С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, Самосопряженные эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы,
Алгебра и анализ, 1992, том 4, выпуск 3, 196–225

https://www.mathnet.ru/aa328

Алгебра и анализ
Том 4 (1992), вып. 3

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА РЕБРАХ ГРАНИЦЫ

С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский

Рассматриваются формально самосопряженные относительно формулы Грина эллиптические краевые задачи для систем уравнений в областях с ребрами на границе. Показано, что для довольно широкого класса задач фредгольмовость соответствующего оператора обеспечивается введением так называемых условий излучения на ребрах. С „естественными" условиями излучения, разрешающими присутствие в асимптотике решения только уходящих волн, связывается матрица рассеяния, а „энергетическим" условиям излучения отвечает матрица поляризации.

Введение

В статье рассматриваются общие формально самосопряженные эллиптические краевые задачи в областях с ребрами на границе. Обсуждается постановка таких задач (функциональные пространства, дополнительные условия на ребрах), приводящая к фредгольмовым операторам.

В теории эллиптических краевых задач фредгольмовость оператора обеспечивается однозначной разрешимостью модельных задач с замороженными коэффициентами. Для областей с ребрами среди модельных появляются краевые задачи в клине $\mathbb{D} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{K}^{n-d}$ и в $(n-d)$-мерном конусе $\mathbb{K}^{n-d}$, исследование которых и составляет основную трудность. В общей теории приходится ограничиваться постулатом об однозначной разрешимости таких задач в некоторых весовых классах (см. [1–3] и др.). Имеются примеры, когда „обычные" шкалы весовых пространств оказываются непригодными с этой точки зрения. Более универсальным инструментом для построения фредгольмовой задачи служат условия излучения на ребрах. Такого рода постановки изучались в общей несамосопряженной ситуации в статье [4]. При этом дополнительно предполагалось, что сужением весового класса достигается мономорфность оператора модельной задачи в конусе, а расширением — эпиморфность. Тогда с помощью условий излучения определялся „промежуточный" изоморфизм. Настоящая статья продолжает исследования [4]; здесь мы ограничиваемся самосопряженными задачами, что позволяет избавиться от упомянутого дополнительного предположения.

Ключевые слова: фредгольмовость краевой задачи, естественные или энергетические условия излучения, матрица рассеяния.

Постановка краевых задач и предварительные сведения даны в § 1. Модельной задаче с условиями излучения в конусе посвящен § 2. Для описания этих условий рассматриваются „асимптотические" решения задачи в конусе; ввиду некоторых физических аналогий они называются волнами. Вводятся различные классы волн: приходящие и уходящие волны, энергетические (с конечной „энергией") и неэнергетические. „Естественные" условия излучения, например, состоят в том, что в асимптотику искомого решения вблизи вершины допускаются лишь уходящие волны, а в „энергетических" условиях излучения запрещаются неэнергетические волны. В связи с естественными условиями определяется матрица рассеяния, а с энергетическими — матрица поляризации. Доказывается однозначная разрешимость соответствующих модельных задач в конусе. Результаты § 2 применяются в § 3 для доказательства фредгольмовости краевой задачи с условиями излучения на ребре.

В другой статье будут определены (псевдодифференциальные) операторы рассеяния и поляризации на ребрах, даны приложения этих понятий к задачам механики трещин. Кроме того, в терминах оператора рассеяния выражается приращение размерности ядра (коядра) краевой задачи при изменении весового показателя в функциональном пространстве; прототип этой формулы для случая конуса содержится в § 2.

§ 1. Постановка краевых задач

1. Основная задача. Пусть G — область в $\mathbb{R}^n$ с компактным замыканием $\bar{G}$ и границей ∂G. На ∂G выделено множество M (ребро), которое является гладким замкнутым подмногообразием $\mathbb{R}^n$ размерности $d \in (0, n-1)$, причем $\partial G \setminus M$ — гладкое подмногообразие $\mathbb{R}^n$, $\dim(\partial G \setminus M) = n-1$. (Не исключается случай, когда M — d-мерная компонента границы). Для каждой точки $z^\circ \in M$ существуют окрестность $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}^n$ и диффеоморфизм $\varkappa : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varkappa(G \cap \mathcal{U}) = \mathbb{K}(z^\circ) \times \mathbb{R}^d$ и $\varkappa(z^\circ) = 0, \varkappa'(z^\circ) = \mathbb{I}$; здесь $\mathbb{K}(z^\circ)$ — открытый $(n-d)$-мерный конус. (Если M — d-мерная компонента связности, то $\mathbb{K}(z^0) = \mathbb{R}^{n-d} \setminus \{0\}$). Будем считать, что конус $\mathbb{K}(z^\circ)$ не зависит от точки $z^\circ \in M$. Через Ω обозначим область, которую конус $\mathbb{K}$ вырезает на единичной сфере S^{n-d-1}.

Пусть $\mathcal{L}(x, D_x)$ — формально самосопряженный $k \times k$-матричный эллиптический дифференциальный оператор с гладкими на множестве $\bar{G} \setminus M$ коэффициентами, причем $\operatorname{ord} \mathcal{L}_{ij} = t_i + t_j$, $t_1, \dots, t_k$ — целые неотрицательные числа и $m = t_1 + \dots + t_k$. Предположим, что для $u, v \in C_c^\infty(\bar{G} \setminus M)^k$ справедлива формула Грина

$$(\mathcal{L}u, v)_G + (\mathcal{B}u, \mathcal{J}v)_{\partial G} - (u, \mathcal{L}v)_G - (\mathcal{J}u, \mathcal{B}v)_{\partial G} = 0, \tag{1.1}$$

где $(\,,)_G$ и $(\,,)_{\partial G}$ — скалярные произведения в $L_2(G)^k$ и $L_2(\partial G)^m$, $\mathcal{B}(x, D_x)$ и $\mathcal{J}(x, D_x)$ - $m \times k$-матрицы дифференциальных операторов с коэффициентами, гладкими на $\partial G \setminus M$; $\operatorname{ord} \mathcal{B}_{qj} = \sigma_q + t_j$, $\operatorname{ord} \mathcal{J}_{qj} = -\sigma_q - 1 + t_j$.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, D_x)u(x) &= f(x), x \in G, \\ \mathcal{B}(x, D_x)u(x) &= g(x), x \in \partial G \setminus M, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $u = (u_1, \dots, u_k)$, $f = (f_1, \dots, f_k)$, $g = (g_1, \dots, g_m)$. Предположим, что оператор $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}$ этой задачи эллиптический на $\bar{G} \setminus M$, и опишем дополнительные требования к оператору в точках ребра M. Пусть $(y, z) \in \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d$ — локальные координаты в окрестности $\mathcal{U}$ и (r, ω) — сферические координаты точки y. Запишем элементы матриц $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ в координатах (r, ω, z):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ij}(x, D_x) &= r^{-t_i - t_j} \mathbb{L}_{ij}(r, \omega, z, rD_r, D_\omega, rD_z), \\ \mathcal{B}_{qj}(x, D_x) &= r^{-\sigma_q - t_j} \mathbb{B}_{qj}(r, \omega, z, rD_r, D_\omega, rD_z). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Предположим, что коэффициенты операторов $\mathbb{L}_{ij}$ и $\mathbb{B}_{qj}$ (т.е. коэффициенты полиномов от rD_r, D_ω, rD_z) принадлежат $C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+ \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^d)$. Введем задачу

