G. Rozenblum, M. Solomyak, The Cwikel–Lieb–Rozenblyum estimator for generators of positive semigroups and semigroups dominated by positive semigroups,
Algebra i Analiz, 1997, Volume 9, Issue 6, 214–236

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

Посвящается памяти Марка Григорьевича Крейна

ОЦЕНКА ЦЛР ДЛЯ ГЕНЕРАТОРОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ПОЛУГРУПП И ПОЛУГРУПП, ДОМИНИРУЕМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ

© Г. Розенблюм, М. Соломяк

Пусть B — генератор сохраняющий положительность (коротко, положительной) полугруппы в L_2 на некотором пространстве с σ-конечной мерой. Предполагается, что при $t > 0$ операторы e^{-tB} действуют непрерывно из L_2 в L_∞. Для измеримой функции $V \geqslant 0$ получена оценка количества отрицательных собственных значений оператора $B - V$. Известная оценка ЦЛР для числа отрицательных собственных значений оператора Шрёдингера в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, является частным случаем этого результата, причем воспроизводится наилучшее известное значение оценочной постоянной. Дано также обобщение на генераторы полугрупп, доминируемых положительной полугруппой.

§1. Введение

1.1. Оценка ЦЛР, в ее первоначальной форме, состоит в том, что

$$N_-(-\Delta - V) \leqslant C(d) \int_{\mathbb{R}^d} V^{d/2} dx, \quad d \geqslant 3. \tag{1.1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа на $\mathbb{R}^d$ и $V \geqslant 0$ — измеримая функция (потенциал). Через N_- обозначается количество отрицательных собственных значений самосопряженного оператора при условии, что его отрицательный спектр дискретен. Единственное условие на V, обеспечивающее справедливость (1.1), — конечность интеграла в правой части.

К настоящему времени известно не менее пяти различных доказательств оценки (1.1). В хронологическом порядке, они были даны Розенблюмом [23],

Ключевые слова: оценка Цвикеля–Либа–Розенблюма; полугруппа, сохраняющая положительность; оператор Шрёдингера.

Цвикелем [11], Либом [19], Ли и Яу [18] и Конлоном [9]. Доказательство Розенблюма изложено также в книгах [5] и [13], доказательство Цвикеля — в [25]. Доказательство Либа, в двух различных вариантах, представлено в [22] и [26], а доказательство Ли и Яу — в [13]. Имеются обобщения оценки (1.1) на операторы высших порядков (например, с $(-\Delta)^l$ вместо $-\Delta$) и на вырождающиеся эллиптические операторы, см. [23]. Другие обобщения относятся к важным операторам математической физики, таким как магнитный и релятивистский операторы Шрёдингера, оператор Паули, и т. п. См. [20], где обсуждаются физические приложения оценки (1.1) и ее аналогов. Близкой областью является оценка числа собственных значений возмущенного оператора, появляющихся в лакунах невозмущенного — см., например, [4], где имеются дальнейшие ссылки.

1.2. Мы не имеем в виду описывать здесь различные подходы к доказательству (1.1). Отметим лишь, что доказательства, данные в [23, 11] и [9], используют различные специфические средства вещественного анализа. В итоге они применимы только к операторам на $\mathbb{R}^d$. Напротив, подходы, предложенные в [19] и [18], могут быть перенесены в более общую обстановку (но зато они неприменимы к операторам порядка бóльшего двух). Для подхода Ли и Яу такое перенесение было осуществлено в [17]. Было показано, что роль оператора $-\Delta$ в оценке (1.1) может играть широкий класс генераторов марковских полугрупп (коротко, марковских генераторов). Напомним, что сжимающая полугруппа самосопряженных операторов в L_2 называется *марковской* (в более точной терминологии, *субмарковской*), если она сохраняет положительность и распространяется до сжимающей полугруппы во всех пространствах L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Приведем основной результат работы [17].

Теорема 1.1. *Пусть Ω — пространство с σ-конечной мерой μ, и $B > 0$ — самосопряженный оператор в $L_2(\Omega, \mu)$, порождающий марковскую полугруппу. Предположим, что при некотором $q > 2$ справедливо следующее неравенство* (*теорема вложения*):

$$\left(\int_\Omega |u|^q d\mu \right)^{2/q} \leqslant K \|B^{1/2} u\|^2_{L_2}, \quad u \in \mathrm{Dom}(B^{1/2}). \tag{1.2}$$

Тогда для любой функции $0 \leqslant V \in L_p(\Omega, \mu)$, где $p = (1 - 2/q)^{-1}$, справедлива оценка

$$N_-(B - V) \leqslant C(q) K \int_\Omega V^p d\mu.$$

В настоящей статье мы даем „абстрактную версию" подхода Либа. Результаты оказываются еще более общими. Например, в теореме 2.1 полугруппа e^{-tB} предполагается сохраняющей положительность, но не обязательно марковской. Другое важное условие, требуемое при нашем подходе, — ограниченность e^{-tB} как операторов из L_2 в L_∞, или $(2, \infty)$-ограниченность. Функция

$M_B(t) := \|e^{-\frac{t}{2}B}\|^2_{L_2\to L_\infty}$ явным образом участвует в оценке. Еще один результат, теорема 2.4, касается полугрупп, доминируемых полугруппой, сохраняющей положительность. В наиболее общем из наших результатов, теореме 2.5, оценка дается в терминах интегрального ядра оператора e^{-tB}, а не в терминах соответствующей функции $M_B(t)$.

Для марковских полугрупп свойство $(2,\infty)$-ограниченности называется *ультраконтрактивностью*. В условиях теоремы 1.1 ультраконтрактивность e^{-tB} вытекает из (1.2) благодаря классическому результату Варопулоса (см., например, [28, гл. II]), причем $M_B(t) \leqslant c(q)Kt^{-p}$ как в нуле, так и на бесконечности. Таким образом, теорему 1.1 можно рассматривать как частный случай результатов данной статьи. Их формулировки — значительно более гибкие. В частности, они допускают не „чисто степенное" поведение функции $M_B(t)$, см. п. 2.3.

Подход Либа к доказательству оценки (1.1) основан на технике функционального интегрирования. Мы не используем этот формализм, хотя наше основное техническое средство, „усредненная формула Троттера" (лемма 4.4), имитирует функциональные интегралы. Однако мы не применяем вероятностных методов. Это обстоятельство — решающее: именно оно позволяет получить результаты в столь общей обстановке. Простые оценки в следовой норме заменяют предельные переходы в бесконечномерных интегралах, и единственная структура, используемая при нашем подходе, — это структура пространства с мерой. Заметим, что при стандартном подходе новые приложения к математической физике обычно связаны с использованием все более и более продвинутой техники функционального интегрирования; см., например, [26] и [8], и указанную там литературу. Другие подходы связаны с наличием в Ω дополнительной структуры (например, структуры группы Ли, см. [10]).

Все еще не решенная проблема, связанная с оценкой (1.1) и представляющая интерес для физики, касается точного значения постоянной $C(d)$. Подходы, предложенные в [23] и [11], приводят к весьма завышенным оценкам, в то время как подходы работ [18] и [9] дают для $C(d)$ разумные значения. Наименьшее известное значение этой постоянной найдено Либом [19]. Более точно, Либом получена „параметрическая" оценка, в которой роль параметра играет произвольная функция достаточно широкого класса. Затем оценка оптимизируется по этому параметру. Мы показываем, что наш подход позволяет получить параметрическую оценку Либа и, как следствие, константу Либа в (1.1), без использования функционального интегрирования. При этом мы комбинируем аппроксимационные соображения, применявшиеся при изложении доказательства Либа в [22] и [26].

В принципе возможность прямого применения формулы Троттера взамен функциональных интегралов была понята достаточно давно. Например, она упомянута Саймоном во Введении к его книге [26]. Однако, по-видимому, до сих пор не предпринималось попыток реализовать эту возможность.

Главная цель работы [17] заключалась в распространении подхода Ли и Яу

на возможно более широкий класс операторов. При обсуждении этой работы Э. Либ, Л. Салофф-Косте и Х. Зидентоп предложили попытаться обобщить подобным образом подход Либа. Эта идея была поддержана Т. Хоффманом-Остенхофом. Мы пользуемся случаем выразить всем им нашу благодарность. Мы также обязаны В. Лискевичу за полезные консультации по теории полугрупп, сохраняющих положительность.

Мы благодарны Институту Эрвина Шрёдингера в Вене за гостеприимство, которым авторы имели возможность воспользоваться в январе–феврале 1997 г. Основные результаты статьи были получены в этот период.

