В. П. Танана, Приближенное решение неявных операторных уравнений первого рода методом регуляризации, *Изв. вузов. Матем.*, 1978, номер 11, 98–103

https://www.mathnet.ru/ivm5866

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1978 МАТЕМАТИКА № 11 (198)

УДК 517.98

В. П. Танана

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЯВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Многие прикладные задачи физики и геофизики сводятся к неявным операторным уравнениям первого рода. К таким уравнениям сводятся также обратные задачи математической физики в тех случаях, когда выражение для функции Грина неизвестно. Примером такой задачи может служить обратная задача электрокаротажа скважин, имеющая важное прикладное значение, т. к. является основной при исследовании нефтяных месторождений и подсчете запасов нефти.

В настоящей работе проводится обоснование метода регуляризации А. Н. Тихонова применительно к решению неявных операторных уравнений, а в качестве приложения развиваемой теории решается обратная задача электрокаротажа скважин.

1. Постановка задачи и метод регуляризации

Рассмотрим неявное операторное уравнение первого рода

$$\Phi(u, f)=0, \quad u\in U, \; f\in F, \tag{1}$$

где U — пространство Ефимова—Стечкина [1], F — рефлексивное банахово пространство, а Φ — оператор, определенный на множестве $D(\Phi)\subset U\times F$ вида $D(\Phi)=\mathrm{pr}\,[D(\Phi),\ U]\times F$, где множество $\mathrm{pr}\,[D(\Phi),\ U]$ является слабо замкнутым в U, со значениями в рефлексивном банаховом пространстве Z, удовлетворяющий условию:

$$u_n\rightarrow u,\ f_n\rightarrow f \Rightarrow \Phi(u_n, f_n)\rightarrow\Phi(u, f). \tag{2}$$

Предположим, что при $f=f_0$ существует точное решение уравнения (1), вообще говоря, не единственное. Обозначим множество решений уравнения (1) при $f=f_0$ через U_0.

Пусть f_0 и оператор Φ нам неизвестны, а вместо них известно f_δ такое, что для любого $u_0\in U_0$ существует константа $C(u_0)$, что

$$\|\Phi(u_0, f_\delta)\|\leqslant\xi(\delta)\,C(u_0), \tag{3}$$

где $\delta<0$ — числовой параметр, а ξ — известная неотрицательная функция и оператор Φ_h, удовлетворяющий условию (2) и такой, что

$$D(\Phi_h)=D(\Phi) \tag{4}$$

и

$$\|\Phi_h(u, f)-\Phi(u, f)\|\leqslant\eta(h)\,C_1(u, f), \tag{5}$$

где $h < 0$ — числовой параметр, $\eta(h)$ — известная неотрицательная функция, а о функции $C_1(u, f)$ известно лишь то, что она существует и ограничена на любом множестве $M \subset D(\Phi)$ таком, что $\mathrm{pr}[M, U]$ ограничена, а $\mathrm{pr}[M, F]$ компактна.

Будем решать задачу методом регуляризации А. Н. Тихонова, который заключается в сведении задачи приближенного решения уравнения (1) к вариационной задаче

$$\inf \{ \|\Phi_h(u, f_\delta)\|^p + \alpha \|u\|^q : u \in \mathrm{pr}[D(\Phi), U]\}, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$, $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$.

При сформулированных выше условиях справедлива

Теорема 1. *При любых $\alpha > 0$ и $f_\delta \in F$ вариационная задача* (6) *разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим минимизирующую последовательность $\{u_n\}$ такую, что

$$\|\Phi_h(u_n, f_\delta)\|^p + \alpha \|u_n\|^q \to \inf \{ \|\Phi_h(u, f_\delta)\|^p + \alpha \|u\|^q : u \in \mathrm{pr}[D(\Phi), U]\}.$$