$$\begin{aligned} L^\circ(y, D_y, D_z)u(y, z) &= f(y, z), (y, z) \in \mathbb{D} = \mathbb{K} \times \mathbb{R}^d, \\ B^\circ(y, D_y, D_z)u(y, z) &= g(y, z), (y, z) \in \partial\mathbb{D} \setminus \Gamma, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\Gamma = 0 \times \mathbb{R}^d$ — ребро клина $\mathbb{D}$, а матрицы L° и B° составлены из главных частей операторов (1.2) в точке $\varkappa(z^\circ) = 0$, т.е. $L^\circ(y, D_y, D_z) = r^{-t_i - t_j} \mathbb{L}_{ij}(0, \omega, 0, rD_r, D_\omega, rD_z)$ и т.п. Упомянутые требования в точках ребра заключаются в эллиптичности задачи (1.4) на $\bar{\mathbb{D}} \setminus \Gamma$.

Будем считать, что можно так выбрать покрытие $\{\mathcal{U}_p\}$ окрестности ребра M, что операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$, записанные в локальных координатах каждой карты, имеют на Γ главные части с коэффициентами, не зависящими от $z \in \mathbb{R}^d$.

Кроме общей задачи (1.1), мы отдельно будем обсуждать ее специальный вариант, возникающий во многих приложениях. Допустим, что имеет место формула Грина вида

$$(\mathcal{L}u, v)_G + (\mathcal{N}u, \mathcal{D}v)_{\partial G} = a(u, v; G), \tag{1.5}$$

в которой $\mathcal{N}$ и $\mathcal{D}$ — $m \times k$-матрицы дифференциальных операторов, причем $\mathcal{D}$ — система Дирихле на $\partial G \setminus M$ (см. [5,6]), а $a(\cdot, \cdot; G)$ — симметрическая билинейная форма

$$a(u, v; G) = \sum_{i,j=1}^{k} \sum_{|\alpha| \leqslant t_j} \sum_{|\sigma| \leqslant t_i} (a_{ij}^{\sigma\alpha} D_x^\alpha u_j, D_x^\sigma v_i)_G. \tag{1.6}$$

Строки $\mathcal{B}_q$ и $\mathcal{T}_q$ матриц $\mathcal{B}$ и $\mathcal{T}$ выберем одним из двух способов:

$$\mathcal{B}_q = \mathcal{N}_q, \mathcal{T}_q = \mathcal{D}_q \quad \text{или} \quad \mathcal{B}_q = \mathcal{D}_q, \mathcal{T}_q = -\mathcal{N}_q; \tag{1.7}$$

таким образом, матрица $\mathcal{B}$ составляется из некоторых строк матриц $\mathcal{D}$ и $\mathcal{N}$. В силу соотношений (1.7) и симметричности формы (1.6) равенство (1.5) влечет формулу Грина (1.1).

2. Модельная задача в конусе и операторный пучок. Применим к уравнениям (1.4) преобразование Фурье $\mathcal{F}_{z\to\xi}$ и положим

$$\eta = |\xi|y, \theta = |\xi|^{-1}\xi, U_j(\eta,\xi) = |\xi|^{t_j}\hat{u}_j(y,\xi),$$
$$F_i(\eta,\xi) = |\xi|^{-t_i}\hat{f}_i(y,\xi), G_q(\eta,\xi) = |\xi|^{-\sigma_q}\hat{g}_q(y,\xi); \tag{1.8}$$

здесь $\hat{w}(y,\cdot)$ — образ Фурье функции $z \mapsto w(y,z)$. Тогда из (1.4) получится модельная задача в конусе

$$L^\circ(\eta, D_\eta, \theta)U(\eta,\xi) = F(\eta,\xi), \eta \in \mathbb{K},$$
$$B^\circ(\eta, D_\eta, \theta)U(\eta,\xi) = G(\eta,\xi), \eta \in \partial\mathbb{K}\setminus 0. \tag{1.9}$$

Можно показать, что из равенства (1.5) вытекает формула Грина

$$(L^\circ u, v)_{\mathbb{D}} + (N^\circ u, D^\circ v)_{\partial\mathbb{D}} = a^\circ(u, v; \mathbb{D}) \tag{1.10}$$

для задачи (1.4), а затем и формула

$$(L^\circ(\eta, D_\eta, \theta)U, V)_{\mathbb{K}} + (N^\circ(\eta, D_\eta, \theta)U, D^\circ(\eta, D_\eta, \theta)V)_{\partial\mathbb{K}} = a^\circ_\theta(U, V; \mathbb{K}) \tag{1.11}$$

для задачи (1.9). Заметим, что симметрическая форма a° из (1.10) имеет вид

$$a^\circ(u, v; \mathbb{D}) = \sum_{i,j=1}^{k} \sum_{|\alpha|\leqslant t_j} \sum_{|\sigma|\leqslant t_i} (r^{|\alpha|-t_j} \overset{\circ}{\mathbf{a}}{}^{\alpha,\sigma}_{ij}(\omega) D_y^{\alpha'} D_z^{\alpha''} u,$$
$$r^{|\sigma|-t_i} D_y^{\sigma'} D_z^{\sigma''} v_i)_{\mathbb{D}}, \tag{1.12}$$

где $\overset{\circ}{\mathbf{a}}{}^{\alpha,\sigma}_{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-d})$, $\alpha'' = (\alpha_{n-d+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $r = |y|$. Наконец, из (1.1) следует формула Грина в конусе $\mathbb{K}$ при всех $\theta \in S^{d-1}$

$$(L^\circ(\theta)U, V)_{\mathbb{K}} + (B^\circ(\theta)U, T^\circ(\theta)V)_{\partial\mathbb{K}} - (U, L^\circ(\theta)V)_{\mathbb{K}} - (T^\circ(\theta)U, B^\circ(\theta)V)_{\partial\mathbb{K}} = 0; \tag{1.13}$$

здесь $L^\circ(\theta) = L^\circ(\eta, D_\eta, \theta)$ и т.п.

Введем еще операторный пучок $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \mathfrak{A}(\lambda)$,

$$\mathfrak{A}(\lambda) = \{\|\mathbb{L}_{ij}(0, \omega, 0, \lambda - it_j, D_\omega, 0)\|, \|\mathbb{B}_{qj}(0, \omega, 0, \lambda - it_j, D_\omega 0)\|\}. \tag{1.14}$$

Известно, что λ-спектр пучка $\mathfrak{A}$ состоит из нормальных собственных значений; они расположены, кроме, быть может, конечного числа, в двойном угле $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\,\lambda| > c|\mathrm{Re}\,\lambda|\}$, $c > 0$. Ввиду формальной самосопряженности задачи $\{L^\circ(0), B^\circ(0)\}$ спектр $\mathfrak{A}$ оказывается симметричным относительно прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,\lambda = (n-d)/2\}$. Пусть $\lambda_{\nu^\circ+1}, \lambda_{\nu^\circ+2}, \ldots$ — все собственные числа пучка, расположенные ниже этой прямой, причем $\mathrm{Im}\,\lambda_\nu \geqslant \mathrm{Im}\,\lambda_{\nu+1}$. Собственное число, симметричное для λ_ν относительно прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$, обозначим $\lambda_{-\nu}$. Наконец, $\lambda_{-\nu^\circ}, \dots, \lambda_{\nu^\circ}$ — все собственные значения пучка $\mathfrak{A}$, для которых $\operatorname{Im}\lambda_\nu = (n-d)/2$ (если прямая содержит четное количество собственных значений, то в последнем списке отсутствует λ_0).

