П. Н. Вабищевич, Сглаживание разностных решений неустойчивых задач, *Изв. вузов. Матем.*, 1986, номер 3, 28–33

12. Уолш Дж. Л. Интерполяция и аппроксимация рациональным функциями в комплексной области. М., 1961. 508 с.
13. Гаврилов В. И., Захарян В. С. Об исключительных множествах подклассов мероморфных функций ограниченного вида.— Изв. АН АрмССР. Матем; 1976, т. 11, № 1, с. 113—123.
14. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств. М., 1971. 126 с.

г. Ереван

Поступила
11.10.1983

*П. Н. Вабищевич*

УДК 519.6

## СГЛАЖИВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ РЕШЕНИЙ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

В последнее время все большее внимание уделяется построению экономичных разностных схем для приближенного решения неустойчивых эволюционных задач. В [1] подробно исследуются возможности метода квазиобращения. Изучение разностных схем метода квазиобращения для параболических уравнений проводится в работе [2]. В [3] исследуются разностные схемы, построенные на новом варианте метода квазиобращения без повышения порядка дифференциальных операторов по пространству, для эволюционных уравнений первого и второго порядков. В работах [4], [5] регуляризация разностного решения задачи Коши для эллиптического уравнения проводится на основе использования сглаживающих сплайнов, однако устойчивость разностных решений исследуется лишь экспериментально.

В данной работе рассматриваются вопросы сглаживания разностных решений некорректных задач для уравнений параболического и эллиптического типов. Для многомерных задач строятся экономичные разностные схемы со сглаживанием. Изучение устойчивости разностных схем по начальным данным с использованием процедуры сглаживания проводится в рамках общей теории устойчивости разностных схем А. А. Самарского [6], [7]. В § 1 описывается алгоритм сглаживания сеточной функции одной переменной. Одномерная и многомерная параболические задачи с обратным временем рассмотрены в §§ 2, 3. Последняя часть работы посвящена сглаживанию разностных решений для эллиптической задачи с начальными данными.

### § 1. Алгоритмы сглаживания одномерных сеточных функций

Пусть имеется, для простоты, равномерная сетка по переменной $x$ на интервале от 0 до $l$ с шагом $h$:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,\ Nh = l\}.$$

Ставится задача сглаживания сеточной функции

$$v(x_i) = v_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N,\quad v_0 = 0,\ v_N = 0.$$

Для ее решения можно использовать сглаживающие сплайны [8]. При решении неустойчивой задачи Коши для эллиптических уравнений в [4], [5] применялись сглаживающие кубические сплайны. Здесь применяются некоторые разностные алгоритмы сглаживания сеточных функций, которые можно рассматривать как сеточные аналоги алгоритмов сплайн-функций.

Сглаженную сеточную функцию обозначим через $u(x)$, где $x \in \bar{\omega}_h$, предполагая, что на концах интервала $u_0 = 0$, $u_N = 0$. Задача сглаживания состоит в минимизации следующего функционала, зависящего от параметра сглаживания $\alpha$:

$$M_\alpha = \sum_{i=1}^{N-1} (u_i - v_i)^2 h + \alpha \Omega_h. \tag{1}$$

Разностный сглаживающий функционал $\Omega_h$ может выбираться по-разному, напр., в виде

$$\Omega_h = \sum_{i=1}^{N-1} (u_{\bar{x}i})^2 h, \tag{2}$$

где использованы стандартные безындексные обозначения теории разностных схем [6]. Введем разностный оператор второй производной $\Lambda$, определенный на множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на концах интервала. Во внутренних узлах сетки $\omega_h$ имеем $\Lambda u = u_{\bar{x}x}$, $x \in \omega_h$, а на границе $u_0 = 0$, $u_N = 0$. Квадрат оператора $\Lambda$ определим на расширенной на один узел сетке $\bar{\omega}_h$ (дополнительные узлы $i = -1, N+1$). Во внутренних узлах $\Lambda^2 u = u_{\bar{x}x\bar{x}x}$, $x \in \omega_h$, а на границе интервала $(0, l)$ выполнены условия

$$u_0 = 0, \ u_N = 0,$$

$$\Lambda u_0 = 0, \ \Lambda u_N = 0.$$

Помимо (2) используем $\Omega_h$ в форме, примененной в [9] для разностных решений гиперболических уравнений:

$$\Omega_h = \sum_{i=1}^{N-1} (\Lambda u_i)^2 h. \tag{3}$$

Условие минимума $\partial M_\alpha / \partial u_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, функционала (1) при выборе $\Omega_h$ в виде (2) дает следующее разностное уравнение для определения $u(x)$ по заданной сеточной функции $v(x)$:

$$\alpha \Lambda u_i - (u_i - v_i) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{4}$$