По определению inf найдется такое положительное число r, что для любого n справедливо неравенство

$$\|\Phi_h(u_n, f_\delta)\|^p + \alpha \|u_n\|^q \leqslant r. \tag{7}$$

Из (7) следует, что последовательность ограничена по норме, а следовательно, слабо компактна. Без ограничения общности можно считать, что

$$u_n \rightharpoonup \hat{u}. \tag{8}$$

Но тогда ввиду свойства (2)

$$\Phi_h(u_n, f_\delta) \to \Phi_h(\hat{u}, f_\delta). \tag{9}$$

По свойству нормы слабого предела из (8) и (9) будет следовать, что

$$\|\Phi_h(\hat{u}, f_\delta)\|^p + \alpha \|\hat{u}\|^q \leqslant \lim_{n\to\infty} \{ \|\Phi_h(u_n, f_\delta)\|^p + \alpha \|u_n\|^q\}.$$

Так как последовательность $\{u_n\}$ является минимизирующей, то элемент $\hat{u}$ является решением вариационной задачи (6). Тем самым теорема доказана.

Обозначим множество решений вариационной задачи (6) через $U_{\delta h}^{\alpha}$ и будем называть его приближенным решением уравнения (1). Справедлива следующая

Теорема 2. *Если параметры α, δ, h связаны соотношением $\alpha = \alpha(\delta, h)$ так, что $\alpha(\delta, h) \to 0$, $\dfrac{(\zeta(\delta) + \eta(h))^p}{\alpha(\delta, h)} \to 0$ при δ, $h \to 0$ и $f_\delta \to f_0$, то имеет место β-сходимость семейства множеств $(U_{\delta h}^{\alpha(\delta, h)})$ к U_0 при δ, $h \to 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда можно указать последовательности $\{\delta_k\}, \delta_k \to 0$, $\{h_k\}$, $h_k \to 0$; $\{u_k\}$, $u_k \in U^{\alpha_k}_{\delta_k h_k}$, $\alpha_k = \alpha(\delta_k, h_k)$ и число $d > 0$ такие, что

$$\inf\{\|u_k - u_0\| : u_0 \in U_0\} \geqslant d. \tag{10}$$

По определению u_k для каждого $u_0 \in U_0$ имеем

$$\|\Phi_{h_k}(u_k, f_{\delta_k})\|^p + \alpha_k \|u_k\|^q \leqslant \|\Phi_{h_k}(u_0, f_{\delta_k})\|^p + \alpha \|u_0\|^q.$$

Учитывая (3), (5) и неравенство треугольника, получим

$$\|\Phi_{h_k}(u_k, f_{\delta_k})\|^p + \alpha_k \|u_k\|^q \leqslant [\eta(h_k) C_1(u_0, f_{\delta_k}) + \\ + \xi(\delta_k) C(u_0)]^p + \alpha_k \|u_0\|^q. \tag{11}$$

Так как $\zeta(\delta_k) \geqslant 0$, $\eta(h_k) \geqslant 0$, $[\zeta(\delta_k) + \eta(h_k)]^p/\alpha_k \to 0$, то $\zeta(\delta_k) \to 0$ и $\eta(h_k) \to 0$, что вместе с условием (5) и компактностью множества $\{f_{\delta_k}\} \cup \{f_0\}$ влечет

$$[\eta(h_k) C_1(u_0, f_{\delta_k}) + \xi(\delta_k) C(u_0)]^p + \alpha_k \|u_0\|^q \to 0,$$

и поэтому $\|\Phi_{h_k}(u_k, f_{\delta_k})\|^p + \alpha_k \|u_k\|^q \to 0$, а следовательно, и

$$\|\Phi_{h_k}(u_k, f_{\delta_k})\| \to 0. \tag{12}$$

Из (11) имеем

$$\|u_k\|^q \leqslant \frac{[\eta(h_k) C_1(u_0, f_{\delta_k}) + \zeta(\delta_k) C(u_0)]^p}{\alpha_k} + \|u_0\|^q. \tag{13}$$

Но $[\eta(h_k) C_1(u_0, f_{\delta_k}) + \zeta(\delta_k) C(u_0)]^p/\alpha_k \to 0$, т. к.