§2. Основные результаты

2.1. Полугруппы, сохраняющие положительность. Пусть Ω — пространство с σ-конечной мерой μ. В дальнейшем пространства $L_p(\Omega, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, обозначаются L_p. Любой самосопряженный неотрицательный оператор B в L_2 порождает сильно непрерывную сжимающую полугруппу $Q(t) = Q_B(t) = e^{-tB}$, $0 \leqslant t < \infty$. Нас будут интересовать полугруппы, *сохраняющие положительность*, или, коротко, *положительные* полугруппы. Этот класс определяется свойством $Q(t)u \geqslant 0$ п. в. для любой неотрицательной функции $u \in L_2$. Хорошо известно, что генераторы положительных полугрупп могут быть охарактеризованы в терминах своих квадратичных форм („первый критерий Бёрлинга–Дени“, см., например, [22, теорема XIII.50]). В этой работе мы не предполагаем, что полугруппа $Q(t)$ — марковская. Таким образом, $Q(t)$ — сжимающая полугруппа в L_2, но не обязательно в L_p при $p \neq 2$.

Другое понятие, используемое в работе, — это понятие $(2,\infty)$*-ограниченной полугруппы*. Мы называем этим термином полугруппу $Q(t) = e^{-tB}$ самосопряженных сжатий в L_2 такую, что при всех $t > 0$ оператор $Q(t) : L_2 \to L_\infty$ ограничен. Известно, что такие операторы являются интегральными, см., например, [16, §XI.1] либо [1, теорема 1.3]. Обозначим соответствующее ядро через $Q(t; x, y) = Q_B(t; x, y)$. Из свойства $(2,\infty)$-ограниченности следует, что

$$M_B(t) := \operatorname*{ess\,sup}_x \int_\Omega |Q_B(t/2; x, y)|^2 dy = \|e^{-\frac{t}{2}B}\|^2_{L_2 \to L_\infty} < \infty \tag{2.1}$$

(для краткости, мы пишем dy вместо $\mu(dy)$). В теории марковских полугрупп свойство $(2,\infty)$-ограниченности называется *ультраконтрактивностью*. Во избежание недоразумений мы не используем этот термин для полугрупп, которые являются только положительными, но не обязательно марковскими.

Ядро $Q(t; x, y)$ для всех $t > 0$ определено почти везде на $\Omega \times \Omega$. Можно переопределить ядро на множестве меры нуль для каждого t таким образом, чтобы оно стало измеримым на $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega$ (см. [1, лемма 2.2]) и эрмитовым: $Q(t; x, y) = \overline{Q(t; y, x)}$ п. в. Мы всюду считаем, что это уже сделано.

По двойственности, $Q(t)$ также ограничен как оператор из L_1 в L_2. Полугрупповое свойство $Q(t_1)Q(t_2) = Q(t_1 + t_2)$ показывает, что $Q(t)$ действует из L_1 в L_∞ и факторизуется через L_2. Это позволяет определить значение ядра на диагонали $y = x$ для п. в. x:

$$Q(t; x, x) = \int_\Omega Q(t_1; x, y)Q(t_2; y, x)dy, \quad t_1, t_2 > 0, \ t_1 + t_2 = t.$$

Получающаяся функция корректно определена при всех $t > 0$ как элемент $L_\infty(\Omega)$, не зависящий от выбора t_1 и t_2. Таким образом, (2.1) может быть записано в виде

$$M_B(t) = \operatorname*{ess\,sup}_x \int_\Omega Q_B(t/2; x, y)Q_B(t/2; y, x)dy = \operatorname*{ess\,sup}_x Q(t; x, x).$$

В итоге мы приходим к неравенствам

$$|Q_B(t; x, y)| \leqslant M_B(t) \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega, \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant Q_B(t; x, x) \leqslant M_B(t) \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}_+ \times \Omega. \tag{2.3}$$

В силу того же полугруппового свойства и сжимаемости полугруппы в L_2, функция $M_B(t)$ не возрастает на $(0, \infty)$. Как правило, мы требуем

$$\int_a^\infty M_B(t)dt < \infty, \quad a > 0. \tag{2.4}$$

Условимся писать $B \in \mathcal{P}$, если самосопряженный оператор B порождает полугруппу, обладающую обоими свойствами: положительности и $(2, \infty)$-ограниченности. Для $B \in \mathcal{P}$ ядро $Q_B(t; x, y)$ неотрицательно:

$$Q_B(t; x, y) \geqslant 0 \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega, \qquad Q_B(t; x, x) \geqslant 0 \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

Если $B \in \mathcal{P}$ и $B \geqslant \gamma I$ при некотором $\gamma \geqslant 0$, то для любого $r \geqslant -\gamma$ оператор $B_r = B + r$ также принадлежит $\mathcal{P}$. Соответствующая полугруппа есть $Q_{B_r}(t) = e^{-rt}Q_B(t)$, так что $M_{B_r}(t) = e^{-rt}M_B(t)$. Отсюда следует, что при $r > -\gamma$ функция $M_{B_r}(t)$ экспоненциально убывает на бесконечности. Заметим, что если полугруппа Q_B — марковская, то марковость Q_{B_r} гарантирована лишь при $r \geqslant 0$.

2.2. Оценка ЦЛР для генераторов положительных полугрупп. Пусть B — неотрицательный самосопряженный оператор в L_2. Предположим, что измеримая функция $V \geqslant 0$ (точнее говоря, оператор умножения на V) является форм-ограниченной по отношению к B, с форм-гранью, меньшей 1. Тогда самосопряженный ограниченный снизу оператор $B - V$ корректно определяется через свою квадратичную форму. Обозначим через $N_-(B - V)$ количество его отрицательных собственных значений (с учетом кратностей), при обычном соглашении, что $N_-(B - V) = \infty$, если существенный спектр ниже нуля непуст.

Обозначим через $\mathcal{G}$ множество непрерывных функций G на $[0, \infty)$, не более чем полиномиального роста на бесконечности и таких, что $z^{-1}G(z)$ интегрируема в нуле; последнее предположение влечет $G(0) = 0$. С любой $G \in \mathcal{G}$ свяжем другую функцию, $g = \mathcal{L}(G)$:

$$g(\lambda) = \mathcal{L}(G)(\lambda) := \int_0^\infty z^{-1}G(z)e^{-z/\lambda}dz, \quad \lambda > 0. \tag{2.5}$$

Таким образом, $g(1/\lambda)$ — преобразование Лапласа функции $z^{-1}G(z)$. Если $0 \leqslant G \in \mathcal{G}$ и $G \not\equiv 0$, то, очевидно, функция g положительна и строго монотонна.

Теорема 2.1. *Пусть оператор $B \in \mathcal{P}$ таков, что для $M_B(t)$ выполнено* (2.4) *и, кроме того, $M_B(t) = O(t^{-\alpha})$ в нуле, с некоторым $\alpha > 0$. Фиксируем неотрицательную выпуклую функцию $0 \not\equiv G \in \mathcal{G}$ и положим $g = \mathcal{L}(G)$. Тогда*

$$N_-(B - V) \leqslant \frac{1}{g(1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_\Omega M_B(t)G(tV(x))dx, \tag{2.6}$$

при единственном условии, что выражение в правой части конечно.

Замечания. 1. Конечность последнего выражения гарантирует ограниченность снизу оператора $B - V$.

2. Из выпуклости G следует, что $G(z)$ растет на бесконечности по меньшей мере как непостоянная линейная функция. Таким образом, условие (2.4) необходимо для того, чтобы оценка (2.6) была содержательной.

3. Класс функций G, фигурирующих в оценке (2.6), формально не зависит от поведения $M_B(t)$. Однако фактически такая зависимость существует, поскольку при „слишком большой“ G интеграл в (2.6) может расходиться для любого $V \not\equiv 0$.

Естественным условием на G является

$$\int_0^\infty M(t)G(ct)\frac{dt}{t} < \infty, \quad \text{любое} \quad c > 0.$$

2.3. (2.6) как „параметрическая“ оценка. Функция G входит в (2.6) как параметр, так что фактически мы имеем дело с *семейством* оценок. Коль скоро такое семейство получено, оценку можно оптимизировать по параметру G. Идея параметрической оценки вида (2.6) принадлежит Либу [19], доказавшему ее для оператора Шрёдингера. Им же предложено использовать функцию

$$G_a(z) = (z-a)_+, \quad a > 0, \tag{2.7}$$

где a — числовой параметр.