Аналогично из (1), (3) получим

$$\alpha \Lambda^2 u_i + (u_i - v_i) = 0, \ i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{5}$$

Объединяя (4), (5), приходим к следующей формуле:

$$u(x) = (E + \alpha(-\Lambda)^k)^{-1} v(x), \ x \in \omega_h, \tag{6}$$

где $E$ — единичный сеточный оператор, $k = 1$ для уравнения (4) и $k = 2$ для (5). Оператор $-\Lambda$ положительно определен, т. е. ([6]) имеет место оценка

$$-\Lambda \geqslant \delta E, \quad \delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N}, \tag{7}$$

и поэтому уравнение (6) всегда разрешимо.

Для определения сглаженной функции $u(x)$ по $v(x)$, $x \in \omega_h$, можно воспользоваться алгоритмами прогонки [10] — трехточечной для задачи (4) и пятиточечной для (5).

## § 2. Задача для одномерного уравнения теплопроводности с обратным временем

Изучение вопросов применения алгоритмов сглаживания для разностного решения некорректных эволюционных задач начнем с простейшей одномерной параболической задачи. Пусть необходимо решить следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ 0 < x < l, \ t > 0, \tag{8}$$

$$u(0, t) = 0, \ u(l, t) = 0, \ t \geqslant 0, \tag{9}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{10}$$

Для разностного решения задачи (8) — (10) введем равномерную временную сетку с шагом $\tau$:

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \ \tau > 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Предлагаемый алгоритм сглаживания на каждом временном шаге реализуется в два этапа. На первом из них отыскивается разностное решение задачи (8) — (10) при использовании обычных схем. Затем это разностное решение сглаживается. Обозначим через $\widetilde{u}^{n+1}$ несглаженное решение задачи (8) — (10) на $(n+1)$-м слое, а через $u^{n+1}$ — сглаженное. Пусть, напр., $\widetilde{u}^{n+1}$ определяется по явной схеме

$$(\widetilde{u}^{n+1} - u^n)/\tau + \Lambda u^n = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

при заданном начальном приближении $u^0$. В соответствии с (6) имеем

$$u^{n+1} = (E + \alpha(-\Lambda)^k)^{-1} \widetilde{u}^{n+1}. \tag{12}$$

Запишем схему (11), (12) в канонической форме двухслойной схемы [6], [7]:

$$B(u^{n+1} - u^n)/\tau + Au^n = 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Для операторов $B$ и $A$ в (13) получим представление

$$B = E + \alpha(-\Lambda)^k, \quad (14) \qquad\qquad A = \Lambda + (\alpha/\tau)(-\Lambda)^k. \quad (15)$$

Для исследования $\rho$-устойчивости схемы (13) — (15) используем следующий основной результат [6], [7].

Лемма 1. *Схема* (13) *$\rho$-устойчива в сеточной норме $H_B$, порожденной оператором $B = B^* > 0$, если справедливо*

$$((1-\rho)/\tau) B \leqslant A \leqslant ((1+\rho)/\tau) B. \tag{16}$$

*При этом выполнено*

$$\| u^{n+1} \|_B^2 = (Bu^{n+1}, u^{n+1}) \leqslant \rho^2 \| u^n \|_B^2, \ \rho > 0.$$

В нашем случае (14), (15) условие $B = B^* > 0$ выполнено, легко устанавливается справедливость неравенства $\tau A \leqslant (1+\rho) B$. Оценим величину $\rho$ $(\rho > 1)$ из левой части неравенства (16). Негрудно убедиться, что неравенство $(1-\rho) B \leqslant \tau A$ выполнено при

$$\rho = 1 + \tau/\alpha_0, \tag{17}$$

где $\alpha_0 = \alpha$ при $k = 1$ и $\alpha_0 = \alpha\delta$ при $k = 2$ с постоянной $\delta$, определяемой условием (7). Это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 1. *Схема со сглаживанием* (11), (12), ((13) — (15)) *$\rho$-устойчива в $H_B$ с $\rho$, определяемым согласно* (17).

