из которого, в свою очередь, следует требуемое равенство множеств. \square

Лемма 4. Пусть отображение $F: T \times E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ является измеримо-псевдолипшицевым в окрестности заданной функции $y(\cdot) \in \text{AC}(T, E)$. Пусть отображение $G: W \rightarrow \mathcal{P}(E)$, определенное в (3.2), измеримо по t и справедливо равенство (условие локальной выпуклости F)

$$G(t, x) = \text{co } G(t, x) \quad \text{при всех } (t, x) \in W.$$

Тогда на множестве

$$V \doteq \{(t, x, z) \mid (t, x) \in W, \varrho(t, x, z) \leq \rho(t), \|z - y'(t)\| < \eta_\beta(t) - \rho(t)(1 + \beta)\}$$

при любом $k \in \mathbb{N}$ отображение $R_k: V \rightarrow \mathcal{F}(E)$ из (7.3) измеримо по t , пн.сн. по (x, z) и выпуклозначно.

Доказательство. По лемме 3 для любого $(t, x, z) \in V$ имеем равенство (7.4). Так как $\varrho_k(t, x, z) \leq \rho(t)(1 + \beta)$, имеем $z + \varrho_k(t, x, z)B_1(0) \subset y'(t) + \eta_\beta(t)B_1(0)$, откуда следует, что $(z + \varrho_k(t, x, z)B_1(0)) \cap F(t, x) \subset (y'(t) + \eta_\beta(t)B_1(0)) \cap F(t, x) = G(t, x)$. В итоге получаем равенство

$$R_k(t, x, z) = \overline{(z + \varrho_k(t, x, z)B_1(0)) \cap G(t, x)}. \quad (7.5)$$

Отсюда и из условия леммы следует, что отображения R_k измеримы по t и выпуклозначны. Докажем, что отображения $(x, z) \rightarrow R_k(t, x, z)$ пн.сн. на $V|_t$. Для любых $(t, x_1, z_1), (t, x_2, z_2) \in V$ в силу псевдолипшицевости F имеем

$$\begin{aligned} \varrho(z_1, F(t, x_1)) &= \varrho(z_1, G(t, x_1)) \geq \varrho(z_1, F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|B_1(0)) \geq \\ &\geq \varrho(z_2, F(t, x_2) + l(t)\|x_1 - x_2\|B_1(0)) - \|z_1 - z_2\| \geq \\ &\geq \varrho(z_2, F(t, x_2)) - l(t)\|x_1 - x_2\| - \|z_1 - z_2\|, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$|\rho(t, x_1, z_1) - \rho(t, x_2, z_2)| \leq l(t)\|x_1 - x_2\| + \|z_1 - z_2\|.$$

Итак, доказали, что функция $(x, z) \rightarrow \rho_k(t, x, z)$ непрерывна. В лемме 1 доказано, что для псевдолипищева отображения F отображение $x \rightarrow G(t, x)$ будет пн.сн. Кроме того, пересечение пн.сн. отображения с непрерывным (с открытыми значениями) отображением также будет пн.сн., а, в свою очередь, замыкание значений пн.сн. отображения приводит опять к пн.сн. отображению. Таким образом, отображение $(x, z) \rightarrow R_k(t, x, z)$ будет пн.сн. на $V|_t$. \square

Лемма 5. Пусть функция $f: T \times E \times E \rightarrow E$ измерима по первому аргументу $t \in T$ и непрерывна по $(x, z) \in E \times E$. Пусть последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$, $\{z_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходятся в $L_1(T, E)$ к $x_0(\cdot)$ и $z_0(\cdot)$ соответственно. Определим последовательность функций