Пусть

$$\{\varphi_\nu^{0,\tau}, \dots, \varphi_\nu^{\varkappa_{\tau\nu}-1,\tau} : \tau = 1, \dots, J_\nu \equiv \dim\ker \mathfrak{A}(\lambda_\nu)\}$$

— каноническая система жордановых цепочек, отвечающая числу λ_ν. Вектор-функции

$$U_\nu^{\sigma\tau}(y) = \|r^{i\lambda_\nu + t_j} \sum_{p=0}^{\sigma} \frac{1}{p!}(i\ln r)^p(\varphi_\nu^{\sigma-p,\tau})_j(\omega)\|_{j=1}^k \tag{1.15}$$

удовлетворяют задаче $\{L^\circ(0), B^\circ(0)\}U = 0$ в конусе $\mathbb{K}$. Обозначим через $q^\circ(U,V)$ левую часть формулы (1.13), в которой положим $\theta = 0$. Если, например, $U, V \in C_c^\infty(\bar{\mathbb{K}}\backslash 0)^k$, то $q^\circ(U,V) = 0$. Пусть $\chi \in C_c^\infty(\bar{\mathbb{K}}\backslash 0)$ и $\chi = 1$ вблизи вершины конуса. Для решений U, V однородной задачи $\{L^\circ(0), B^\circ(0)\}U = 0$ в $\mathbb{K}$ имеет смысл выражение $q^\circ(\chi U, V)$.

Предложение 1.1 (*см.* § 1.2, 5.2, [3]). *Жордановы цепочки* $\{\varphi_\nu^{\sigma\tau}\}$ *можно выбрать так, чтобы выполнялись условия*

1°) *если* $|\nu|, |h| > \nu^\circ$, *то*

$$q^\circ(\chi U_\nu^{\sigma\tau}, U_h^{pj}) = i\delta_{-\nu,h}\delta_{\tau,j}\delta_{\varkappa_{\tau\nu}-1-\sigma,p}; \tag{1.16}$$

2°) *если* $|\nu|, |h| \leqslant \nu^\circ$, *то*

$$q^\circ(\chi U_\nu^{\sigma\tau}, U_h^{pj}) = \pm i\delta_{\nu,h}\delta_{\tau,j}\delta_{\varkappa_{\tau\nu}-1-\sigma,p}, \tag{1.17}$$

причем знак зависит от номеров ν, τ *(его нельзя выбрать произвольно).*

Наконец, если $|\nu| \leqslant \nu^\circ$ *и* $|h| > \nu^\circ$, *то* $q^\circ(\chi U_\nu^{\sigma\tau}, U_h^{pj}) = 0$ *при любых значениях остальных индексов и любом выборе жордановых цепочек.*

3. О специальном классе задач. Обратимся к задачам, которым по формуле (1.5) сопоставлена билинейная форма (1.6). Предположим, что соответствующая билинейная форма (1.12) в клине $\mathbb{D}$ обладает следующим свойством:

$$a^\circ(u, u; \Xi) = 0, L^\circ u = 0 \quad \text{на} \quad \Xi \Rightarrow u \in \Pi/\Xi; \tag{1.18}$$

здесь Ξ — любая область в $\mathbb{D}$ такая, что $\bar{\Xi} \subset \tilde{\mathbb{D}}\backslash\Gamma$, Π — конечномерный линеал полиномов от $x \in \mathbb{R}^n$ с коэффициентами из $\mathbb{C}^k$. Кроме формы (1.12), нам понадобится еще и билинейная форма a_θ° из (1.11). В [2,3] установлено, что условие (1.18) влечет следующее свойство: если $a_\theta^\circ(U, U; \mathbb{K}) = 0$ и $L^\circ(\theta)U = 0$ в $\mathbb{K}$, то $U = 0$.

Пример 1.2. *Система Стокса.* Пусть $u = (u_1, u_2, u_3, p_u)$, где $u' = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости и p_u — давление в потоке жидкости. Оператор системы Стокса (уравнения равновесия и условие несжимаемости) имеет вид

$$Lu = \left\| \begin{matrix} -\operatorname{div}\operatorname{grad} u' + \operatorname{grad} p_u \\ \operatorname{div} u' \end{matrix} \right\|.$$

Для векторов $u = (u', p_u)$ и $v = (v', p_v)$ при соленоидальных скоростях u' и v' имеет место формула Грина (1.10), в которой

$$a^\circ(u, u; \Xi) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\Xi} |\mathrm{grad}\, u_j|^2 dx.$$

(Подчеркнем, что само условие (1.18) применительно к системе Стокса содержит это требование соленоидальности). Линеал Π из (1.18) одномерный, $\Pi = \{(0, 0, 0, \mathrm{const})\}$.

Пример 1.3. *Система Ламе.* Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений в упругом изотропном однородном теле G,

$$\sigma_{jk}(u) = \mu\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) + \delta_{j,k}\lambda \mathrm{div}\, u$$

— декартовы компоненты тензора напряжений $\sigma(u)$; λ и μ — коэффициенты Ламе. Уравнения равновесия записываются в виде

$$Lu \equiv -\mu \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, u - (\lambda + \mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, u) = f,$$

где f — вектор массовых сил. Форму (1.12) определим равенством

$$a^\circ(u, u; \Xi) = \frac{1}{\mu} \int_{\Xi} \sum_{j,k=1}^{3} \{|\sigma_{jk}(u)|^2 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{jj}(u)\overline{\sigma_{kk}(u)}\} dx$$

(удвоенная упругая энергия). Так как $\mu > 0$ и $\lambda \geqslant 0$, то

$$a^\circ(u, u; \Xi) \geqslant (3\mu)^{-1} \int_{\Xi} \sum_{j,k=1}^{3} |\sigma_{jk}(u)|^2 dx.$$

Кроме того, равенство $\sigma(u) = 0$ означает, что $u(x) = b + c \times x$ — жесткое смещение (b и c — постоянные векторы). Таким образом, условие (1.18) выполнено.

Предложение 1.4 (*см.* [2,3]). *Пусть справедливо требование* (1.18). *Тогда*

1°. *Собственным значением на прямой* $\mathbb{R} + i(n - d)/2$ *пучка* $\mathfrak{A}$ *может быть разве лишь число* $\lambda_0 = i(n - d)/2$.

