

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5,519.7

Г. Г. Аманжаев

О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ ФУНКЦИЙ ДРОБНОЙ ГЛАДКОСТИ

Вычисление непрерывных функций с вещественными областями определения и вещественными значениями посредством реальных вычислительных устройств фактически всегда заменяется вычислением некоторого дискретного оператора, который в каком-либо смысле адекватно представляет исходную непрерывную функцию. Чаще всего такие дискретные операторы определяются именно как «хорошие приближения» непрерывных функций (этот способ предложен А. Н. Колмогоровым [1] и развит его учениками и последователями [2—5]). Однако можно определять их через внутренние, эффективно проверяемые свойства дискретных функций.

В [6, 7] проведено построение дискретных аналогов функций конечной гладкости и исследованы их информационные и сложностные свойства. Настоящая работа содержит обобщения этих результатов на случай классов функций, на n -е производные которых наложено условие Гёльдера порядка α :

$$|f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \leq c |x - y|^\alpha.$$

Удалось определить дискретные аналоги таких классов, причем определения записываются через внутренние свойства дискретных функций, без привлечения непрерывных, но при этом для каждой функции из исходного непрерывного класса построенный дискретный содержит ее хорошее приближение. Для введенных классов найдены оценки мощности минимальных 1-приближающих множеств (содержащих для каждой функции из исследуемого класса ее приближение с точностью не хуже 1), а также разработан метод синтеза схем из функциональных элементов, реализующих дискретные функции с погрешностью не более единицы младшего разряда и со сложностью, близкой к минимально возможной. В случае $n + \alpha > 1$ сложность 1-приближенной реализации оказалась существенно меньше сложности точной реализации, хотя точную реализацию дискретной функции можно в свою очередь рассматривать как приближенное вычисление непрерывной (причем погрешность этого приближения имеет почти для всех непрерывных функций тот же порядок — единицы младшего разряда).

Пусть $r > 0$, $c > 0$, $n = [r]$ при дробных r и $n = r - 1$ при $r \in \mathbb{Z}$, $\alpha = r - n$. Определим исходный класс непрерывных функций, дискретные аналоги которого будут построены ниже, следующим образом:

$$H_{r,c} = \{f: [0, 1) \rightarrow [0, 1) \mid |f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y)| \leq c |x - y|^\alpha\}$$

(с точностью до области определения и множества значений класс $H_{r,c}$ аналогичен классическому множеству функций W^nKH^α ; выбор функций вида $f: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ обусловлен только удобством дальнейшего определения их дискретных аналогов).

¹ $[x]$ — наибольшее целое число, не большее x ; $|x| = -[-x]$, $\{x\} = x - [x]$.

Назовем внешним дискретным аналогом² класса $H_{r,c}$ множество

$$\widehat{H}_{r,c}^N = \left\{ g: \{0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, N-1\} \mid (\exists f \in H_{r,c}) \right. \\ \left. (\forall x \in \{0, 1, \dots, N-1\}) g(x) = \left[Nf\left(\frac{1}{2N} + \frac{x}{N}\right) \right] \right\};$$

далее множество $\{0, 1, \dots, N-1\}$ будем обозначать через I_N .

Для более явного определения классов дискретных функций необходима какая-либо их характеристика, подобная производной для непрерывных функций. В качестве такой характеристики естественно рассмотреть конечные разности. Мы воспользуемся разделенными конечными разностями, которые определим индуктивно, положив

$$\Delta_0(f; x) = f(x),$$

$$\Delta_{n+1}(f; x_0, \dots, x_{n+1}) = \frac{\Delta_n(f; x_0, \dots, x_n) - \Delta_n(f; x_1, \dots, x_{n+1})}{x_0 - x_{n+1}};$$

здесь x_0, \dots, x_{n+1} — различные точки из области определения f .