Чтобы лучше понять роль G в оценке, рассмотрим сначала простейший случай, когда $M_B(t)$ — „чистая степень“: $M_B(t) = mt^{-\alpha}$, при некоторых $m > 0$ и $\alpha > 1$; последнее ограничение необходимо вследствие (2.4). Для такой M_B, замена переменной $s = s_x(t) = tV(x)$ сводит оценку (2.6) к

$$N_-(B-V) \leqslant C_\alpha(G) \int_\Omega V(x)^\alpha dx, \quad C_\alpha(G) = mg(1)^{-1} \int_0^\infty z^{-\alpha-1} G(z) dz. \tag{2.8}$$

Таким образом, выбор G отражается только на значении постоянной в оценке.

Рассмотрим теперь несколько более сложный случай. Именно, предположим (опуская константы), что $M_B(t) = t^{-\alpha_0}$ при $t \leqslant 1$ и $M_B(t) = t^{-\alpha_\infty}$ при $t > 1$, причем $\alpha_0 \neq \alpha_\infty$ и $\alpha_\infty > 1$. Для таких операторов B, результаты для случаев $\alpha_0 > \alpha_\infty$ и $\alpha_0 < \alpha_\infty$ различны. Если $\alpha_0 > \alpha_\infty$, то $M_B(t) \asymp t^{-\alpha_0} + t^{-\alpha_\infty}$. Та же замена переменной $s = tV(x)$ приводит к оценке

$$N_-(B-V) \leqslant C_0 \int_\Omega V(x)^{\alpha_0} dx + C_\infty \int_\Omega V(x)^{\alpha_\infty} dx, \quad \alpha_0 > \alpha_\infty > 1, \tag{2.9}$$

причем снова выбор G влияет только на значения C_0 и C_∞.

Пусть теперь $\alpha_0 < \alpha_\infty$. Тогда выбор $G(t) = t^\beta$ при любом $\beta \in (\alpha_0, \alpha_\infty)$ дает ту же оценку (2.9), в то время как $G = G_a$ (см. (2.7)) приводит к несколько лучшему результату. Его конкретная форма зависит от того, будет ли $\alpha_0 > 1$, $\alpha_0 = 1$ либо $\alpha_0 < 1$:

$$\begin{aligned}
&N_-(B-V) \leqslant C_0 \int_{V(x)\geqslant 1} V(x)^{\alpha_0} dx + C_\infty \int_{V(x)<1} V(x)^{\alpha_\infty} dx, \quad \alpha_\infty > \alpha_0 > 1;\\
&N_-(B-V) \leqslant C_0 \int_{V(x)\geqslant 1} V(x) \log(1+V(x)) dx\\
&\qquad + C_\infty \int_{V(x)<1} V(x)^{\alpha_\infty} dx, \quad \alpha_\infty > \alpha_0 = 1;\\
&N_-(B-V) \leqslant C_0 \int_{V(x)\geqslant 1} V(x) dx + C_\infty \int_{V(x)<1} V(x)^{\alpha_\infty} dx, \quad \alpha_\infty > \alpha_0, \ \alpha_0 < 1.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Нам неизвестно, являются ли две последние оценки неулучшаемыми. Во всяком случае, мы видим, что для таких операторов B, для которых $M_B(t)$ не есть „чистая степень", различный выбор G может приводить к неэквивалентным оценкам.

Некоторые примеры операторов B с описанным выше поведением функции M_B приведены в п. 3.3–3.5.

2.4. Полугруппы с положительной доминантой. Для многих применений условие положительности полугруппы e^{-tB}, фигурирующее в теореме 2.1, чрезмерно ограничительно. Более широкий класс полугрупп выделяется условием существования положительной доминанты.

Будем говорить, что полугруппа $P(t) = e^{-tA}$ *самосопряженных сжатий в* L_2 *доминируется положительной полугруппой* $Q(t) = e^{-tB}$, *если*

$$|P(t)\psi| \leqslant Q(t)|\psi| \text{ п. в. на } \Omega, \quad \psi \in L_2. \tag{2.11}$$

В этих условиях будем также говорить, что A доминируется оператором B, и писать $A \in \mathcal{PD}(B)$. Используя это обозначение, мы всегда предполагаем (по умолчанию), что полугруппа e^{-tB} положительна. Любой оператор B такой, что $A \in \mathcal{PD}(B)$, будем называть *доминатором* для A. В случаях, когда выбор оператора B не имеет значения, мы будем говорить, что A порождает полугруппу с положительной доминантой.

Приводимый ниже критерий доминации был найден в [15] и [27].

Предложение 2.2. *Пусть A и B — неотрицательные самосопряженные операторы в L_2, и $b[\cdot,\cdot]$ — квадратичная форма оператора B. Предположим, что полугруппа e^{-tB} положительна. Тогда $A \in \mathcal{PD}(B)$ в том и только в том случае, если выполнены следующие два условия.*

1. $\psi \in \mathrm{Dom}(A) \Rightarrow |\psi| \in \mathrm{Dom}(b)$ $(= \mathrm{Dom}(B^{1/2}))$.
2. *Для всех* $\psi \in \mathrm{Dom}(A)$ *и* $0 \leqslant \varphi \in \mathrm{Dom}(b)$.

$$\mathrm{Re}((\mathrm{sign}\,\psi)\varphi, A\psi)_{L_2} \leqslant b[\varphi, |\psi|].$$

Здесь $\mathrm{sign}\,\psi = \psi/|\psi|$ для $\psi \neq 0$ и $\mathrm{sign}\,0 = 0$.

В частности, мы получаем (при $\varphi = |\psi|$)

$$A \in \mathcal{PD}(B) \Rightarrow \{(A\psi, \psi) \geqslant b[|\psi|, |\psi|], \ \psi \in \mathrm{Dom}(A)\}. \tag{2.12}$$

Если $\gamma I \leqslant B \in \mathcal{P}$ и $A \in \mathcal{PD}(B)$, то при $r \geqslant -\gamma$, очевидно, $A_r := A + r \in \mathcal{PD}(B_r)$. Существует и менее тривиальный класс преобразований генератора, сохраняющих доминацию.

Неотрицательная непрерывная функция f на $[0, \infty)$ называется абсолютно монотонной, если она бесконечно дифференцируема для $t > 0$ и

$(-1)^{k-1}f^{(k)}(t) \geqslant 0$ для всех $k \geqslant 1$. В работе [7] (см., в особенности, §6) было установлено, что для любой абсолютно монотонной f положительность полугруппы e^{-tB} влечет положительность $e^{-tf(B)}$ и включение $A \in \mathcal{PD}(B)$ влечет $f(A) \in \mathcal{PD}(f(B))$.

Для $0 < \alpha < 1$ функция $f(\lambda) = \lambda^\alpha$ абсолютно монотонна, так что, в частности, справедливо

Предложение 2.3. *Пусть полугруппа e^{-tB} положительна, $A \in \mathcal{PD}(B)$ и $0 < \alpha < 1$. Тогда полугруппа e^{-tB^α} также положительна и $A^\alpha \in \mathcal{PD}(B^\alpha)$.*

Если полугруппа $Q(t)$ $(2, \infty)$-ограничена, то неравенство (2.11) влечет то же свойство для $P(t)$ и, более того, $A \in \mathcal{PD}(B) \Rightarrow M_A(t) \leqslant M_B(t)$. Такая полугруппа $P(t)$ тем самым состоит из интегральных операторов. Как и для $Q(t)$, после изменения на множестве нулевой меры для каждого $t > 0$ мы получаем для $P(t)$ измеримое ядро $P(t; x, y)$. Неравенство (2.11), определяющее доминацию, эквивалентно соотношению

$$|P(t; x, y)| \leqslant Q(t; x, y) \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}_+ \times \Omega \times \Omega, \tag{2.13}$$

см. [24, §IV.8]. Аналогичное неравенство выполнено на диагонали $x = y$:

$$|P(t; x, x)| \leqslant Q(t; x, x) \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

2.5. Оценка ЦЛР для полугрупп с положительной доминантой. Пусть оператор A порождает сжимающую полугруппу с положительной доминантой. Как и в положительном случае, предположим, что умножение на функцию $V \geqslant 0$ форм-ограничено по отношению к A, с форм-гранью, меньшей 1. (Заметим, что это всегда так при условии, что данное свойство выполнено для доминатора B; сказанное легко следует из (2.12)). Тогда мы можем определить оператор $A - V$ и, как и прежде, рассмотреть величину $N_-(A - V)$.

Теорема 2.4. *Пусть $B \in \mathcal{P}$ и $A \in \mathcal{PD}(B)$. Предположим, что для $M_B(t)$ выполнено (2.4) и, кроме того, $M_B(t) = O(t^{-\alpha})$ в нуле, с некоторым $\alpha > 0$. Пусть G и g — такие же функции, как в теореме 2.1. Тогда*

$$N_-(A - V) \leqslant \frac{1}{g(1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \int_\Omega M_B(t) G(tV(x))dx$$

при единственном условии, что выражение в правой части конечно.