2°. *Подпространство* $\ker \mathfrak{A}(\lambda_0)$ *состоит из следов на* $\Omega \subset S^{n-d-1}$ *тех полиномов* $p = (p_1, \ldots, p_k)$ *из* Π, *которые удовлетворяют условиям:* p *не зависит от переменных* $z \in \mathbb{R}^d$; $B^\circ(y, D_y, 0)p(y) = 0$, $y \in \partial\mathbb{K}\backslash 0$; $\mathrm{ord}\, p_j = t_j + (d - n)/2$, $j = 1, \ldots, k$. (*Если таким условиям подчиняется лишь нулевой полином, как, например, в случае нечетного* $n - d$ *или при* $2 \max t_j \leqslant n - d$, *то прямая* $\mathbb{R} + i(n - d)/2$ *свободна от спектра пучка* $\mathfrak{A}$). *Каждый собственный вектор* $\varphi_0^{0,1}, \ldots, \varphi_0^{0,j_0}$ *имеет присоединенный, и нет жордановых цепочек с длиной, большей* 2.

3°. *Если* $a^\circ(U, U; \Xi) \geqslant 0$ *для всех* $U \in C^\infty(\bar{\Xi})^k$ (*такова форма* a° *в примерах* 1.2, 1.3), *то в* (1.17) *не может появиться знак „-“.*

4. Функциональные пространства. В этом разделе вводятся пространства, в которых будут рассматриваться операторы перечисленных ранее краевых задач. Пространство $V^l_\beta(G)$ определим как пополнение множества $C^\infty_c(\bar{G}\backslash M)$ по норме

$$\|u; V^l_\beta(G)\| = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant l} \|r^{\beta-l+|\alpha|} D^\alpha_x u; L_2(G)\|^2\Big)^{1/2}, \tag{1.19}$$

где $l = 0, 1, \dots, \beta \in \mathbb{R}$, $r = \operatorname{dist}(x, M)$. Пусть $V^{l-1/2}_\beta(\partial G)(l = 1, 2, \dots)$ — пространство следов на $\partial G\backslash M$ функций из $V^l_\beta(G)$. Отображение

$$\mathcal{A}_{l\beta} = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\} : \mathcal{D}^l_\beta V(G) \to \mathcal{R}^l_\beta V(G) \tag{1.20}$$

непрерывно; здесь $l \geqslant \max\{t_i, \sigma_q + 1\}$,

$$\mathcal{D}^l_\beta V(G) = \prod_{j=1}^{k} V^{l-t_j}_\beta(G),$$

$$\mathcal{R}^l_\beta V(G) = \prod_{i=1}^{k} V^{l-t_i}_\beta(G) \times \prod_{q=1}^{m} V^{l-\sigma_q-1/2}_\beta(\partial G). \tag{1.21}$$

В конусе $\mathbb{K}$ определим пространство $E^l_\beta(\mathbb{K})$ с нормой

$$\|W; E^l_\beta(\mathbb{K})\| = \Big(\sum_{|\alpha|\leqslant l} \|(1 + |\eta|^{|\alpha|-l})|\eta|^\beta D^\alpha_\eta W; L_2(\mathbb{K})\|^2\Big)^{1/2}. \tag{1.22}$$

Очевидный смысл имеют обозначения $\mathcal{D}^l_\beta E(\mathbb{K})$ и $\mathcal{R}^l_\beta E(\mathbb{K})$ (см. (1.21)). Оператор

$$A^\circ_{l\beta}(\theta) : \mathcal{D}^l_\beta E(\mathbb{K}) \to \mathcal{R}^l_\beta E(\mathbb{K}) \tag{1.23}$$

задачи (1.9) непрерывен.

§ 2. Задача в конусе с условиями излучения

Оператор (1.20) задачи (1.2) фредгольмов лишь при условии, что отображение (1.23) — изоморфизм. Класс задач, введенный в п.1.3, допускает полное исследование с этой точки зрения. В частности, выясняется, что изоморфность оператора (1.23) не всегда обеспечивается выбором числа β; иными словами, шкала пространств $E^l_\beta(\mathbb{K})$ может оказаться неподходящей. Последнее обстоятельство и заставляет изменить постановку задачи за счет добавления условий излучения. Для общих самосопряженных задач (без свойства (1.18)) постановка, связанная с условиями излучения, сохраняется при некотором дополнительном предположении.

1. Ядро и коядро оператора $A^\circ_{l\beta}(\theta)$.

Предложение 2.1. *Пусть выполнено требование* (1.18).

1°. *Если прямая* $\mathbb{R}+i(n-d)/2$ *свободна от спектра пучка* (1.14), *то оператор* $A^\circ_{l\beta}(\theta)$ *из* (1.23) *является изоморфизмом для малых* $|\beta-l|$.

2°. *Пусть* $\lambda_0=i(n-d)/2$ — *собственное число пучка* $\mathfrak{A}$ (*в силу предложения* 1.4 *это единственная точка спектра на прямой* $\mathbb{R}+i(n-d)/2$). *Если* $\beta<l$ *и число* $l-\beta$ *мало, то* $A^\circ_{l\beta}(\theta)$ *фредгольмов и*

$$\dim\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)=0,\quad \dim\operatorname{coker} A^\circ_{l\beta}(\theta)=J_0;\tag{2.1}$$

здесь $J_0=\dim\ker\mathfrak{A}(\lambda_0)$. *Если же* $\beta>0$ *и число* $\beta-l$ *мало, то* $A^\circ_{l\beta}(\theta)$ *фредгольмов и*

$$\dim\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)=J_0,\dim\operatorname{coker} A^\circ_{l\beta}(\theta)=0.\tag{2.2}$$

Доказательство. Известно (см., например, [7] или § 6.2, [3]), что при отсутствии на прямой $\mathbb{R}+i(\beta-l+(n-d)/2)$ собственных чисел пучка (1.14) оператор $A^\circ_{l\beta}(\theta)$ является фредгольмовым. Таким образом, согласно свойствам спектра, указанным в § 1, $A^\circ_{l\beta}(\theta)$ — фредгольмов оператор в условиях предложения 1.1. Из формальной самосопряженности задачи (см. (1.13)) вытекает, что

$$\operatorname{coker} A^\circ_{l\beta}(\theta)=\{(v,T^\circ(\theta)v)\in\mathcal{R}^l_\beta V(G)^*:v\in\ker A^\circ_{l,2l-\beta}(\theta)\}\tag{2.3}$$

(см. доказательство предложения 4.3.8 в [3]). В частности, в условиях первой части предложения

$$\operatorname{Ind} A^\circ_{ll}(\theta)\equiv\dim\ker A^\circ_{ll}(\theta)-\dim\operatorname{coker} A^\circ_{ll}(\theta)=0$$

и равенство $\operatorname{Ind} A^\circ_{l\beta}(\theta)=0$ сохраняется для малых $|\beta-l|$ ввиду устойчивости индекса (см. п.6.2.7, [3]). Теперь утверждение 1° вытекает из леммы, содержащейся в [2, 3]:

Лемма 2.2. *Если выполнено требование* (1.18), *то* $\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)=0$ *при* $\beta\leqslant l$.