$$u_i(t) \doteq f(t, x_i(t), z_i(t)) - z_i(t), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Пусть существует функция $k(\cdot) \in L_1(T, \mathbb{R}_+^1)$, для которой при всех $i \in \mathbb{N}$, $t \in T$ справедливы неравенства $\|u_i(t)\| \leq k(t)$. Тогда последовательность функций $\{u_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходится в $L_1(T, E)$ к функции $u_0(\cdot)$, где $u_0(t) \doteq f(t, x_0(t), z_0(t)) - z_0(t)$, $t \in T$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда существуют число $\varepsilon_0 > 0$ и подпоследовательности $\{x_{i_m}(\cdot)\}_{m=1}^\infty$, $\{z_{i_m}(\cdot)\}_{m=1}^\infty$ такие, что справедливо неравенство $\|u_{i_m}(\cdot) - u_0(\cdot)\|_{L_1} \geq \varepsilon_0$ при любом $m \in \mathbb{N}$. В силу сходимости в $L_1(T, E)$ заданных последовательностей функций без ограничения общности можно считать, что последовательности значений $\{x_{i_m}(t)\}$ и $\{z_{i_m}(t)\}$ сходятся при почти каждом $t \in T$. Из непрерывности отображения $(x, z) \rightarrow f(t, x, z)$ следует, что и последовательность значений $\{u_{i_m}(t)\}$ сходится к $u_0(t)$ при почти каждом $t \in T$. Так как для этой последовательности функций существует суммируемая мажоранта $k(\cdot)$, то в силу теоремы Лебега получаем, что последовательность функций $u_{i_m}(\cdot)$ сходится к $u_0(\cdot)$ в $L_1(T, E)$, а это противоречит допущению. \square

Теорема 6. Пусть отображение $F: W \rightarrow \mathcal{F}(E)$ измеримо-псевдолипищево в окрестности функции $y(\cdot) \in AC(t, E)$, причем отображение $G: W \rightarrow \mathcal{P}(E)$, определенное в (3.2), измеримо по t и справедливо равенство $G(t, x) = \text{co } G(t, x)$ при всех $(t, x) \in W$. Пусть множество $A_0(F)$ (определяемое по формуле (7.1) при $\varepsilon = 0$) непусто, функция $d: A_0(F)|_{t_0} \rightarrow E$ непрерывна, а множество $C_0 \subset E$ таково, что справедливо включение $C_0 \supset d(A_0(F)|_{t_0})$. Тогда существует непрерывное отображение $r: A_0(F) \rightarrow \mathcal{R}_T(F, C_0)$, причем для всякого $z(\cdot) \in A_0(F)$ справедливы оценки

$$\|z(t) - r(z(\cdot))(t)\| \leq \xi_\beta(t), \quad \left\| z'(t) - \frac{d}{dt} r(z(\cdot))(t) \right\| \leq \eta_\beta(t), \quad t \in T, \quad (7.6)$$

где $\xi_\beta(t)$ и $\eta_\beta(t)$ определены в (4.1) и (4.2).

Доказательство этой теоремы является уточнением доказательства теоремы 1. В силу леммы 4 каждое отображение R_k измеримо по t , полунепрерывно снизу по (x, z) и выпуклозначно. Поэтому (см., например, [21]) у него существует ветвь $f_k(t, x, z)$, удовлетворяющая условию Каратеодори, т.е. f_k измерима по t и непрерывна по (x, z) на V . Как и прежде, для всякого фиксированного $z(\cdot) \in A_0(F)$ определим последовательность функций $\{x_k(\cdot), v_k(\cdot)\}_{k=1}^{+\infty}$ вида

$$x_0(t) \doteq z(t), \quad x_{k+1}(t) = d(x_0(t_0)) + \int_{t_0}^t v_k(s) ds, \quad t \in T, \quad (7.7)$$

где

$$v_k(t) \doteq f_k(t, x_k(t), x'_k(t)). \quad (7.8)$$

Следуя доказательству теоремы 1, получаем, что функции $v_k(t)$ измеримы и суммируемы на отрезке T , причем функции $x_k(\cdot)$ и $v_k(\cdot)$ удовлетворяют не зависящим от $z(\cdot)$ оценкам и последовательность $x_k(\cdot)$ сходится к решению дифференциального включения, которое мы обозначим через $r(z(\cdot))(\cdot)$, чтобы подчеркнуть зависимость этого решения от начального приближения $z(\cdot)$. Осталось показать непрерывность отображения r .

Покажем, что каждая функция $x_k(\cdot)$ в (7.7) непрерывно зависит от $z(\cdot)$ как отображение из $A_0(F)$ в $AC(T, E)$. Для этого достаточно показать, что при каждом $k \in \mathbb{N}$ функция $x_k(\cdot)$ непрерывно зависит от $x_{k-1}(\cdot)$ как отображение из $AC(T, E)$ в $AC(T, E)$.