Сравнивая теоремы 2.1 и 2.4, мы видим, что $N_-(A - V)$ и $N_-(B - V)$ оцениваются одним и тем же интегралом. Однако естественное предположение $N_-(A - V) \leqslant N_-(B - V)$, вообще говоря, неверно, см. [2]. Замечания к теореме 2.1, а также материал п. 2.3 относятся и к теореме 2.4.

Очевидно, теорема 2.1 является частным случаем теоремы 2.4, для $A = B$. В свою очередь теорема 2.4 представляет собой простое следствие приводимого ниже, более общего, но несколько менее прозрачного результата.

Теорема 2.5. *Пусть* $B \in \mathcal{P}$ *и* $A \in \mathcal{PD}(B)$. *Предположим, что* $M_B(t) = O(t^{-\alpha})$ *в нуле, с некоторым* $\alpha > 0$. *Пусть* $Q_B(t) = e^{-tB}$ *и* G, g *— такие же функции, как в теореме* 2.1. *Тогда*

$$N_-(A - V) \leqslant \frac{1}{g(1)} \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\varepsilon \to 0+} \int_\Omega Q_B(t+\varepsilon; x, x) G(tV(x)) dx \tag{2.14}$$

при единственном условии, что выражение в правой части конечно.

Замечание. Условие

$$\int^\infty Q_B(t; x, x) dt < \infty \quad \text{п. в. на } \Omega \tag{2.15}$$

необходимо для того, чтобы оценка (2.14) была содержательной. Разумеется, (2.15) следует из (2.4). Однако здесь мы не предполагаем условие (2.4) выполненным.

Доказательство теоремы 2.5 дано в §4 и 5.

§3. Некоторые приложения

3.1. Оператор Шрёдингера. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^d$ с мерой Лебега, $B = -\Delta$. На диагонали $y = x$ ядро соответствующей полугруппы равно $Q(t; x, x) = (2\pi)^{-d/2} t^{-d/2}$. Таким образом, (2.4) (или (2.15)) диктует ограничение $d \geqslant 3$. Следуя Либу [19] (см. также [26, с. 96]), положим $G(z) = (z - a)_+$; в [6, п. 5.2] объяснено, что такой выбор G оптимален. В соответствии с (2.8) получаем

$$N_-(-\Delta - V) \leqslant C(d) \int_{\mathbb{R}^d} V(x)^{d/2} dx, \tag{3.1}$$

где

$$C(d) = (2\pi)^{-d/2} \min_{a>0} \left(\int_a^\infty (t-a) t^{-d/2-1} dt \left(\int_a^\infty (1 - at^{-1}) e^{-t} dt \right)^{-1} \right).$$

Для $d = 3$ оптимальным значением параметра a оказывается $a = 0,25$, что дает $C(3) = 0,116$ — значение, найденное Либом [19].

3.2. Магнитный оператор Шрёдингера. Рассмотрим магнитный оператор Шрёдингера $A = H_{\mathbf{a}} = -(\nabla - i\mathbf{a})^2$, где $\mathbf{a}(x) = \{a_j(x)\}_{1 \leqslant j \leqslant d} \in L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ — магнитный потенциал. Этот оператор изучался в [2] и [26], и было показано, что $H_{\mathbf{a}} \in \mathcal{PD}(-\Delta)$. Теорема 2.4 дает оценку

$$N_-(H_{\mathbf{a}} - V) \leqslant C(d) \int V(x)^{d/2} dx, \quad d \geqslant 3 \tag{3.2}$$

с той же постоянной, что и в (3.1). Доказательство *магнитной оценки ЦЛР*, намеченное в [26, с. 168], использует стохастический интеграл Ито. Более элементарное доказательство, данное в [21], приводит к несколько худшему значению постоянной в оценке.

3.3. Релятивистский оператор Шрёдингера. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 3$, рассмотрим оператор $B = H_R = (-\Delta + 1)^{1/2} - 1$. Это — псевдодифференциальный оператор порядка 1, самосопряженный и неотрицательный. Он изучался, в частности, в [8, 20] и [29]. Согласно предложению 2.3, полугруппа $Q(t) = e^{-tB}$ — положительная. Ее $(2,\infty)$-ограниченность следует из явного представления ядра на диагонали:

$$Q(t;x,x) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-t((|\xi|^2+1)^{1/2}-1)} d\xi. \tag{3.3}$$

Из (3.3) вытекают неравенства (2.2)–(2.3), при $M_B(t) \leqslant C(t^{-d/2} + t^{-d})$. Таким образом, применимо неравенство (2.9) при $\alpha_0 = d$ и $\alpha_\infty = d/2$. Это приводит к оценке, впервые сформулированной в [12]:

$$N_-(H_R - V) \leqslant C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} V(x)^d dx + C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^d} V(x)^{d/2} dx, \quad d \geqslant 3. \tag{3.4}$$

Мы не делаем попытки оптимизировать константы C_1 и C_2 в (3.4).

3.4. Релятивистский магнитный оператор Шрёдингера. Рассмотрим оператор $A = H_{\mathbf{a},R} = (H_{\mathbf{a}} + 1)^{1/2} - 1$, где $H_{\mathbf{a}}$ — магнитный оператор Шрёдингера (см. п. 3.2). Согласно предложению 2.3, полугруппа $e^{-tH_{\mathbf{a},R}}$ доминируется полугруппой e^{-tH_R}. Следовательно, применима теорема 2.4, которая дает для $N_-(H_{\mathbf{a},R} - V)$ такую же оценку (3.4), что и в немагнитном релятивистском случае. Эта оценка, по-видимому, является новой.

3.5. Сублапласиан на нильпотентной группе Ли. Используемый здесь материал из теории групп Ли, включая оценку ядра теплопроводности, заимствован из [28, гл. IV].

Пусть $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_k\}$ — хермандеровская система левоинвариантных векторных полей на нильпотентной группе Ли $\mathcal{G}$. Любой такой системе сопоставляются два числа: локальная размерность d пары $(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ и размерность группы $\mathcal{G}$ на бесконечности, D. Оператор $B_{\mathcal{X}} = -\sum\limits_{j=1}^{k} X_j^2$ называется сублапласианом, ассоциированным с системой $\mathcal{X}$. Он порождает марковскую ультраконтрактивную полугруппу, для которой $M_{B_{\mathcal{X}}}(t) = O(t^{-d/2})$ в нуле и $M_{B_{\mathcal{X}}}(t) = O(t^{-D/2})$ на бесконечности.

Таким образом, при $d \geqslant D \geqslant 3$ к оператору $B_{\mathcal{X}} - V$ применима оценка (2.9), и мы получаем

$$N_-(B_{\mathcal{X}} - V) \leqslant C\Bigl(\int\limits_{\mathcal{G}} V(x)^{d/2} dx + \int\limits_{\mathcal{G}} V(x)^{D/2} dx\Bigr), \quad d \geqslant D \geqslant 3. \tag{3.5}$$

В противоположном случае применима оценка (2.10)

$$N_-(B\chi - V) \leqslant C\Big(\int\limits_{V(x)\geqslant 1} V(x)^{d/2} dx + \int\limits_{V(x)<1} V(x)^{D/2} dx \Big), \quad 3 \leqslant d < D. \tag{3.6}$$

Обе оценки (3.5) и (3.6) являются новыми. Они существенно дополняют результаты, полученные в [10, теорема 1] и [17, теорема 3.8].

§4. Технические рассмотрения

Мы предваряем доказательство теоремы 2.5 некоторыми предложениями технического характера. В этом параграфе всюду предполагается, что $0 \leqslant V \in L_1 \cap L_\infty$.

4.1. Возмущение генератора.

Лемма 4.1. *Пусть $A \in \mathcal{PD}(B)$. Тогда также $A + V \in \mathcal{PD}(B)$.*

Доказательство прямо вытекает из критерия доминации (предложение 2.2).

4.2. Оценки в классах Шэттена. Через $\mathfrak{S}_p$ мы обозначаем классы Шэттена компактных операторов, см., например, [14, гл. III] либо [25, гл. 2]. В частности, $\mathfrak{S}_1$ — класс ядерных операторов, $\mathfrak{S}_2$ — класс Гильберта-Шмидта.