Проверим 2°. Согласно п.4.3.3 [3] справедливо равенство

$$\operatorname{Ind} A^\circ_{l,l+\varepsilon}(\theta)-\operatorname{Ind} A^\circ_{l,l-\varepsilon}(\theta)=\varkappa^\circ,\tag{2.4}$$

где ε — малое положительное число, а $\varkappa^\circ=2J_0$ — полная алгебраическая кратность собственного значения λ_0 (см. предложение 1.4 (2°)). Поэтому утверждение 2° вытекает из леммы 2.2 и формул (2.3) и (2.4). •

Обратимся к общим (без условия (1.18)) самосопряженным задачам. Выберем число $\gamma<l$ так, чтобы прямая $\mathbb{R}+i(\gamma-l+(n-d)/2)$ не содержала точек спектра пучка (1.14). Тогда и прямая $\mathbb{R}+i(\beta-l+(n-d)/2)$, где $\beta=2l-\gamma$, также свободна от спектра. Обозначим через $\varkappa$ сумму полных алгебраических кратностей всех собственных чисел $\lambda_{-N},\dots,\lambda_N$ пучка $\mathfrak{A}$, расположенных между указанными прямыми.

Предложение 2.3. *Число $\varkappa$ четное, и верна формула*

$$\dim\ker A^\circ_{l\beta}(\theta) = \dim\operatorname{coker} A^\circ_{l\gamma} = \delta + \varkappa/2, \tag{2.5}$$

где $\delta = \dim\ker A^\circ_{l\gamma}(\theta)$. (*В частности,* $\operatorname{Ind} A^\circ_{l\beta}(\theta) = -\operatorname{Ind} A^\circ_{l\gamma}(\theta) = \varkappa/2$).

Доказательство получается применением соотношений (2.3), (2.4), которые сохраняются и в рассматриваемом случае. •

Теперь введем главное дополнительное предположение относительно задачи (1.9). Будем считать, что существует число γ, для которого оператор $A^\circ_{l\gamma}(\theta)$ из (1.23) — мономорфизм при всех $\theta \in S^{d-1}$. Тогда из формулы (2.3) вытекает, что $A^\circ_{l\beta}(\theta)$ — эпиморфизм. Кроме того, согласно (2.5) имеем

$$\dim\ker A^\circ_{l\beta}(\theta) = \dim\operatorname{coker} A^\circ_{l\gamma}(\theta) = \varkappa/2 \equiv T. \tag{2.6}$$

Число β и γ подчиним еще неравенству $\beta-\gamma<1$. Это допущение избавляет от некоторых технических хлопот, связанных с описанием асимптотики; оно не является принципиальным.

2. Волны. Условия излучения. Обозначим через $\mathfrak{D}$ пространство функций, представимых в виде

$$U = U^\circ + \sum_{\nu=-N}^{N}\sum_{\tau=1}^{J_\nu}\sum_{\sigma=0}^{\varkappa_{\tau\nu}-1} c_\nu^{\sigma\tau}\chi U_\nu^{\sigma\tau}, \tag{2.7}$$

где $U^\circ \in \mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K})$, $U_\nu^{\sigma\tau}$ — функции (1.15), $c_\nu^{\sigma\tau}$ — произвольные постоянные коэффициенты; наконец, χ — гладкая неотрицательная функция, равная 1 вблизи точки $\eta = 0$ и быстро стремящаяся к 0 на бесконечности. В $\mathfrak{D}$ введем норму

$$\|U;\mathfrak{D}\| = (\|U^\circ;\mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K})\|^2 + \sum_{\nu,\tau,\sigma}|c_\nu^{\sigma\tau}|^2)^{1/2}; \tag{2.8}$$

при замене χ другой подобной функцией получается эквивалентная норма. Положим $\mathcal{W} = \mathfrak{D}/\mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K})$ и элементы фактор-пространства $\mathcal{W}$ назовем $A^\circ(\theta)$-волнами (или, короче, волнами). Ясно, что $\dim\mathcal{W} = \varkappa$. Пусть еще $\pi : \mathfrak{D} \to \mathcal{W}$ — проекция; будем писать иногда ${}^\bullet U$ вместо πU.

Билинейную форму, совпадающую с левой частью (1.13), обозначим через $q^\circ(U,V;\theta)$. Поскольку оператор $A^\circ(\theta)$ отображает (непрерывно) пространство $\mathfrak{D}$ в $\mathcal{R}^l_\gamma E(\mathbb{K})$, то форма q° определена на $\mathfrak{D}\times\mathfrak{D}$ и аннулируется, если хотя бы одна из функций U или V принадлежит пространству $\mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K})$. Таким образом, форму q° можно считать заданной на $\mathcal{W}\times\mathcal{W}$. Очевидно, что $q^\circ(U,V;\theta) = -\overline{q^\circ(V,U;\theta)}$ и $q^\circ(U,U;\theta) \in i\mathbb{R}$.

Волна ${}^\bullet U$ называется приходящей (уходящей), если $\operatorname{Im} q^\circ(U,U;\theta) > 0$ ($\operatorname{Im} q^\circ(U,U;\theta) < 0$). Известно [3,8], что в пространстве $\mathcal{W}$ можно ввести базис

$${}^\bullet U_1^+,\dots,{}^\bullet U_T^+,{}^\bullet U_1^-,\dots,{}^\bullet U_T^-,$$

подчиненный условиям

$$q^\circ(U_j^\pm, U_h^\pm; \theta) = \pm i\delta_{j,n}, q^\circ U_j^\pm, U_h^{mp}; \theta) = 0, j, h = 1, \dots, T \tag{2.9}$$

(т.е. ${}^\bullet U_j^+$ — приходящие, а ${}^\bullet U_j^-$ — уходящие волны). Опишем процедуру, позволяющую по жордановым цепочкам пучка $\mathfrak{A}$ построить такой базис.

Пусть сначала $|\nu| > \nu^\circ$, т.е. речь идет о тех собственных числах из множества $\{\lambda_{-N}, \dots, \lambda_N\}$, которые не лежат на прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$. Каждая пара $U_\nu^{\sigma\tau}$ и $U_{-\nu}^{\varkappa_{\tau\nu}-1-\sigma,\tau}$ определяет две волны

$$\pi(\chi 2^{-1/2}(U_\nu^{\sigma\tau} \pm U_{-\nu}^{\varkappa_{\tau\nu}-1-\sigma,\tau})); \tag{2.10}$$

в силу (1.16) волна (2.10) является приходящей (уходящей), если выбрать знак „+“ (знак „—“). Пусть теперь $|\nu| \leqslant \nu^\circ$. Если $\varkappa_{\tau\nu} = 2m$ — четное число, то соответствующая жорданова цепочка порождает волны

$$\pi(\chi 2^{-1/2}(U_\nu^{\sigma\tau} \pm \alpha(\tau,\nu) U_\nu^{\varkappa_{\tau\nu}-1-\sigma,\tau})), \quad \sigma = 0, \dots, m-1, \tag{2.11}$$

где $\alpha(\tau,\nu)$ — знак из формулы (1.17). Как и раньше, плюс в формуле (2.11) отвечает приходящей волне, а минус — уходящей. Наконец, для $\varkappa_{\tau\nu} = 2m+1$ формула (2.11) по-прежнему задает $2m$ волн; еще одна волна $\pi\chi U_\nu^{m\tau}$ оказывается приходящей в случае $\alpha(\tau,\nu) = +1$ и уходящей при $\alpha(\tau,\nu) = -1$. Формулы (2.9) для определенных таким образом волн вытекают из соотношений (1.16) и (1.17). Итак, построен базис, каждый элемент которого является либо приходящей, либо уходящей волной. Согласно теореме 5.3.2 [3], всякий такой базис содержит поровну уходящих и приходящих волн.