Лемма 1. Если функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ такова, что $|\hat{f}^{(n)}(x) - \hat{f}^{(n)}(y)| \leq C|x-y|^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$, то для $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} < 1$ имеет место оценка

$$|\Delta_{n+1}(f; x_0, \dots, x_{n+1})| \leq C(x_{n+1} - x_0)^{\alpha-1/n!}.$$

Исходя из этого свойства функций, оценим Δ_{n+1} для функций из $\widehat{H}_{r,c}^N$. Введем величину

$$\varphi_h(x_0, \dots, x_h) = \sup_{h: \mathbf{R} \rightarrow [-1/2, 1/2]} \Delta_h(h; x_0, \dots, x_h).$$

Тогда имеет место

Лемма 2. Если $g \in \widehat{H}_{r,c}^N$, $x_0, \dots, x_{n+1} \in I_N$, $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$, то

$$|\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})| < \frac{C}{n! N^n} (x_{n+1} - x_0)^{\alpha-1} + \varphi_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

Доказательство. Представим $g(x)$ в виде $Nf(x/N + 1/(2N)) - 1/2 + (1/2 - \{Nf(x/N + 1/(2N))\})$; в силу линейности величину $\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})$ также можно записать в виде суммы соответствующих трех слагаемых. Первое из них не превосходит величины $\frac{C}{n! N^n} (x_{n+1} - x_0)^{\alpha-1}$, второе равно нулю, а третье не превосходит φ_{n+1} , так как величина вида $1/2 - \{z\}$ имеет значение из $(-1/2, 1/2]$. Лемма доказана.

Определим теперь дискретный аналог класса $H_{r,c}$ «внутренним образом», через свойства самих дискретных функций, а именно положим

$$H_{r,c}^N = \left\{ g: I_N \rightarrow I_N \mid (\forall x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in I_N, x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}) \right.$$

$$\left. |\Delta_{n+1}(g; x_0, \dots, x_{n+1})| < \frac{C}{n! N^n} (x_{n+1} - x_0)^{\alpha-1} + \varphi_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}) \right\}.$$

Непосредственно из определения следует, что $\widehat{H}_{r,c}^N \subset H_{r,c}^N$.

² Слово «внешний» используется с целью показать, что данные дискретные функции определяются через внешнее относительно них множество непрерывных функций.

Назовем множество M функций вида $f: I_N \rightarrow I_N$ 1-приближающим для класса K таких функций, если

$$(\forall f_1 \in K) (\exists f_2 \in M) (\forall x \in I_N) |f_1(x) - f_2(x)| \leq 1;$$

наименьшую мощность 1-приближающего множества для класса K обозначим $\text{Approx } K$.

Теорема 1. При $r > 1$ и достаточно больших N имеют место неравенства

$$C_1 (NC)^{1/r} \leq \log_2 \text{Approx } \hat{H}_{r,c}^N \leq \log_2 \text{Approx } H_{r,c}^N \leq C_2 (NC)^{1/r},$$

где C_i — положительные величины, не зависящие от N и C , точнее $C_i = \text{const}(r)$.

(Случай $0 < r < 1$ рассмотрен в [7]. Доказано, что как $\log \text{Approx } \hat{H}_{r,c}^N$, так и $\log \text{Approx } H_{r,c}^N$ имеют вид $(1-r)N \log N(1+o(1))$; для $r=1$ справедливы оценки

$$C_3 (\log(1+C)) N \leq \log_2 \text{Approx } \hat{H}_{1,c}^N \leq \log_2 \text{Approx } H_{1,c}^N \leq C_4 (\log(1+C)) N,$$

где $C_3 > 0$, $C_4 > 0$, а N достаточно велико.)

Доказательство. Для доказательства нижней оценки в $\hat{H}_{r,c}^N$ строится подмножество мощности $2^{C_1(NC)^{1/r}}$, такое, что любые два его элемента хотя бы в одной точке $x \in I_N$ отличаются не менее чем на 3; это множество аналогично приведенному в [8] ε -различимому множеству функций конечной гладкости.

Для доказательства верхней оценки заметим, что для функций $f \in H_{r,c}^N$, $r > 1$, имеют место следующие две оценки погрешности приближения многочленами:

$$(a) \text{ пусть } x \in I_N, C_i = 2^{i^2-1}, m = 2^{\lceil \log_2 N - (1/r) \log_2(CN) - 3r^2 \rceil},$$

$$u_i = \begin{cases} m \lfloor x/m \rfloor + mc_i, & x < N/2, \\ m \lfloor x/m \rfloor - mc_i, & x \geq N/2. \end{cases}$$

Пусть $p(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени n , построенный по значениям f в точках u_1, \dots, u_{n+1} , а $\xi(x)$ — любая функция, такая, что $|\xi(x)| \leq 1$. Тогда $f(x)$ не более чем на 1 отличается от ближайшего целого к $p(x) + \xi(x)$;