$$[\eta(h_k) C_1(u_0, f_{\delta_k}) + \zeta(\delta_k) C(u_0)]^p \leqslant [\eta(h_k) + \zeta(\delta_k)]^p \widetilde{C}(u_0),$$

где $\widetilde{C}(u_0) = \max\{C(u_0), \sup\limits_k \{C_1(u_0, f_{\delta_k})\}\}$, поэтому последовательность $\{\|u_k\|\}$ ограничена. Учитывая рефлексивность пространства U, имеем слабую компактность множества $\{u_k\}$. Без ограничения общности можно считать, что $u_k \rightharpoonup \hat{u}$, а следовательно, по свойству (2) оператора Φ, и $\Phi(u_k, f_{\delta_k}) \to \Phi(\hat{u}, f_0)$. Покажем, что $\hat{u} \in U_0$.

Действительно, в силу условия (5), имеем

$$\Phi_{h_k}(u_k, f_{\delta_k}) - \Phi(u_k, f_{\delta_k}) \to 0.$$

Поэтому из равенства

$$\Phi_{h_k}(u_k, f_{\delta_k}) = \Phi_{h_k}(u_k, f_{\delta_k}) - \Phi(u_k, f_{\delta_k}) + \Phi(u_k, f_{\delta_k})$$

получаем

$$\Phi_{h_k}(u_k, f^{\delta_k}) \to \Phi(\hat{u}, f_0). \tag{14}$$

Из соотношений (12) и (14) следует, что $\|\Phi(\hat{u}, f_0)\|=0$, т. е. $\hat{u}\in U_0$. Подставляя в соотношение (13) вместо u_0 $\hat{u}$ и переходя к пределу при $k\to\infty$, получим $\|\hat{u}\|\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\|u_k\|\leqslant\varlimsup_{k\to\infty}\|u_k\|\leqslant\|\hat{u}\|$, т. е. $\|u_k\|\to\|\hat{u}\|$, что с учетом свойства Ефимова—Стечкина противоречит условию (10). Теорема доказана.

2. Конечномерные аппроксимации регуляризованного решения

Для решения задачи на ЭВМ необходима соответствующая дискретизация исходных данных и решений. При этом требуется, чтобы решение новой задачи, полученной после дискретизации, было близко к решению исходной.

Для дискретизации исходных данных и решений может быть использована, напр., конечномерная аппроксимация пространств и операторов. Перейдем к исследованию вопроса об устойчивости такой аппроксимации.

Для этого рассмотрим возрастающую цепочку $\{U_m\}$ конечномерных подпространств пространства U такую, что для любого m имеем $U_m\cap\operatorname{pr}[D(\Phi_h), U]\neq\varnothing$ и

$$\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} U_m\cap\operatorname{pr}[D(\Phi_h), U]}=\operatorname{pr}[D(\Phi_h), U], \tag{15}$$

и последовательность операторов Φ_{hn}, удовлетворяющую условию (2) и

$$D(\Phi_{hn})\supset D(\Phi_h),\ \operatorname{pr}[D(\Phi_{hn}), U]=\operatorname{pr}[D(\Phi_h), U], \tag{16}$$

а также последовательность $\{f_\delta^l\}$ такую, что $f_\delta^l\to f_\delta$ при $l\to\infty$.

Рассмотрим вариационную задачу

$$\inf\{\|\Phi_{hn}(u, f_\delta^l)\|^p+\alpha\|u\|^q : u\in U_m\cap\operatorname{pr}[D(\Phi_{hn}), U]\}. \tag{17}$$

В силу условия (16), $\operatorname{pr}[D(\Phi_{hn}), U]$ слабо замкнуто, а т. к. любое конечномерное подпространство замкнуто, а следовательно, и слабо замкнуто, то и все множества $U_m\cap\operatorname{pr}[D(\Phi_{hn}), U]$ слабо замкнуты. Таким образом, по теореме 1 вариационная задача (17) разрешима при всех m, n, l. Обозначим множество решений задачи (17) через $U_{\delta h}^{\alpha mnl}$.