Фиксируем какой-нибудь базис ${}^\bullet U_1^+, \dots, {}^\bullet U_T^+, {}^\bullet U_1^-, \dots, {}^\bullet U_T^-$. Подпространство, натянутое на приходящие волны, обозначим через $\mathcal{W}^+$, а на уходящие — через $\mathcal{W}^-$. В следующей теореме утверждается однозначная разрешимость с „естественными“ условиями излучения $\pi U \in \mathcal{W}^-$.

Теорема 2.4. *Для любой правой части $\{F, G\} \in \mathcal{R}_\gamma^l E(\mathbb{K})$ задачи (1.9) существует единственное решение $U \in \mathfrak{D}$ такое, что $\pi U \in \mathcal{W}^-$; справедлива оценка*

$$\|U; \mathfrak{D}\| \leqslant c\|\{F,G\}; \mathcal{R}_\gamma^l E(\mathbb{K})\|. \tag{2.12}$$

Доказательство по существу повторяет проверку теоремы 5.3.5 [3]; при этом учитывается, что $\dim\ker A_{l\gamma}^\circ(\theta) = 0$. •

Следующее утверждение доказано в § 5.3 [3].

Теорема 2.5. *В ядре оператора $A_{l\beta}^\circ(\theta)$ базис $\zeta_1(\theta), \dots, \zeta_T(\theta)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись включения*

$$\zeta_j(\theta) - U_j^+ - \sum_{k=1}^T s_{jk}(\theta) U_k^- \in \mathcal{D}_\gamma^l E(\mathbb{K}). \tag{2.13}$$

Матрица $s(\theta) = \|s_{jk}(\theta)\|$, называемая матрицей рассеяния, является унитарной.

Замечание 2.6. *Предложение о мономорфности оператора $A^\circ_{l\gamma}(\theta)$ не обязательно для определения матрицы $s(\theta)$. Если ядро $A^\circ_{l\gamma}(\theta)$ нетривиально, то под $\zeta_1(\theta),\dots,\zeta_T(\theta)$ следует понимать базис в прямом дополнении подпространства*

$$\ker A^\circ_{l\gamma}(\theta) \quad \text{до} \quad \ker A^\circ_{l\beta}(\theta).$$

Кроме того, с точностью до слагаемого из $\mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K})$ решение U задачи (1.9) *с условием $\pi U \in \mathcal{W}^-$ определено однозначно.*

Коническая точка заменой переменной $\rho = |\eta| \mapsto t = -\ln\rho$ превращается в „цилиндрический выход“ на бесконечность. Если этот выход интерпретировать как волновод, то данное здесь определение приходящих и уходящих волн согласуется с классическим (в ситуациях, где классические определения применимы, см. [3,8]). Этим обстоятельством и объясняется использование физической терминологии.

При наличии свойства (1.18) у формы (1.12) можно привлечь другие физические аналогии, связанные с энергетическими соображениями, что приводит к понятию матрицы поляризации. С этой целью выбираются новые базисы в пространствах $\mathcal{W}$ и $\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)$. Согласно предложению 1.4 прямая $\mathbb{R}+i(n-d)/2$ содержит разве лишь одно собственное число $\lambda_0 = i(n-d)/2$ пучка $\mathfrak{A}$; числа $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ лежат ниже прямой, а $\lambda_{-1},\dots,\lambda_{-N}$ — выше. Введем базис ${}^\bullet V^e_1,\dots,{}^\bullet V^e_T, {}^\bullet V^n_1,\dots,{}^\bullet V^n_T$ („энергетические“ и „неэнергетические“ волны); к первым отнесем волны с представителями $\chi U^{\sigma\tau}_\nu$, где $\nu = 1,\dots,N$, $\tau = 1,\dots,J_\nu$, $\sigma = 0,\dots,\varkappa_{\tau\nu}-1$ или $\nu = 0$, $\tau = 1,\dots,J_0$, $\sigma = 0$. Волны с оставшимися представителями отнесем к типу „неэнергетических“, причем представителями волн ${}^\bullet V^n_1,\dots,{}^\bullet V^n_T$ назначим функции $\chi U^{\sigma\tau}_\nu$ при $\nu = -1,\dots,-N$ и $\alpha(\tau,0)\chi U^{1,\tau}_0$ при $\nu = 0$; здесь $\alpha(\tau,\nu)$ — знак в формуле (1.17). Учитывая, что возможны лишь случаи $\varkappa_{\tau 0} = 0$ или $\varkappa_{\tau 0} = 2$ (предложение 1.4) и что спектр пучка $\mathfrak{A}$ симметричен относительно прямой $\mathbb{R}+i(n-d)/2$, получаем одинаковое количество волн в классах „e“ и „n“. Отметим, что $a^\circ_\theta(V^e_j, V^e_j; \mathbb{K}) < \infty$ для $j = 1,\dots,T$, а интегралы $a^\circ_\theta(V^n_j, V^n_j; \mathbb{K})$ расходятся из-за особенности в вершине конуса. В силу предложения 1.1 нумерацию элементов базиса можно выбрать так, чтобы $q^\circ(V^e_j, V^e_h) \neq 0$ лишь при $j = h$. Пусть $\mathcal{W}^e$ обозначает подпространство, натянутое на волны ${}^\bullet V^e_1,\dots,{}^\bullet V^e_T$.

Теорема 2.7. *Предположим, что выполнены условия* (1.18). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1°. *В ядре оператора $A^\circ_{l\beta}(\theta)$ базис $Z_1(\theta),\dots,Z_T(\theta)$ можно выбрать так, чтобы выполнялись включения*

$$Z_j(\theta) - V^n_j + i\sum_{k=1}^{T} m_{jk}(\theta)V^e_k \in \mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K}). \tag{2.14}$$

Матрица $m(\theta) = \|m_{jk}(\theta)\|$, называемая матрицей поляризации, является самосопряженной.

2°. *Для любой правой части* $\{F, G\} \in \mathcal{R}^l_\gamma E(\mathbb{K})$ *задачи* (1.9) *существует единственное решение* $U \in \mathfrak{D}$, *подчиненное условию* $\pi U \in \mathcal{W}_e$, *и верна оценка* (2.12).

Доказательство. 1°. Обозначим через $\zeta(\theta)$ столбец с элементами $\zeta_1(\theta), \dots, \zeta_T(\theta)$ (базис в $\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)$ из теоремы 2.5); кроме того, введем столбцы $U^\pm, V^e$ и V^n. Формулы (2.13) перепишем в виде

$$\pi\zeta(\theta) =^\bullet U^+ + s(\theta)^\bullet U^-, \tag{2.15}$$

где π — проекция: $\mathfrak{D} \to \mathcal{W}$. Будем считать, что элементы столбцов $U^\pm$ построены согласно (2.10) и (2.11) (в равенствах (2.11) в нашем случае $\nu = 0$ и $\varkappa_{\tau 0} = 2$). Тогда

$$U^\pm = 2^{-1/2}(V^e \pm V^n). \tag{2.16}$$

Сопоставляя (2.15) и (2.16), имеем

$$\begin{aligned} 2^{1/2}\pi\zeta(\theta) &= ({}^\bullet V^e +^\bullet V^n) + s(\theta)({}^\bullet V^e -^\bullet V^n) = \\ &= (\mathbb{I} - s(\theta))^\bullet V^n + (\mathbb{I} + s(\theta))^\bullet V^n. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Мы проверим далее, что матрица $\mathbb{I} - s(\theta)$ неособенная. Поэтому можно определить симметрическую матрицу

$$m(\theta) = i(\mathbb{I} + s(\theta))(\mathbb{I} - s(\theta))^{-1}. \tag{2.18}$$

В пространстве $\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)$ введем базис $Z_1(\theta), \dots, Z_T(\theta)$ равенством

$$Z(\theta) = 2^{1/2}(\mathbb{I} - s(\theta))^{-1}\zeta(\theta). \tag{2.19}$$

В результате (2.17) принимает вид

$$\pi Z(\theta) =^\bullet V^n - im(\theta)^\bullet V^e,$$

что совпадает с (2.14).