(б) пусть $\mu \in \mathbb{N}$, $m = 2^{\lceil \log_2 N - (1/r) \log_2(CN) - 3r^2 \rceil}$; $x \in I_N$ имеет вид $(k+1/2)m$, где $k \geq 0$; $\beta = 1$ или -1 и $u_i = x + \beta(i-1/2)m$, $1 \leq i \leq n+1$. Пусть $p(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени n , построенный по значениям $f(x)$ в точках u_1, \dots, u_{n+1} , а $\xi(x)$ — любая функция, такая, что $|\xi(x)| \leq 1$. Тогда $f(x)$ не более чем на $CN^{1-r}m^r(n+1) + 2(n+1)!$ отличается от ближайшего целого к $p(x) + \xi(x)$ числа.

Введем обозначение $H_{r,c}^{N,k} = \{f(0), f(k), \dots, f(k \lfloor (N-1)/k \rfloor)\}$, $f \in H_{r,c}^N$. Тогда из утверждения (а) следует, что $\text{Approx } H_{r,c}^N \leq |H_{r,c}^{N,m}|$, где $m = 2^{\lceil \log_2 N - (1/r) \log_2(CN) - 3r^2 \rceil}$. Из утверждения (б) вытекает оценка

$$|H_{r,c}^{N,k}| / |H_{r,c}^{N,2k}| \leq (1 + 2(CN^{1-r}(2k)^r + 2(n+1)!)) \left[\binom{N-1}{k} \right] - \left[\binom{N-1}{2k} \right].$$

Отсюда, последовательно удваивая параметр k и учитывая, что $|H_{r,c}^{N,k}| \leq N^{1+\lfloor \frac{N-1}{k} \rfloor}$, можно вывести требуемую верхнюю оценку. Теорема доказана.

Перейдем теперь к оценкам сложности приближенной (с погрешностью, не превосходящей 1) реализации функций из $\widehat{H}_{r,c}^N$ и $H_{r,c}^N$ схемами из функциональных элементов (определения схем и сложности булевых функций и операторов см. в [9, 10]). Пусть N — степень двойки; тогда числа из I_N естественным образом кодируются булевыми наборами длины $\log_2 N$ и функции вида $f: I_N \rightarrow I_N$ можно отождествить с булевыми $(\log_2 N, \log_2 N)$ -операторами. Пусть $L(f)$ — сложность функции f ; обозначим $L^{\text{Аpprox}}(f) = \min L(g)$, где \min берется по всем тем $g: I_N \rightarrow I_N$, для которых $|f(x) - g(x)| \leq 1$ при всех $x \in I_N$; пусть также $L^{\text{Аpprox}}(K) = \max_{f \in K} L^{\text{Аpprox}}(f)$ и $L(K) = \max_{f \in K} L(f)$.

Теорема 2. При $r > 1$ и достаточно больших N верны неравенства

$$C_5 \frac{(NC)^{1/r}}{\log_2 N} \leq L^{\text{Аpprox}}(\widehat{H}_{r,c}^N) \leq L^{\text{Аpprox}}(H_{r,c}^N) \leq C_6 \frac{(NC)^{1/r}}{\log_2 N},$$

где $C_i = \text{const}(r)$.

(При $0 < r < 1$ сложность как приближенной, так и точной реализации функций из таких классов есть $(1-r)N(1+o(1))$, см. [7]; при $r=1$ верхняя и нижняя оценки для $L^{\text{Аpprox}}$ имеют вид $\text{const} \log_2(1+C) \times \times N / \log_2 N$.)

Доказательство. Нижняя оценка следует из доказанной в [9] оценки $L(K) \geq (\rho \log_2 |K| / \log_2 \log_2 |K|) (1+o(1))$ ($\rho > 0$ — характеристика базиса (набора элементарных операций), используемого для построения схем [9, 10]), справедливой для классов K булевых операторов при достаточно большой их мощности (сравнительно с числом их аргументов и значений), поскольку $L^{\text{Аpprox}}(K) = \min_M L(M)$, где \min берется по всем 1-приближающим класс K множествам M .