Лемма 4.2. *Пусть $A \in \mathcal{PD}(B)$. Тогда для любого $p \geqslant 1$*

$$\|V^{\frac12} e^{-tA}\|_{\mathfrak{S}_{2p}}, \|e^{-tA} V^{\frac12}\|_{\mathfrak{S}_{2p}} \leqslant M_B(2t)^{\frac{1}{2p}} \|V^{\frac12}\|_{L_{2p}}, \tag{4.1}$$

$$\|V^{\frac12} e^{-tA} V^{\frac12}\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant M_B(t)^{\frac1p} \|V\|_{L_p}. \tag{4.2}$$

Аналогичные оценки справедливы при замене e^{-tA} на $e^{-t(A+V)}$.

Доказательство. Очевидно, (4.2) прямо вытекает из (4.1). Далее, (4.1) для $p = 1$ следует из (2.1): нужно лишь записать выражение для нормы в $\mathfrak{S}_2$. Оценка (4.1) по операторной норме (мы формально полагаем $p = \infty$) вытекает из $V \in L_\infty$ и из сжимаемости в L_2 полугруппы e^{-tA}. Остается провести интерполяцию между этими крайними случаями.

Для возмущенной полугруппы те же оценки справедливы в силу леммы 4.1. •

В следующей лемме оцениваются интегралы, содержащие специальные линейные комбинации полугрупп $e^{-t(A+\gamma_j V)}$, $\gamma_j \geqslant 0$. Такие линейные комбинации (с A_r, $r > 0$, взамен A) играют решающую роль в доказательстве теоремы 2.5.

Лемма 4.3. *Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 2.4 и пусть $J \geqslant N > \alpha - 1$. Предположим, что показатели $\gamma_j \geqslant 0$ и коэффициенты c_j, $j = 1, \ldots, J$ выбраны таким образом, что*

$$\sum_j c_j \gamma_j^k = 0, \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{4.3}$$

Тогда

$$\int_0^\infty \left\| \sum_j c_j V^{\frac{1}{2}} e^{-t(A+\gamma_j V)} V^{\frac{1}{2}} \right\|_{\mathfrak{S}_1} dt < \infty. \tag{4.4}$$

Доказательство. Почленная сходимость на бесконечности вытекает из (2.4) и из (4.2) для $p = 1$. Таким образом, требуется оправдать лишь сходимость вблизи нуля.

Рассмотрим оператор-функции

$$X_k(t) = \sum_j c_j \gamma_j^k e^{-t(A+\gamma_j V)}, \quad k \geqslant 0.$$

Таким образом, подынтегральная функция в (4.4) есть $\|V^{\frac{1}{2}} X_0(t) V^{\frac{1}{2}}\|_{\mathfrak{S}_1}$. Все X_k равномерно ограничены по операторной норме. Они также сильно дифференцируемы, причем

$$X_k'(t) = -AX_k(t) - VX_{k+1}(t).$$

Кроме того, в силу (4.3), $X_k(0) = 0$ при $k = 0, \ldots, N-1$. Следовательно, для этих значений k

$$X_k(t) = -\int_0^t e^{-(t-s)A} V X_{k+1}(s) ds.$$

Итерируя это равенство, находим

$$X_0(t) = (-1)^N \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{N-1}} e^{-(t-t_1)A} V e^{-(t_1-t_2)A} V \ldots \\ \times V e^{-(t_{N-1}-t_N)A} V X_N(t_N) dt_1 \ldots dt_N.$$

Стало быть,

$$\|V^{\frac{1}{2}} X_0(t) V^{\frac{1}{2}}\|_{\mathfrak{S}_1} \\ \leqslant \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{N-1}} \|V^{\frac{1}{2}} e^{-(t-t_1)A} V^{\frac{1}{2}}\|_{\mathfrak{S}_{N+1}} \cdots \\ \times \|V^{\frac{1}{2}} e^{-(t_{N-1}-t_N)A} V^{\frac{1}{2}}\|_{\mathfrak{S}_{N+1}} \|V^{\frac{1}{2}} X_N(t_N) V^{\frac{1}{2}}\|_{\mathfrak{S}_{N+1}} dt_1 \ldots dt_N.$$

В силу (4.2) k-й сомножитель под знаком интеграла не превосходит $(t_{k-1} - t_k)^{-\frac{\alpha}{N+1}}\|V\|_{L_{N+1}}$ (мы полагаем $t_0 = t$), $k \leqslant N$. Затем, применяя последнее утверждение леммы 4.2 к каждому слагаемому в $V^{\frac{1}{2}}X_N(t_N)V^{\frac{1}{2}}$, мы оцениваем $\mathfrak{S}_{N+1}$-норму этого оператора через $Ct^{-\frac{\alpha}{N+1}}\|V\|_{L_{N+1}}$. Это дает

$$\|V^{\frac{1}{2}}X_0(t)V^{\frac{1}{2}}\|_{\mathfrak{S}_1} \leqslant Ct^{-(\alpha-N)}\|V\|^{N+1}_{L_{N+1}},$$

что влечет сходимость интеграла вблизи нуля. •

4.3. О формуле Троттера. Пусть A и W — неотрицательные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, причем W — ограничен. Формула Троттера утверждает, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{tA}{n}}e^{-\frac{tW}{n}}\right)^n\psi = e^{-t(A+W)}\psi, \quad \psi\in\mathcal{H},\ t\geqslant 0. \tag{4.5}$$

Легко видеть, что для любого $\psi\in\mathcal{H}$ сходимость в (4.5) равномерна по $t\in[0,t_0]$ для любого конечного t_0. Для полноты изложения мы наметим доказательство этого факта. Фиксируем элемент $\psi\in\mathcal{H}$ и обозначим $\psi(s) = e^{-s(A+W)}\psi$. Из C_0-свойства полугруппы $e^{-s(A+W)}$ и ее сжимаемости следует, что функция $\psi(s)$ равномерно непрерывна на $[0,\infty)$. В приведенном в [26, с. 5] доказательстве формулы Троттера показано, что для любого $t>0$

$$\begin{aligned}&\|e^{-t(A+W)}\psi - \left(e^{-\frac{tA}{n}}e^{-\frac{tW}{n}}\right)^n\psi\|\\ &\qquad\leqslant n\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left\|\left(e^{-\frac{t}{n}(A+W)} - e^{-\frac{tA}{n}}e^{-\frac{tW}{n}}\right)\psi(s)\right\|.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Далее показано, что для $\psi\in\operatorname{Dom}(A)$ правая часть (4.6) стремится к нулю при $n\to\infty$. В итоге мы видим, что для любого такого ψ сходимость в (4.5) равномерная на $[0,t_0]$. Результат распространяется на все $\psi\in\mathcal{H}$ путем стандартного аппроксимационного рассуждения.

Теперь фиксируем элемент $\psi\in\mathcal{H}$ и рассмотрим последовательность кусочно-постоянных функций

$$\psi_n(s) = \left(e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{W}{n}}\right)^l\psi \quad \text{при } (l-1)/n < s\leqslant l/n,\ l=1,\dots,n.$$

Покажем, что $\psi_n\to\psi$ равномерно на $[\delta,1]$ при любом $\delta>0$. В самом деле,

$$\psi_n(l/n) - \psi(l/n) = \left(e^{-\frac{\hat{t}A}{l}}e^{-\frac{\hat{t}W}{l}}\right)^l\psi - \psi(\hat{t}), \quad \hat{t} = l/n. \tag{4.7}$$

Предположим теперь, что разность между левой и правой частями в (4.5) меньше ε, если $0\leqslant t\leqslant 1$ и $n>n_\varepsilon$. Полагая $n>\delta^{-1}n_\varepsilon$ и $l/n>\delta$, получаем $l>n_\varepsilon$ и, следовательно, норма правой части в (4.7) меньше ε. Аналогичная оценка (скажем, с 2ε вместо ε) остается справедливой при всех $s\in[\delta,1]$ в силу равномерной непрерывности функции $\psi(s)$.

Результат сохранится, если в определении ψ_n взять $e^{-\frac{W}{n}}e^{-\frac{A}{n}}$ взамен $e^{-\frac{A}{n}}e^{-\frac{W}{n}}$.

Следующее утверждение можно назвать „усредненной версией“ классической формулы Троттера. Она прямо вытекает из приведенных выше рассуждений.