Из (13) — (15) следует, что схема со сглаживанием аппроксимирует исходную задачу (8) — (10) с погрешностью $O(h^2 + \tau + \alpha/\tau)$. Противоречивые требования аппроксимации и устойчивости (см. (17)) приводят к тому, что в данном случае речь идет лишь об условной $\rho$-устойчивости, под которой здесь понимается согласованный выбор параметров задачи $\tau$ и $\alpha$. Однако в случае $k = 2$, который при $h \to 0$ реализуется при использовании сглаживающих кубических сплайнов [8], можно получить более точный и содержательный результат о безусловной $\rho$-устойчивости схемы (13) — (15), для которой параметр $\alpha$ выбирается безотносительно к величине временного шага $\tau$.

Теорема 2. *Схема со сглаживанием* (11), (12) *при $k = 2$ $\rho$-устойчива с $\rho$, определяемым* (17), *где $\alpha_0 = 4\alpha/\tau$.*

Заметим, что в этом случае погрешность аппроксимации есть уже $O(h^2 + \tau + \alpha_0)$. Проверим необходимые и достаточные условия (16) применительно к случаю (14), (15) с $k = 2$ и $\alpha_0 = 4\alpha/\tau$. Выполнение правого неравенства (16) очевидно. Параметр $c$ в представлении $\rho = 1 + c\tau$ выберем так, чтобы было выполнено и левое неравенство (16). С учетом введенных обозначений $c(E + (\alpha_0\tau/4)\Lambda^2) \geqslant -\Lambda - (\alpha_0/4)\Lambda^2$. Отсюда следует $cE + (\alpha_0/4)(1 + c\tau)\Lambda^2 = (\sqrt{c}E + \sqrt{(\alpha_0/4)(1+c\tau)}\,\Lambda)^2 - \sqrt{c\alpha_0(1+c\tau)}\,\Lambda \geqslant -\Lambda$. Последнее неравенство будет выполнено для любого $\tau > 0$ при $c = 1/\alpha_0$. Тем самым теорема доказана.

Аналогично может быть исследован и более общий случай с оператором $\Lambda$, аппроксимирующим дифференциальный оператор с переменным коэффициентом. Например,

$$\Lambda u = (a u_{\bar{x}})_x, \quad x \in \omega_h, \tag{18}$$

если решается задача теплопроводности с обратным временем для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \ t > 0.$$

При этом в (18) коэффициент $a(x)$ определяется, напр., из условий

$$a_i = \left[\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right]^{-1}, \quad a_i = k(x_{i-1/2}).$$

Доказательство теоремы 1 в этом случае проводится полностью аналогично. Легко проводится обобщение результатов и на параболические уравнения более высокого порядка.

## § 3. Многомерные параболические задачи

Отдельно рассмотрим вопрос о построении $\rho$-устойчивых разностных схем со сглаживанием для многомерных параболических задач. Для этого остановимся на двумерной задаче теплопроводности с обратным временем в прямоугольнике $D = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 < x_\beta < l_\beta, \ \beta = 1, 2\}$. Задача состоит в отыскании функции $u(x, t)$ из условий

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad x \in D, \ t > 0, \tag{19}$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial D, \ t \geqslant 0, \tag{20}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{21}$$

Используем аналогично (11) явную схему

$$(\tilde{u}^{n+1} - u^n)/\tau + (\Lambda_1 + \Lambda_2) u^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

где введены обозначения $\Lambda_\beta u = u_{\bar{x}_\beta x_\beta}$, $\beta = 1, 2$, для внутренних узлов прямоугольника $D$ при использовании равномерной по каждому направлению сетки.

Сглаживание двумерной сеточной функции $\tilde{u}^{n+1}$ будем проводить покоординатно. Например, сначала по переменной $x_1$ с использованием оператора $\Lambda_1$ в сглаживающем функционале при постоянном $x_2$, а затем, наоборот, по переменной $x_2$ ($\Lambda_2$) при $x_1 = \mathrm{const}$. Такой процесс соответствует следующей формальной записи:

$$u^{n+1} = (E + \alpha_2(-\Lambda_2)^k)^{-1}(E + \alpha_1(-\Lambda_1)^k)^{-1}\tilde{u}^{n+1}. \tag{23}$$

Схема (22), (23) приводится к каноническому виду (13) с операторами

$$B = (E + \alpha_1(-\Lambda_1)^k)(E + \alpha_2(-\Lambda_2)^k),$$

$$A = \Lambda_1 + \Lambda_2 + (\alpha_1/\tau)(-\Lambda_1)^k + (\alpha_2/\tau)(-\Lambda_2)^k + (\alpha_1\alpha_2/\tau)(-\Lambda_1)^k(-\Lambda_2)^k.$$

Оператор $B$ факторизованный, и поэтому схема (22), (23) является экономичной.