Для доказательства верхней оценки построим схему, вычисляющую $f \in H_{r,c}^N$ с погрешностью ≤ 1 . Обозначим через $F_{\mu,l}$ оператор, который по данному x вычисляет значения f во всех точках из $I_N \cap [x-l \times \times 2^\mu, x+l2^\mu]$, кратных 2^μ ; так как $F_{\mu,l}$ есть $(\log_2 N - \mu, 2l \log_2 N)$ -оператор, то

$$L(F_{\mu,l}) \leq \rho \ 2l \log_2 N \frac{2^{\log_2 N - \mu}}{\log_2 N - \mu} (1+o(1))$$

(см. [9]). Более точную оценку сложности можно получить, сводя вычисление $F_{\mu-1,l}$ к вычислению $F_{\mu,l}$, полиномиальной экстраполяции и исправлению найденных значений (см. утверждение (б) из доказательства теоремы 1). Отсюда

$$L(F_{\mu-1,l}) \leq L(F_{\mu,l}) + O(l \log_2^2 N) + \rho \frac{2^{\log_2 N - \mu}}{\log_2 N - \mu} O(\log_2 A),$$

где $A = CN^{1-r} m^r (n+1) + 2(n+1)!$ — погрешность экстраполяции. Последовательно уменьшая μ , вычислим $F_{\mu,l}$ при $\mu = \left\lceil \log_2 N - \frac{\log_2(CN)}{r} - 3r^2 \right\rceil$.

После этого найдем $f(x)$ линейной интерполяцией (ее погрешность не больше 1, как указано в утверждении (а) из доказательства теоремы 1). Сложность последней есть $O(\log_2 N)^2$.

Общая сложность всех проведенных вычислений не превышает

$$\text{const } \rho \frac{(NC)^{1/r}}{\log_2 N}.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Поясним необходимость приближенного вычисления функций и введения величины Арргох. Можно показать, что независимо от r и c мощность классов $\hat{H}_{r,c}^N$ и $H_{r,c}^N$ при $N \rightarrow \infty$ есть $2^{N(1+o(1))}$, поэтому для точной реализации функций из этих классов потребуется сложность $\geq \rho N / \log_2 N (1+o(1))$ (на самом деле справедлива и верхняя оценка того же вида). Переход же к приближенной реализации существенно снижает сложность. Что же касается погрешности, которая возникает при приближенном вычислении, то она не столь существенна, так как сами функции из $\hat{H}_{r,c}^N$ и $H_{r,c}^N$ можно рассматривать как средство для приближенного вычисления непрерывных функций из $\hat{H}_{r,c}$.

Замечание 2. Мы рассматривали 1-приближение в равномерной метрике $\|f\| = \max_{x \in I_N} |f(x)|$. Переход к метрикам «в среднем»: $\|f\|_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{x \in I_N} |f(x)|^p \right)^{1/p}$, вообще говоря, позволяет уменьшить Арргох и $L_{\text{Арргох}}$, но порядок этих величин останется тем же; константы c_1 и c_2 можно выбрать общими для всех таких метрик.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность своему учителю О. Б. Лупанову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А. Н. Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Intern. Congr. Math. Stockholm. 1963. 230—250.
2. Офман Ю. О приближенной реализации непрерывных функций на автоматах // Докл. АН СССР. 1963. 152, № 4. 823—826.
3. Офман Ю. Об алгоритмической сложности дискретных функций // Докл. АН СССР. 1962. 145, № 1. 48—51.
4. Тогер А. В. О сложности некоторых функциональных классов // Докл. АН СССР. 1971. 199, № 4. 789—791.
5. Асарин Е. А. О сложности равномерных приближений непрерывных функций // Успехи матем. наук. 1984. 39, № 3. 157—169.
6. Аманжаев Г. Г. Дискретный аналог гладких функций // Алгебра, геометрия и дискретная математика в нелинейных задачах. М., 1991. 4—24.
7. Аманжаев Г. Г. Дискретные функции с заданным модулем непрерывности // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1992. № 5. 86—89.
8. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ϵ -Энтропия и ϵ -емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи матем. наук. 1959. 14, № 2 (86). 3—86.
9. Лупанов О. Б. Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 14. 31—110.
10. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. 1963. Вып. 10. 63—97.

Поступила в редакцию
21.02.94

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 519.716

С. А. Гизунов, В. А. Носов

СЛОЖНОСТЬ РАСПОЗНАВАНИЯ КЛАССОВ ШЕФФЕРА

1. В работе [1] Шеффером была решена задача о сложности распознавания выполнимости формул, представляющих собой конъюнкцию отношений на множестве двоичных наборов.