Лемма 4.4. *Для любого* $t > 0$ *и любого* $\delta \in (0, 1/2)$

$$\int_{\delta t}^{(1-\delta)t} e^{-s(A+W)} W e^{-(1-s)(A+W)} ds$$
$$= (\mathrm{w})\text{-}\lim_{n\to\infty} \frac{t}{n} \sum_{\delta < \frac{l}{n} \leqslant 1-\delta} \left(e^{-\frac{tA}{n}} e^{-\frac{tW}{n}}\right)^l W \left(e^{-\frac{tA}{n}} e^{-\frac{tW}{n}}\right)^{n-l}.$$

4.4. Принцип Бирмана–Швингера. Пусть A удовлетворяет условиям теоремы 2.5 и $0 \leqslant V \in L_1 \cap L_\infty$. Для $r > 0$, обозначим

$$K_r(V) = V^{\frac{1}{2}} A_r^{-1} V^{\frac{1}{2}} = V^{\frac{1}{2}} (A + r)^{-1} V^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что оператор $K_r(V)$ компактен и, более того, принадлежит $\mathfrak{S}_p$ при всех p, таких что $p > \alpha$ и $p \geqslant 1$. В самом деле, справедливо равенство $K_r(V) = \int_0^\infty V^{\frac{1}{2}} e^{-tA_r} V^{\frac{1}{2}} dt$. Согласно (4.2),

$$\|K_r(V)\|_{\mathfrak{S}_p} \leqslant \int_0^\infty \|V^{\frac{1}{2}} e^{-tA_r} V^{\frac{1}{2}}\|_{\mathfrak{S}_p} dt \leqslant \|V\|_{L_p} \int_0^\infty M_{B_r}(t)^{1/p} dt.$$

В условиях теоремы 2.5 $M_B(t) = O(t^{-\alpha})$ в нуле, то же верно и для M_{B_r}. На бесконечности $M_{B_r}(t)$ убывает экспоненциально. Таким образом, последний интеграл конечен, и $K_r(V) \in \mathfrak{S}_p$.

Для компактного самосопряженного оператора $K \geqslant 0$ с собственными значениями λ_k, и для заданного числа $\lambda > 0$, обозначим $n(\lambda, K) = \#\{k : \lambda_k > \lambda\}$. Принцип Бирмана–Швингера (см. [3]), в его простейшей форме, заключается в равенстве

$$N_-(A_r - V) = n(1, K_r(V)), \quad r > 0. \tag{4.8}$$

В этой работе мы не используем более тонкого варианта этого принципа, для $r = 0$.

Полагая в (4.8) $r \to 0$, приходим к равенству

$$N_-(A - V) = \lim_{r\to 0+} n(1, K_r(V)). \tag{4.9}$$

Чтобы оценить правые части в (4.8) и (4.9), выберем функцию $g(\lambda)$, определенную на $\mathbb{R}_+$, непрерывную, положительную и неубывающую. Неравенство

$$n(1, K_r(V)) \leqslant g(1)^{-1} \operatorname{Tr} g(K_r(V)) \tag{4.10}$$

справедливо всегда, когда выражение в правой части конечно. След в (4.10) зависит от g монотонно. Далее, если последовательность монотонных непрерывных функций $g_m \geqslant 0$ монотонно сходится к g в каждой точке $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{Tr} g_m(K_r(V)) = \operatorname{Tr} g(K_r(V)).$$

4.5. Алгебра функций на полуоси. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех конечных линейных комбинаций экспонент $e^{-\gamma z}$ с $\gamma \geqslant 0$:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{J} c_j e^{-\gamma_j z}, \quad \gamma_j \geqslant 0. \tag{4.11}$$

Мы всегда считаем, что в представлении (4.11) среди показателей γ_j нет совпадающих. Очевидно, $\mathcal{F}$ — алгебра по отношению к обычным операциям над функциями. Для любой $F \in \mathcal{F}$ положим $G(z) = zF(z)$ и (ср. (2.5))

$$g(\lambda) = \mathcal{L}(G)(\lambda) = \int_0^\infty F(z)e^{-z/\lambda}dz, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{4.12}$$

Иными словами,

$$g(\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^{J} c_j(1+\gamma_j\lambda)^{-1}, \quad \lambda \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Для любого натурального N обозначим через $\mathcal{F}_N$ идеал в $\mathcal{F}$, порожденный функцией

$$F_N(z) = (1-e^{-z})^N \in \mathcal{F}. \tag{4.14}$$

Если $F \in \mathcal{F}_N$, то представление (4.11) содержит не менее $N+1$ слагаемого и, поскольку $F(z) = O(z^N)$ в нуле, коэффициенты в (4.11) удовлетворяют равенствам (4.3). Из (4.13) и (4.3) следует, что $F \in \mathcal{F}_N$ влечет $g(\lambda) = O(\lambda^{N+1})$ в нуле. В частности, это выполнено для функции $g_N := \mathcal{L}(zF_N(z))$. Заметим, что функция g_N положительна и строго монотонна на $\mathbb{R}_+$. Согласно (4.12), для $F \in \mathcal{F}_N$ неравенство

$$|F(z)| \leqslant KF_N(z). \tag{4.15}$$

влечет

$$|g(\lambda)| \leqslant Kg_N(\lambda), \ \ \lambda \geqslant 0, \quad g = \mathcal{L}(zF(z)).$$

Условимся называть наилучшую постоянную K в (4.15) N-нормой функции $F \in \mathcal{F}_N$. Этот термин будет применяться и к любой непрерывной функции F на $\mathbb{R}_+$, для которой выполнено (4.15).

Лемма 4.5. *Любую функцию $0 \leqslant F \in C[0,\infty)$, имеющую конечный предел при $z \to \infty$, и такую, что $F(z) = o(z^N)$ в нуле, можно приблизить по N-норме неотрицательными функциями из $\mathcal{F}_N$.*

Доказательство. По теореме Стоуна–Вейерштрасса (ее варианту для локально компактных пространств) можно найти последовательность неотрицательных функций $F_m \in \mathcal{F}$, равномерно сходящуюся на $[0,\infty)$ к F/F_N. Тогда функции $F_N F_m \in \mathcal{F}_N$ приближают F по N-норме. •

4.6. Сходимость по следовой норме. При доказательстве теоремы 2.5 мы используем различные регуляризации, улучшающие характер сходимости. В связи с этим будет полезно следующее элементарное утверждение, ср. [14, теорема III.6.3].

Лемма 4.6. 1°. *Пусть T_n — последовательность ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, слабо сходящаяся к оператору T. Если $R_1, R_2 \in \mathfrak{S}_2$, то $R_1 T_n R_2 \to R_1 T R_2$ в $\mathfrak{S}_1$.*

2°. *Пусть $T \in \mathfrak{S}_1$, и $\{R_{1,n}\}$, $\{R_{2,n}\}$ — две последовательности ограниченных операторов, сильно сходящиеся к I. Тогда $R_{1,n} T R_{2,n}^* \to T$ в $\mathfrak{S}_1$.*

Доказательство. 1°. Если R_1 и R_2 — операторы ранга $1 : R_j = (\cdot, f_j) g_j$, то

$$R_1 T_n R_2 = (T_n g_2, f_1)(\cdot, f_2) g_1 \to (T g_2, f_1)(\cdot, f_2) g_1 = R_1 T R_2.$$

Это совпадает со сходимостью в $\mathfrak{S}_1$, поскольку фигурирующие здесь операторы имеют ранг 1. Результат распространяется на R_j любого конечного ранга и затем с помощью стандартной аппроксимационной процедуры — на общий случай.

2°. Если $T = (\cdot, f) g$, то

$$R_{1,n} T R_{2,n}^* = (\cdot, R_{2,n} f) R_{1,n} g \to (\cdot, f) g = T.$$

Снова, это совпадает со сходимостью в $\mathfrak{S}_1$. Доказательство завершается, как и в 1°. •

Заметим, что утверждение 2° становится неверным, если умножать справа на $R_{2,n}$, а не на $R_{2,n}^*$.

§5. Доказательство теоремы 2.5

5.1. Оценки следов. В следующем предложении даны спектральные оценки в терминах, имитирующих континуальные интегралы. Однако формально последние не используются. Предложение послужит нам основой для получения оценок „в конечных терминах“.

В дальнейшем через P_r и Q_r обозначаются ядра полугрупп e^{-tA_r} и e^{-tB_r}.

Предложение 5.1. *Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 2.5 и пусть $N > \alpha - 1$. Выберем функцию $0 \leqslant F \in \mathcal{F}_N$, положим $G(z) = zF(z)$ и определим функцию g равенством* (4.12). *Для заданного потенциала $0 \leqslant V \in L_1 \cap L_\infty$ и $r > 0$, введем величину*

$$\begin{aligned} L_r &= L_r(B, V, F) \\ &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\varepsilon \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \int_{\Omega^{n+1}} Q_r(\varepsilon; x_n, x_0) \prod_{k=1}^n Q_r(t/n; x_{k-1}, x_k) \\ &\qquad \times G\Big(\frac{t}{n} \sum_{\nu=1}^n V(x_\nu)\Big) dx_0 \dots dx_n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Тогда

$$\operatorname{Tr} g(K_r(V)) \leqslant L_r(B, V, F). \tag{5.2}$$

Доказательство предложения 5.1 приведено в конце этого параграфа. Перед этим мы покажем, как из него выводится теорема 2.5. Это будет сделано в несколько шагов.