Исследование $\rho$-устойчивости существенно облегчается имеющей место перестановочностью операторов $\Lambda_\beta$, $\beta = 1, 2$. Условия $B = B^* > 0$, $\tau A \leqslant (1 + \rho)B$ легко проверяются. При $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ и $k = 1$ выполнена и левая часть неравенства (16), если $\rho$ определяется согласно (17). При $k = 2$ имеем $\alpha_0 = \alpha_1\delta_1 = \alpha_2\delta_2$ в (17), где $\delta_\beta$ — нижняя граница спектра оператора $-\Lambda_\beta$ ($\beta = 1, 2$). Таким образом, установлен следующий результат.

Теорема 3. *Экономичная схема со сглаживанием* (22), (23) *ρ-устойчива с* ρ, *определяемым* (17), *где* $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2$ *при* $k=1$ *и* $\alpha_0=\alpha_1\delta_1=\alpha_2\delta_2$ *при* $k=2$.

Утверждение, аналогичное теореме 2, может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 4. *Схема со сглаживанием* (22), (23) *ρ-устойчива при* $k=2$ *с* ρ, *определяемым* (17) *при* $\alpha_0=2\alpha_1/\tau=2\alpha_2/\tau$.

Доказательство основывается на следующем неравенстве ($\alpha=\alpha_1=\alpha_2$):

$$B=(E+\alpha\Lambda_1^2)(E+\alpha\Lambda_2^2)\geqslant E+(\alpha/2)(\Lambda_1+\Lambda_2)^2$$

и проводится аналогично тому, как это делается при доказательстве теоремы 2.

Аналогичное утверждение устанавливается для более общих перестановочных операторов $\Lambda_\beta\,(-\Lambda_\beta>0)$, $\beta=1,\ 2$, в том числе и для задач большей размерности.

## § 4. Задача Коши для эллиптических уравнений

Обсудим вопросы применения процедуры сглаживания разностных решений некорректных эволюционных уравнений второго порядка. В качестве примера рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{24}$$

$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0,\ t\geqslant 0, \tag{25}$$

$$u(x,\ 0)=u_0(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,\ 0)=u_1(x),\ 0\leqslant x\leqslant l. \tag{26}$$

Для решения задачи (24) — (26) применим схему со сглаживанием типа (12). Используем для нахождения несглаженного решения на $n+1$ временном слое схему

$$(\tilde{u}^{n+1}-2u^n+u^{n-1})/\tau^2+\Lambda u^n=0,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{27}$$

Для исследования ρ-устойчивости схемы (27), (12) используем следующий основной результат теории устойчивости разностных схем [7] для трехслойных схем.

Лемма 2. *Трехслойная схема*

$$Bu_{\overset{\circ}{t}}+\tau^2 Ru_{\bar{t}t}+Au=0 \tag{28}$$

*ρ-устойчива с* $\rho>0$ *для самосопряженных операторов* $B$, $R$ *и* $A$, *если выполнены неравенства*:

$$[(\rho^2-1)/(2\tau)]\,B+(\rho-1)^2R+\rho A\geqslant 0, \tag{29}$$

$$[(\rho^2-1)/(2\tau)]\,B+(\rho+1)^2R-\rho A\geqslant 0, \tag{30}$$

$$[(\rho^2+1)/(2\tau)]\,B+(\rho^2-1)\,R\geqslant 0, \tag{31}$$

$$[(\rho^2-1)/(2\tau)]\,B+(\rho^2+1)\,R>0. \tag{32}$$

Схема (27), (12) записывается в канонической форме (28) с самосопряженными операторами

$$\begin{aligned}B&=(\alpha/\tau)(-\Lambda)^k,\\ R&=(1/\tau^2)(E+(1/2)\alpha(-\Lambda)^k),\\ A&=\Lambda+(\alpha/\tau^2)(-\Lambda)^k.\end{aligned} \tag{33}$$