На пространстве Z рассмотрим топологию τ более слабую, чем топология, порожденная нормой, и такую, что Z, наделенное этой топологией, является метризуемым локально выпуклым пространством, которое будем обозначать $\langle Z, \tau\rangle$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность операторов Φ_{hn} со значениями в Z τ-равномерно сходится к оператору Φ_h на множестве M, если для любой τ-окрестности нуля V найдется номер N, что для всех $n\geqslant N$ и для всех $(u, f)\in M$ имеем $\Phi_{hn}(u, f)-\Phi_h(u, f)\in V$.

Теорема 3. *Если последовательность операторов* $\{\Phi_{hn}\}$ *τ-равномерно сходится к оператору* Φ_h *на каждом множестве вида* $\tilde{U}\times\{f_\delta^l\}\subset D(\Phi_h)$, *где* $\tilde{U}$ *ограничено, и для любого* $u\in\operatorname{pr}[D(\Phi_h), U]$

$$\Phi_{hn}(u, f_\delta^l) \to \Phi_h(u, f_\delta), \ n, \ l \to \infty,$$

то семейство множеств $(U_{\delta h}^{\alpha mnl})$ *β-сходится к приближенному решению* $U_{\delta h}^\alpha$ *уравнения* (1) *при* $n, m, l \to \infty$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{u_k\}: u_k \in U_{\delta h}^{\alpha m_k n_k l_k}$ и число $d > 0$ такие, что

$$\rho(u_k, U_{\delta h}^\alpha) \geqslant d > 0. \tag{18}$$

По определению u_k для любого $u \in U_m$ справедливо неравенство

$$\|\Phi_{hn_k}(u_k, f_\delta^{l_k})\|^p + \alpha\|u_k\|^q \leqslant \|\Phi_{hn_k}(u, f_\delta^{l_k})\|^p + \alpha\|u\|^q. \tag{19}$$

Ввиду условия монотонности последовательности подпространств $\{U_{m_k}\}$ можно взять одно и для всех k; тогда в силу условий теоремы последовательность $\{\|\Phi_{hn_k}(u, f_\delta^{l_k})\|^p + \alpha\|u\|^q\}$ ограничена, а следовательно, ограничена и последовательность

$$\{\|\Phi_{hn_k}(u_k, f_\delta^{l_k})\|^p + \alpha\|u_k\|^q\}.$$

Так как пространства U и Z рефлексивны, то на основании (19), без ограничения общности, можно считать, что

$$u_k \rightharpoonup \hat{u}, \tag{20}$$

$$\Phi_{hn_k}(u_k, f_\delta^{l_k}) \rightharpoonup \hat{z}.$$

Покажем, что

$$\hat{z} = \Phi_h(\hat{u}, f_\delta). \tag{21}$$

Учитывая (2) и (20), получим

$$\Phi_{hn_k}(u_k, f_\delta^{l_k}) - \Phi_h(u_k, f_\delta^{l_k}) \to \hat{z} - \Phi_h(\hat{u}, f_\delta).$$

Рассмотрим базис фильтра окрестностей нуля в $\langle Z, \tau\rangle$ **Q**, состоящий из τ-замкнутых выпуклых множеств [2]. Так как $\{u_k\}$ ограничена, то в силу τ-равномерной сходимости Φ_{hn_k} к Φ_h для любого $V \in \mathbf{Q}$ найдется k_0 такое, что для всех $k \geqslant k_0$

$$\Phi_{hn_k}(u_k, f_\delta^{l_k}) - \Phi_h(u_k, f_\delta^{l_k}) \in V.$$

Из условия τ-замкнутости V и того, что топология τ слабее топологии, порожденной нормой пространства Z, получим что V сильно замкнуто, а ввиду его выпуклости и слабо замкнуто. Поэтому $\hat{z} - \Phi_h(\hat{u}, f_\delta) \in V$, а значит и $\hat{z} - \Phi_h(\hat{u}, f_\delta) \in \bigcap_{V \in \mathbf{Q}} V$. Так как топология τ метрируема, то $\bigcap_{V \in \mathbf{Q}} V = \{0\}$; таким образом, соотношение (21) доказано.