5.2. Грубая оценка ЦЛР.

Теорема 5.2. *Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы* 2.5. *Пусть $N > \alpha - 1$, F_N — функция* (4.14), *$G_N(z) = zF_N(z)$ и $g_N = \mathcal{L}(G_N)$. Выберем любую выпуклую функцию $H(z)$ на $\mathbb{R}_+$, мажорирующую $G_N(z)$ и совпадающую с $G_N(z)$ при малых z. Тогда*

$$\operatorname{Tr} g_N(K_r) \leqslant \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\varepsilon \to 0+} \int_\Omega Q_r(t+\varepsilon; x, x) H(tV(x))dx. \tag{5.3}$$

Замечание. Теорема 5.2 уже дает спектральные оценки, однако с постоянными, значения которых далеки от оптимальных. Причина этого — в том, что функция g_N в (5.3) построена по функции G_N, а не по ее выпуклой мажоранте H. Это, разумеется, загрубляет оценку. Несмотря на это, теорема 5.2 является важным промежуточным звеном доказательства точной оценки.

Доказательство. Фиксируем n, ε и $t > 0$ и рассмотрим кратный интеграл в (5.1), при $G = G_N$. Так как $H(z) \geqslant G_N(z)$ и функция H — выпуклая, этот интеграл не превосходит величины

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\Omega^{n+1}} Q_r(\varepsilon; x_n, x_0) \prod_{k=1}^{n} Q_r(t/n; x_{k-1}, x_k) H(tV(x_\nu)) dx_0 \ldots dx_n. \tag{5.4}$$

Здесь в каждом слагаемом можно проинтегрировать по всем x_k с $k \neq \nu$, используя полугрупповое свойство. Все получающиеся интегралы попарно равны и (5.4) преобразуется к виду

$$\int_\Omega Q_r(t+\varepsilon; x, x) H(tV(x)) dx,$$

куда n не входит. Интегрируя по t и принимая во внимание (5.2), приходим к (5.3). •

Следствие 5.3. *При условиях теоремы 2.5 обе части неравенства (5.2) зависят от функции $F \in \mathcal{F}_N$ непрерывно по N-норме.*

Доказательство. Если

$$|G(z)| \leqslant \delta G_N(z), \quad \delta > 0, \tag{5.5}$$

то кратный интеграл в (5.1) не превосходит суммы (5.4), умноженной на δ. Это доказывает нужный результат для правой части (5.2). Далее, обозначим $f(\lambda) = g(\lambda)/g_N(\lambda)$. Тогда (5.5) влечет $|f(\lambda)| < \delta$ и, следовательно,

$$|\operatorname{Tr} g(K_r(V))| \leqslant \|f(K_r(V))\| \operatorname{Tr} g_N(K_r(V)) \leqslant \delta \operatorname{Tr} g_N(K_r(V)). \tag{5.6}$$

Так как, согласно теореме 5.2, $\operatorname{Tr} g_N(K_r(V)) < \infty$, последнее выражение в (5.6) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Это завершает доказательство для левой части (5.2). •

Замечание. Утверждение для левой части не вытекает прямо из (5.1), поскольку в следствии 5.3 мы не предполагаем, что $F \geqslant 0$.

5.3. Строгая оценка ЦЛР.

Предложение 5.4. *Пусть операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 2.5 и $0 \leqslant V \in L_1 \cap L_\infty$. Пусть $0 \leqslant G \in \mathcal{G}$, $F(z) = G(z)/z$ и $g = \mathcal{L}(G)$. Тогда справедливо неравенство (5.2) (не исключено, что его правая часть бесконечна).*

Доказательство. Согласно следствию 5.3, неравенство (5.2) выполнено для любой функции G такой, что F удовлетворяет условиям леммы 4.5, в частности для $G \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. В общем случае мы приближаем F монотонно возрастающей и поточечно сходящейся последовательностью функций $F_m \geqslant 0$ из C_0^∞. Соответствующие функции g_m сходятся к g, причем сходимость — также монотонная. Так как обе части в (5.2) выдерживают монотонную сходимость, мы получаем нужный результат для общего случая. •

Доказательство теоремы 2.5. Пусть сначала $V \in L_1 \cap L_\infty$. Тогда мы повторяем рассуждение п. 5.2, на этот раз начиная с неравенства (5.2) для выбранной F (и полагая $F(z) = G(z)/z$). Это дает

$$\operatorname{Tr} g(K_r(V)) \leqslant \int_0^\infty \frac{dt}{t} \limsup_{\varepsilon \to 0+} \int_\Omega Q_r(t+\varepsilon; x, x) G(tV(x))dx =: \mathcal{R}(V). \tag{5.7}$$

После этого все рассуждения стандартны. В правой части (5.7) мы заменяем Q_r на Q_B (напомним, что $Q_B \geqslant Q_r$). Согласно (4.10), это приводит к оценке $n(1, K_r(V)) \leqslant g(1)^{-1}\mathcal{R}(V)$. Наконец, мы приближаем заданную функцию V неубывающей последовательностью функций $V_m \in L_1 \cap L_\infty$, сходящейся к V п. в., и переходим к пределу в соответствующей оценке для V_m. •

5.4. Доказательство предложения 5.1. Функция g, участвующая в формулировке, представлена в виде (4.13), с коэффициентами, удовлетворяющими равенствам (4.3). Так как $K_r(V)(1+\gamma K_r(V))^{-1} = V^{\frac{1}{2}}(A_r+\gamma V)^{-1}V^{\frac{1}{2}}$, то

$$g(K_r(V)) = \sum_{j=1}^{J} c_j V^{\frac{1}{2}}(A_r+\gamma_j V)^{-1}V^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty \sum_{j=1}^{J} c_j V^{\frac{1}{2}} e^{-t(A_r+\gamma_j V)} V^{\frac{1}{2}} dt. \tag{5.8}$$

Интеграл в (5.8) сходится сильно. Далее, условие (2.4) заведомо выполнено для оператора B_r, доминирующего A_r. Поэтому применима лемма 4.3, в силу которой этот интеграл сходится и в $\mathfrak{S}_1$, если только $N > \alpha - 1$. Это влечет $g(K_r(V)) \in \mathfrak{S}_1$ и, таким образом, (5.8) приводит к равенству

$$\operatorname{Tr} g(K_r(V)) = \int_0^\infty \Gamma(t)dt, \tag{5.9}$$

где

$$\Gamma(t) = \sum_{j=1}^{J} c_j \operatorname{Tr}\left(V^{\frac{1}{2}} e^{-t(A_r+\gamma_j V)} V^{\frac{1}{2}}\right).$$

Мы оценим $\Gamma(t)$ для фиксированного $t > 0$. С этой целью, выберем целое число $p > 2$. Пользуясь цикличностью следа, получаем равенство

$$\Gamma(t) = \frac{p}{t(p-2)} \sum_{j=0}^{J} c_j \int_{tp^{-1}}^{t(1-p^{-1})} \operatorname{Tr}\left(e^{-s(A_r+\gamma_j V)} V e^{-(t-s)(A_r+\gamma_j V)}\right) ds. \tag{5.10}$$

Согласно лемме 4.2, при фиксированном $t > 0$ операторы под знаком следа в (5.10) имеют нормы в $\mathfrak{S}_1$, ограниченные равномерно по s. Поэтому можно снова поменять местами интегрирование и взятие следа, что дает

$$\Gamma(t) = \operatorname{Tr} W_p(t), \quad W_p(t) \in \mathfrak{S}_1,$$

где

$$W_p(t) = \frac{p}{t(p-2)} \sum_{j=0}^{J} c_j \int_{tp^{-1}}^{t(1-p^{-1})} e^{-s(A_r+\gamma_j V)} V e^{-(t-s)(A_r+\gamma_j V)} ds.$$

Хотя сам оператор $W_p(t)$ зависит от выбора p, его след $\Gamma(t)$ от p не зависит.