Очевидно, что $B>0$, $R>0$ при положительных значениях параметра сглаживания α. В силу этого неравенство (31) с очевидностью выполняется. Непосредственной проверкой убеждаемся и в справедливости неравенств (30), (32) при естественном условии $\rho>1$. Оценим величину ρ из условия (29). Имеем

$$[(\rho^2-1)/(2\tau)]\,B+(\rho-1)^2 R+\rho A=(\alpha/\tau^2)\,\rho^2\,(-\Lambda)^k+\rho\Lambda+((\rho-1)^2/\tau^2)\,E.$$

Поэтому неравенство (29) будет выполнено при $k=1$, если $\rho=1+\tau^2/\alpha$. При $k=2$ имеем оценку $\rho=1+\tau^2/(\alpha\delta)$, где $\delta$ — постоянная в неравенстве (7). Суммируя, заключаем следующее.

Теорема 5. *Схема со сглаживанием* (27), (12) *$\rho$-устойчива с* $\rho=1+\tau/\alpha_0$, *где* $\alpha_0=\alpha/\tau$ *при* $k=1$ *и* $\alpha_0=\alpha\delta/\tau$ *при* $k=2$.

Аналогично § 3 проводится исследование трехмерной задачи Коши с покоординатным сглаживанием.

Для $k=2$ более точный результат формулируется в виде следующего утверждения.

Теорема 6. *Схема со сглаживанием* (27), (12) *с* $k=2$ *$\rho$-устойчива при* $\rho$, *определяемом формулой* (17), *где* $\alpha=\alpha_0^2\tau^2/4$.

Для доказательства подставим (33) в (29) и получим $[(\rho^2-1)/(2\tau)]\,B+(\rho-1)^2 R+\rho A=[(\rho-1)^2/\tau^2]\,E+(\alpha\rho^2/\tau^2)\,\Lambda^2+\rho\Lambda=[((\rho-1)/\tau)\,E+(\sqrt{\alpha}\rho/\tau)\,\Lambda]^2-(2\rho(\rho-1)\sqrt{\alpha}/\tau^2)\,\Lambda+\rho\Lambda\geqslant 0$. Это неравенство будет выполнено при $\rho=1+\tau^2/(2\sqrt{\alpha})$. Отсюда и следует оценка (17) при $\alpha=\alpha_0^2\tau^2/4$, что и доказывает теорему.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Самарскому за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М., 1970. 336 с.

2. Тамме Э. Э. Об устойчивости разностных схем при решении некорректных задач методом квазиобращения.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 5, с. 1319—1325.

3. Вабищевич П. Н. Разностные методы решения некоторых некорректных задач.— Изв. вузов. Матем., 1984, № 8, с. 3—9.

4. Вабищевич П. Н. Разностные методы решения задачи Коши для эллиптических уравнений.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, т. 21, № 2, с. 509—511.

5. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи продолжения потенциала в сторону возмущающих масс.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1982, № 7, с. 31—36.

6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1977. 656 с.

7. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М., 1973. 416 с.

8. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М., 1976. 248 с.

9. Москальков М. Н. О точности разностных схем, аппроксимирующих волновое уравнение с кусочно-гладкими решениями.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 2, с. 390—401.

10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М. 1978. 592 с.

г. Москва

Поступила'
10.11.1983

*Н. Л. Василевский*

УДК 517.983

# БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ДВУМЕРНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ С ЯДРОМ БЕРГМАНА И КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, II

Данная работа является окончанием статьи [1] и содержит ее последние четыре параграфа. Здесь мы продолжаем нумерацию и сохраняем все обозначения из [1]. В работе завершается изучение операторов из алгебры $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(PC(D,l);\ K_D;\ \boldsymbol{T})$. В § 4 производится гомотопическая классификация нётеровых операторов алгебры $\boldsymbol{R}$. В § 6 вычисление индекса нётеровых операторов из $\boldsymbol{R}$ производится на основе представления их в виде произведения нётеровых операторов из более простых алгебр. В § 5 находятся формулы для индекса для этих более простых случаев. В § 7 дано приложение полученных результатов к исследованию алгебры, порожденной теплицевыми в $H^2(D)$ операторами, а также обобщаются на кусочно-непрерывный случай некоторые результаты статьи [2].