Сначала покажем это при $k = 1$. Пусть произвольная последовательность $\{y_i(\cdot)\}_{i=1}^{+\infty} \subset C A_0(F)$ сходится в $AC(T, E)$ к функции $y_0(\cdot)$. Введем обозначение $z_i(\cdot) \doteq y'_i(\cdot)$. Тогда в силу (7.7) для каждого $i \in \mathbb{N}$ получаем на первом шаге равенство

$$x_1^i(t) = d(y_i(t_0)) + \int_{t_0}^t f_1(s, y_i(s), z_i(s)) ds.$$

Так как по построению справедливо неравенство $\|f_1(t, y_i(t), z_i(t)) - z_i(t)\| \leq \rho(t)(1 + \beta)$ при п.в. $t \in T$, то, применяя лемму 5 и используя непрерывность функции $d(x)$, получаем, что $\|x_1^i(\cdot) - x_1^0(\cdot)\|_{AC} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow +\infty$.

При произвольном $k \in \mathbb{N}$ обоснование непрерывной зависимости x_{k+1} от x_k получается аналогично, нужно лишь в качестве мажоранты разности вместо $\rho(t)(1 + \beta)$ взять функцию $l(t)\xi_\beta(t)$.

В силу наличия равномерных оценок (4.12) (не зависящих от выбора $z(\cdot)$) получаем, что каждая последовательность $x_k(\cdot)$ сходится абсолютно и равномерно по $z(\cdot)$. Поэтому предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных по $z(\cdot)$ отображений будет также непрерывным по $z(\cdot)$.

Аналогично доказательству теоремы 1 в пределе получаем нужные оценки (7.6). Теорема доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Филиппов А.Ф. Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Математика, механика. 1967. №3. С. 16–26.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
3. Ważewski T. Sur une condition équivalente à l'équation au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 1961. V. 9. P. 865–867.
4. Половинкин Е.С., Смирнов Г.В. Дифференцирование многозначных отображений и свойства решений дифференциальных включений // ДАН СССР. 1986. Т. 288, №2. С. 296–301.
5. Половинкин Е.С., Смирнов Г.В. Об одном подходе к дифференцированию многозначных отображений и необходимые условия оптимальности решений дифференциальных включений // Диф. уравнения. 1986. Т. 22, №6. С. 944–954.
6. Половинкин Е.С., Смирнов Г.В. О задаче быстрогодействия для дифференциальных включений // Диф. уравнения. 1986. Т. 22, №8. С. 1351–1365.
7. Polovinkin E.S. The properties of continuity and differentiation of solution sets of Lipschitzean differential inclusions // Modeling, estimation and control of systems with uncertainty / Ed. by G.B. Di Masi, A. Gombani, A.B. Kurzhansky. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 349–360. (Prog. Syst. Control Theory; V. 10).
8. Polovinkin E.S. Necessary conditions for optimization problems with differential inclusions // Set-valued analysis and differential inclusions / Ed. by A.B. Kurzhanski, V.M. Veliov. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 157–170. (Prog. Syst. Control Theory; V. 16).
9. Половинкин Е.С. Необходимые условия в задаче оптимизации с дифференциальным включением // Тр. МИАН. 1995. Т. 211. С. 387–400.
10. Половинкин Е.С. Теорема существования решений дифференциального включения с псевдолиппшицевой правой частью // Нелинейный мир. 2012. Т. 10, №9. С. 571–578.

11. *Половинкин Е.С.* О некоторых свойствах производных многозначных отображений // Тр. МФТИ. 2012. Т. 4, №4. С. 141–154.
12. *Половинкин Е.С.* О вычислении полярного конуса к множеству решений дифференциального включения // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 178–187.
13. *Polovinkin E.* On differentiation of set-valued functions and differential inclusions // Constructive nonsmooth analysis and related topics: Abstr. Int. Conf., St. Petersburg, 2012. St. Petersburg: St. Petersburg Univ., 2012. P. 134–137.
14. *Aubin J.-P.* Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. Oper. Res. 1984. V. 9. P. 87–111.
15. *Castaing C.* Sur les multi-applications mesurables // Rev. Franç. Inform. Rech. Opér. 1967. V. 1, N 1. P. 91–126.
16. *Plis A.* Trajectories and quasitrajectories of an orientor field // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 1963. V. 11. P. 369–370.
17. *Aumann R.J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl. 1965. V. 12. P. 1–12.
18. *Aubin J.-P., Frankowska H.* Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 1990.
19. *Колмогоров А.Н., Фолмин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
20. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. 2-е изд. М.: Физматлит, 2007.
21. *Fryszkowski A.* Carathéodory type selectors of set-valued maps of two variables // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. math. astron. phys. 1977. V. 25. P. 41–46.