Выберем теперь расширяющееся (при $\varepsilon \to 0$) семейство подмножеств $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ конечной меры, объединение которых есть Ω. Введем в рассмотрение семейство регуляризующих операторов $R_\varepsilon = \chi_\varepsilon e^{-\varepsilon B_r/2}$, где χ_ε — характеристическая функция множества Ω_ε. По лемме 4.2, $R_\varepsilon \in \mathfrak{S}_2$. Кроме того, $R_\varepsilon \to I$ сильно при $\varepsilon \to 0$. Согласно лемме 4.6 (2°), $R_\varepsilon W_p(t) R_\varepsilon^* \to W_p(t)$ в $\mathfrak{S}_1$ и, следовательно,

$$\Gamma(t) = \operatorname{Tr} W_p(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{Tr} R_\varepsilon W_p(t) R_\varepsilon^*. \tag{5.11}$$

Чтобы вычислить $\operatorname{Tr} R_\varepsilon W_p(t) R_\varepsilon^*$, применим лемму 4.4, полагая в ее условиях $A = A_r$, $W = \gamma_j V$ и $\delta = p^{-1}$. Удобно принять $n = mp$, $m \in \mathbb{N}$. Лемма утверждает лишь существование слабого предела, однако по лемме 4.6 (1°), после умножения слева и справа на операторы из $\mathfrak{S}_2$, мы получаем для произведения сходимость в $\mathfrak{S}_1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}&(p-2)p^{-1} \operatorname{Tr} R_\varepsilon W_p(t) R_\varepsilon^* \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ n=mp}} \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J} c_j \sum_{l=m+1}^{n-m} R_\varepsilon (e^{-\frac{t}{n}A_r} e^{-\frac{t}{n}\gamma_j V})^l V (e^{-\frac{t}{n}A_r} e^{-\frac{t}{n}\gamma_j V})^{n-l} R_\varepsilon^*\right).\end{aligned}$$

Запишем след в правой части в виде кратного интеграла:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{J} c_j \sum_{l=m+1}^{n-m} \int_{\Omega^{n+2}} & Q_r(\varepsilon/2; y, x_0) P_r(t/n; x_0, x_1) e^{-\frac{t}{n}\gamma_j V(x_1)} \dots \\ & \times P_r(t/n; x_{l-1}, x_l) e^{-\frac{t}{n}\gamma_j V(x_l)} V(x_l) \\ & \times \dots P_r(t/n; x_{n-1}, x_n) e^{-\frac{t}{n}\gamma_j V(x_n)} Q_r(\varepsilon/2; x_n, y) \chi_\varepsilon(y)\, dy\, dx_0 \dots dx_n.\end{aligned}$$

Это выражение преобразуется к виду

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\int_{\Omega^{n+2}} \chi_\varepsilon(y) Q_r(\varepsilon/2; y, x_0) \prod_{k=1}^{n} P_r(t/n; x_{k-1}, x_k) \\ &\times \sum_{j=1}^{J} c_j e^{-\frac{t}{n}\gamma_j \sum_{\nu=1}^{n} V(x_\nu)} \sum_{l=m+1}^{n-m} V(x_l) Q_r(\varepsilon/2; x_n, y)\, dy\, dx_0 \dots dx_n.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Сумма по j в выражении (5.12) равна $F(\frac{t}{n}\sum_{\nu=1}^{n} V(x_\nu))$ и, следовательно, неотрицательна. Поэтому интеграл разве лишь увеличится, если заменить все P_r на Q_r. После этого все члены в (5.12) становятся неотрицательными. Мы еще увеличим их, заменяя χ_ε на 1 и распространяя суммирование по l на все l, $1 \leqslant l \leqslant n$. После этого интегрируем по y, используя полугрупповое свойство. Согласно (5.11), мы приходим к оценке

$$\begin{aligned}&(p-2)p^{-1}\Gamma(t) \\ &\leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{t} \int_{\Omega^{n+1}} Q_r(\varepsilon; x_n, x_0) \prod_{k=1}^{n} Q_r(t/n; x_{k-1}, x_k) \\ &\qquad \times G\left(\frac{t}{n}\sum_{\nu=1}^{n} V(x_\nu)\right) dx_0 \dots dx_n.\end{aligned}$$

Наконец, множитель $(p-2)p^{-1}$ в последнем неравенстве можно опустить, поскольку p произвольно, а $\Gamma(t)$ не зависит от p. Вместе с (5.9), это дает (5.2). •

Список литературы

[1] Arendt W., Bukhvalov A. V., *Integral representations of resolvents and semigroups*, Forum Math. **6** (1994), 111–135.

[2] Avron Y., Herbst I., Simon B., *Schrödinger operators with magnetic fields.* I. *General interactions*, Duke Math. J. **45** (1978), 847–883.

[3] Бирман М. Ш., *О спектре сингулярных граничных задач*, Мат. сб. **55** (1961), № 2, 125–174.

[4] Бирман М. Ш., *Дискретный спектр периодического оператора Шрёдингера, возмущенного убывающим потенциалом*, Алгебра и анализ **8** (1996), № 1, 3–20.

[5] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории*, Десятая математическая школа, Ин-т мат. АН УССР, Киев, 1974, сс. 5–189.

[6] Blanchard Ph., Stubbe J., *Bound states for Schrödinger Hamiltonians: phase space methods and applications*, Rev. Math. Phys. **8** (1996), 503–547.

[7] Bratteli O., Kishimoto A., Robinson D., *Positivity and monotonicity properties of C_0-semigroups.* I, Comm. Math. Phys. **75** (1980), 67–84.

[8] Carmona R., *Path integrals for relativistic Schrödinger operators*, Schrödinger Operators (Sønderborg, 1988), Lecture Notes in Phys., vol. 345, Springer, Berlin, 1989, pp. 65–92.

[9] Conlon J., *A new proof of the Cwickel-Lieb-Rozenbljum bound*, Rocky Mountain J. Math. **15** (1985), 117–122.

[10] Cupala W., *The upper bound of the number of eigenvalues for a class of perturbed Dirichlet forms*, Studia Math. **113** (1995), no. 2, 109–125.

[11] Cwikel M., *Weak type estimates for singular values and the number of bound states of Schrödinger operators*, Ann. of Math. (2) **106** (1977), 93–100.

[12] Daubechies I., *An uncertainty principle for fermions with generalized kinetic energy*, Comm. Math. Phys. **90** (1983), 511–520.

[13] Edmunds D. E., Evans W. D., *Spectral theory and differential operators*, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1987.

[14] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

[15] Hess H., Schrader R., Uhlenbrock D. A., *Domination of semigroups and generalization of Kato's inequality*, Duke Math. J. **44** (1977), 893–904.

[16] Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ.* Изд. 2-е, перераб., Наука, М., 1977.

[17] Levin D., Solomyak M., *Rozenblum–Lieb–Cwikel inequality for Markov generators*, J. Anal. Math. **71** (1997), 173–193.

[18] Li P., Yau Sh.-T., *On the Schrödinger equation and the eigenvalue problem*, Comm. Math. Phys. **88** (1983), 309–318.

[19] Lieb E. H., *Bounds on the eigenvalues of the Laplace and Schrödinger operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 751–753.

[20] Lieb E. H., *Kinetic energy bounds and their application to the stability of matter*, Schrödinger Operators (Sønderborg, 1988), Lecture Notes in Phys., vol. 345, Springer, Berlin, 1989, pp. 371–382.

[21] Melgaard M., Rozenblum G., *Spectral estimates for magnetic operators*, Math. Scand. **79** (1996), 237–254.

[22] Reed M., Simon B., *Methods of modern mathematical physics.* Vol. 4. *Analysis of operators*, Academic Press, New York–London, 1978; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1982.

[23] Розенблюм Г. В., *Распределение дискретного спектра сингулярных дифференциальных операторов*, Докл. АН СССР **202** (1972), № 5, 1012–1015.

[24] Schaefer H. H., *Banach lattices and positive operators*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 215, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1974.

[25] Simon B., *Trace ideals and their applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1979.

[26] Simon B., *Functional integration and quantum physics*, Academic Press, Inc., New York–London, 1979.

[27] Simon B., *Kato's inequality and the comparison of semigroups*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 97–101.

[28] Varopoulos N. Th., Saloff-Coste L., Coulhon T., *Analysis and geometry on groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[29] Yau H.-T., *Stability of relativistic Coulomb and gravitating systems*, Schrödinger Operators (Sønderborg, 1988), Lecture Notes in Phys., vol. 345, Springer, Berlin, 1989, pp. 444–458.

Поступило 15 июня 1997 г.

Department of Mathematics,
Göteborg University,
412 96 Göteborg, Sweden
E-mail: grigori@math.chalmers.se

Department of Theoretical Mathematics,
The Weizmann Institute of Science,
Rehovot 76100, Israel
E-mail: solom@wisdom.weizmann.ac.il