Теперь покажем, что матрица $\mathbb{I} - s(\theta)$ неособенная. Пусть $h = (h_1, \dots, h_T)$ — такая строка, что $h = hs(\theta)$. В силу (2.15), (2.16) для функции $u = h\zeta(\theta) = h_1\zeta_1(\theta) + \dots + h_T\zeta_T(\theta)$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \pi u &= h^\bullet U^+ + hs(\theta)^\bullet U^- = 2^{-1/2}\{h({}^\bullet V^e +^\bullet V^n) + hs(\theta)({}^\bullet V^e -^\bullet V^n)\} = \\ &= 2^{-1/2}\{(h + hs(\theta))^\bullet V^e + (h - hs(\theta))^\bullet V^n)\} = 2^{-1/2}h(\mathbb{I} + s(\theta))^\bullet V^e. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в асимптотику функции $u \in \mathfrak{D}$ входят представители лишь „энергетических“ волн. Поэтому в формулу Грина (1.11) можно подставить функции $U = V = u$. Левая часть (1.11) аннулируется благодаря равенству $\{L^\circ, B^\circ\}u = 0$ и условию (1.7). Значит, $a^\circ_\theta(u, u; \mathbb{K}) = 0$, и потому $u = 0$ (согласно сказанному после формулы (1.18)). Итак, $h \pm hs(\theta) = 0$, т.е. $h = 0$. Этим заканчивается проверка первого утверждения.

2°. В силу теоремы 2.4 существует решение V, для которого $\pi V \in \mathcal{W}^-$. В его асимптотику входят и представители „неэнергетических" волн. Вычитая из V подходящую линейную комбинацию $hZ(\theta)$ функций (2.14), получаем $\pi(V - hZ(\theta)) \in \mathcal{W}^e$. Функция $U = V - hZ(\theta)$ является нужным решением задачи (1.9). Единственность такого решения установлена в конце доказательства утверждения 1°. •

Понятие матрицы поляризации обобщает определение тензора поляризации, данное в [9] применительно к внешней задаче Дирихле для оператора Лапласа. Некоторые другие интегральные характеристики области — емкость, тензор виртуальной массы — также можно интерпретировать в терминах матрицы поляризации.

Замечание 2.8. *Из равенства* (2.18) *вытекает, что*

$$s(\theta) = (m(\theta) - i\mathbb{I})(m(\theta) + i\mathbb{I})^{-1},$$

т.е. матрица $s(\theta)$ *рассеяния есть преобразование Кэли матрицы* $m(\theta)$ *поляризации.*

3. О размерности ядра оператора $A^\circ_{l\sigma}(\theta)$. Скачок индекса $\operatorname{Ind} A^\circ_{l\sigma}(\theta) - \operatorname{Ind} A^\circ_{l\gamma}(\theta)$ описывается в терминах кратностей собственных чисел пучка $\mathfrak{A}$ (формула (2.4)). Оказывается, что разность

$$\dim\ker A^\circ_{l\sigma}(\theta) - \dim\ker A^\circ_{l\gamma}(\theta)$$

выражается в терминах спектра матрицы рассеяния.

Пусть $\gamma < \sigma < l$. Тривиальность ядра $A^\circ_{l\gamma}(\theta)$ в этом разделе не предполагается. Будем считать, что прямая $\mathbb{R} + i(\sigma - l + (n-d)/2)$ свободна от спектра $\mathfrak{A}$ и $\lambda_{\nu^1+1}, \lambda_{\nu^1+2}, \dots, \lambda_N$ — все собственные числа этого пучка, расположенные между прямыми $\mathbb{R} + i(\gamma - l + (n-d)/2)$ и $\mathbb{R} + i(\sigma - l + (n-d)/2)$. Пусть μ — сумма полных алгебраических кратностей указанных чисел и ${}^\bullet U_1^+, \dots, {}^\bullet U_T^+$, ${}^\bullet U_1^-, \dots, {}^\bullet U_T^-$ — базис в пространстве $\mathcal{W}$ волн, введенный по правилам (2.10) и (2.11). Примем, наконец, что ${}^\bullet U^\pm_{T-\mu+1}, \dots, {}^\bullet U^\pm_T$ суть волны, вычисленные по (2.10) для $\nu = \nu^1 + 1, \dots, N$.

Кроме $T \times T$-матрицы рассеяния $s(\theta)$ из формулы (2.13), рассмотрим еще $T' \times T'$-матрицу рассеяния $s'(\theta)$, определенную для базиса $\zeta_1'(\theta), \dots, \zeta'_{T'}(\theta)$ в дополнении подпространства $\ker A^\circ_{l\sigma}(\theta)$ до $\ker A^\circ_{l\sigma'}(\theta)$; здесь $\sigma' = 2l - \sigma$ и $T' = T - \mu$. В следующей теореме матрицы $s(\theta)$ и $s'(\theta)$ обозначаются еще и через $s(\theta;\gamma)$ и $s(\theta;\sigma)$ соответственно.

Теорема 2.9. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} &\dim\ker A^\circ_{l\sigma}(\theta) - \dim\ker A^\circ_{l\gamma}(\theta) = \\ &= -\{\dim\ker(s(\theta;\sigma) - \mathbb{I}) - \dim\ker(s(\theta;\gamma) - \mathbb{I})\}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

Доказательство. Вектор-столбец $U^{\pm} = (U_1^{\pm}, \dots, U_T^{\pm})^t$ и матрицу $s(\theta)$ запишем в виде

$$U^{\pm} = \left\| \begin{matrix} U^{(1)\pm} \\ U^{(2)\pm} \end{matrix} \right\|, \quad s(\theta) = \left\| \begin{matrix} s^{(1,1)}(\theta) & s^{(1,2)}(\theta) \\ s^{(2,1)}(\theta) & s^{(2,2)}(\theta) \end{matrix} \right\|,$$

где $U^{(1)\pm} = (U_1^{\pm}, \dots, U_{T'}^{\pm})^t$, $U^{(2)\pm} = (U\pm_{T'+1}, \dots, U_T^{\pm})^t$. Тогда формула (2.15) примет вид

$$\zeta^{(1)}(\theta) \equiv \{U^{(1)+} + s^{(1,1)}(\theta)U^{(1)-} + s^{(1,2)}(\theta)U^{(2)-}\} \mod \mathcal{D}_\gamma^l E(\mathbb{K}), \tag{2.21}$$

$$\zeta^{(2)}(\theta) \equiv \{U^{(2)+} + s^{(2,1)}(\theta)U^{(1)-} + s^{(2,2)}(\theta)U^{(2)-}\} \mod \mathcal{D}_\gamma^l E(\mathbb{K}). \tag{2.22}$$