Покажем теперь, что $\hat{u} \in U_{\delta h}^\alpha$. Используя свойство нормы слабого предела, учитывая при этом соотношения (20), (21) и условия теоремы, переходя в (19) к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\hat{u}\|^q \leqslant \varliminf_{k\to\infty} a_k \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} a_k \leqslant \|\Phi_h(u,\ f_\delta)\|^p + \alpha\|u\|^q, \tag{22}$$

где $a_k = \|\Phi_{hn_k}(u_k,\ \overset{l}{f}{}_\delta^k)\|^p + \alpha\|u_k\|^q$.

Отметим, что соотношение (22) справедливо для любого u:

$$u \in \bigcup_{m=1}^{\infty} (U_m \cap \mathrm{pr}\,[D(\Phi_h),\ U]).$$

Возьмем произвольное $\bar{u} \in \mathrm{pr}\,[D(\Phi_h),\ U]$. Тогда ввиду условия (15) найдется последовательность $\{\bar{u}_{m_k}\}$, $\bar{u}_{m_k} \in U_{m_k} \cap \mathrm{pr}\,[D(\Phi_h),\ U]$ такая, что $\bar{u}_{m_k} \to \bar{u}$ при $k \to \infty$. Из определения $\bar{u}_{m_k}$ следует, что в (22) вместо u можно поставить любое $\bar{u}_{m_k}$:

$$\|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\hat{u}\|^q \leqslant \varliminf_{k\to\infty} a_k \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} a_k \leqslant \|\Phi_h(\bar{u}_{m_k},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\bar{u}_{m_k}\|^q.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $k \to \infty$ и учитывая непрерывность оператора Φ_h по u, получим

$$\|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\hat{u}\|^q \leqslant \varliminf_{k\to\infty} a_k \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} a_k \leqslant \|\Phi_h(\bar{u},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\bar{u}\|^q. \tag{23}$$

Это и означает, что $\hat{u} \in U_{\delta h}^{\alpha}$. Теперь в соотношении (23) вместо $\bar{u}$ подставим элемент $\hat{u}$:

$$\|\Phi_h(\hat{u},\ \overset{l}{f}{}_\delta^k)\|^p + \alpha\|\hat{u}\|^q \leqslant \varliminf_{k\to\infty} a_k \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} a_k \leqslant \|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\hat{u}\|^q.$$

Это соотношение показывает, что

$$\|\Phi_{hn_k}(u_k,\ \overset{l}{f}{}_\delta^k)\|^p + \alpha\|u_k\|^q \to \|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\hat{u}\|^q. \tag{24}$$

Так как последовательности $\{\|\Phi_{hn_k}(u_k,\ \overset{l}{f}{}_\delta^k)\|\}$, $\{\|u_k\|\}$ ограничены, то из них можно выделить сходящиеся подпоследовательности $\|\Phi_{hnk'}(u_{k'},\ \overset{l}{f}{}_\delta^{k'})\| \to \gamma_1$ и $\|u_{k'}\| \to \gamma_2$, где $\gamma_1 \geqslant 0$ и $\gamma_2 \geqslant 0$. Тогда из (24) следует, что $\gamma_1^p + \alpha\gamma_2^q = \|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|^p + \alpha\|\hat{u}\|^q$, но т. к. $\gamma_1^p \geqslant \|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|^p$, а $\alpha\gamma_2^q \geqslant \alpha\|\hat{u}\|^q$, то $\gamma_1 = \|\Phi_h(\hat{u},\ f_\delta)\|$, а $\gamma_2 = \|\hat{u}\|$, т. е. $u_{k'} \rightharpoonup \hat{u}$ и $\|u_{k'}\| \to \|\hat{u}\|$, что с учетом условия Ефимова—Стечкина [1] противоречит (18). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. УМН, т. XXVIII, вып. 6, 1973, с. 3—66.

2. Робертсон А. П., Робертсон В. П. Топологические векторные пространства. М., „Мир“, 1967.

г. Свердловск

Поступила
5 VI 1978