Для $\zeta'(\theta) = (\zeta_1'(\theta), \dots, \zeta_{T'}'(\theta))^t$ имеет место аналогичное равенство

$$\zeta'(\theta) \equiv \{U^{(1)+} + s'(\theta)U^{(1)-}\} \mod \mathcal{D}_\sigma^l E(\mathbb{K}). \tag{2.23}$$

Согласно (2.3) и (2.4) справедлива формула

$$\begin{aligned} &\dim\ker A_{l\sigma}^\circ(\theta) - \dim\ker A_{l\gamma}^\circ(\theta) = \\ &= \operatorname{Ind} A_{l\sigma}^\circ(\theta) - \operatorname{Ind} A_{l\gamma}^\circ(\theta) + \dim\ker A_{l\sigma'}^\circ(\theta) - \dim\ker A_{l\beta}^\circ(\theta) = \\ &= \mu - \{\dim\ker A_{l\beta}^\circ(\theta) - \dim\ker A_{l\sigma'}^\circ(\theta)\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Вычислим величину Δ из фигурных скобок при дополнительном предположении, что $s^{(1,2)}(\theta) = 0$ (тогда и $s^{(2,1)}(\theta) = 0$ в силу унитарности матрицы $s(\theta)$). В этом случае $\zeta^{(1)} \equiv \zeta' \mod \mathcal{D}_\sigma^l E(\mathbb{K})$. Значит, Δ совпадает с количеством функций $\zeta_{T'+1}(\theta), \dots, \zeta_T(\theta)$ (компоненты вектора $\zeta^{(2)}(\theta)$ в (2.22)), линейно независимых по модулю пространства $\mathcal{D}_{\sigma'}^l E(\mathbb{K})$. Вспоминая определение (2.10) волн ${}^\bullet U_j^{\pm}$ (отвечающих собственным числам вне прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$), приходим к равенству $U^{(2)\pm} = 2^{-1/2}(V^{(2)e} \pm V^{(2)n})$ (истолкование обозначений очевидно). Отсюда и из (2.22) вытекает, что

$$\zeta^{(2)}(\theta) \equiv 2^{-1/2}(V^{(2)n} - s^{(2,2)}(\theta)V^{(2)n}) \mod \mathcal{D}_{\sigma'}^l E(\mathbb{K}). \tag{2.25}$$

Ясно, что $\Delta = \mu - \dim\ker(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))$; следовательно, ввиду блочно-диагональной структуры $s(\theta)$, верна формула (2.20).

Перейдем к рассмотрению общего случая.

Лемма 2.10. 1°. *Если $s^{(2,2)}(\theta)h = \pm h$, то $s^{(1,2)}(\theta)h = 0$.*

2°. *Если $hs^{(2,2)}(\theta) = \pm h$, то $hs^{(2,1)}(\theta) = 0$.*

Доказательство. Проверим, например, второе утверждение. Введем $\mu \times T$-матрицу $S(\theta) = \{s^{(2,1)}(\theta), s^{(2,2)}(\theta)\}$. Так как матрица $s(\theta)$ унитарная (строки взаимно ортогональны и нормированы), то $|hS(\theta)| = |h|$. С другой стороны, $hS(\theta) = \{hs^{(2,1)}(\theta), \pm h\}$, и потому $|hS(\theta)|^2 = |hs^{(2,1)}(\theta)|^2 + |h|^2$, т.е. $hs^{(2,1)}(\theta) = 0$. •

Лемма 2.11. *Матрица рассеяния $s'(\theta)$ выражается через блоки матрицы рассеяния $s(\theta)$ по формуле*

$$s'(\theta) = s^{(1,1)}(\theta) + s^{(1,2)}(\theta)(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))^{-1}s^{(2,1)}(\theta). \tag{2.26}$$

Вычитаемое определено однозначно и в случае, когда 1 — собственное число матрицы $s^{(2,2)}(\theta)$.

Доказательство. Вспоминая (2.10), перепишем (2.21) и (2.22) в виде

$$\zeta^{(1)}(\theta) \equiv \{U^{(1)+} + s^{(1,1)}(\theta)U^{(1)-} - 2^{-1/2}s^{(1,2)}(\theta)V^{(2)n}\} \mod \mathcal{D}^l_\sigma E(\mathbb{K}), \tag{2.27}$$

$$\zeta^{(2)}(\theta) \equiv \{2^{-1/2}(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))V^{(2)n} + s^{(2,1)}(\theta)U^{(1)-}\} \mod \mathcal{D}^l_\sigma E(\mathbb{K}). \tag{2.28}$$

Эти сравнения можно понимать как равенства в (конечномерном) фактор-пространстве. Класс с представителем $\zeta^{(2)}(\theta)$ падает в подпространство, на котором однозначно определен оператор $s^{(1,2)}(\theta)(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))^{-1}$ (лемма 2.10). Поэтому

$$\zeta^{(1)}(\theta) + s^{(1,2)}(\theta)(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))^{-1}\zeta^{(2)}(\theta) = \{U^{(1)+} + s^{(1,1)}(\theta)U^{(1)-} + \\ + s^{(1,2)}(\theta)(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))^{-1}s^{(2,1)}(\theta)U^{(1)-}\} \mod \mathcal{D}^l_\sigma E(\mathbb{K}). \tag{2.29}$$

Формула (2.29) определяет базис в фактор-пространство $\ker A^\circ_{l\sigma'}(\theta)/\mathcal{D}^l_\sigma E(\mathbb{K})$. Другой базис $\zeta' = (\zeta'_1, \dots, \zeta'_{T'})^t$ в том же пространстве фигурирует в (2.23). Части из приходящих волн одинаковые в этих базисах. Ввиду теоремы 2.4 (и замечания 2.6) отсюда получаем совпадение уходящих частей, т.е. равенство (2.26). •

Вернемся к доказательству теоремы 2.9. В силу (2.24) достаточно вычислить размерность фактор-пространства $\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)/\mathcal{D}^l_{\sigma'}E(\mathbb{K})$. Компоненты векторов $\zeta^{(1)} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{T'})^t$ и $\zeta^{(2)} = (\zeta_{T'+1}, \dots, \zeta_T)^t$ составляют базис в $\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)/\mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K})$. Кроме того, из (2.27)–(2.29) вытекает, что компоненты $\zeta^{(1)}(\theta)$ суть линейные комбинации компонент вектора $\zeta^{(2)}(\theta)$ по модулю $\mathcal{D}^l_{\sigma'}E(\mathbb{K})$. Так как $U^{(1)-} \in \mathcal{D}^l_{\sigma'}E(\mathbb{K})$, то в силу (2.28)

$$\dim\ker A^\circ_{l\beta}(\theta)/\mathcal{D}^l_{\sigma'}E(\mathbb{K}) = \mu - \dim\ker(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta)).$$

Осталось проверить равенство

$$\dim\ker(\mathbb{I} - s(\theta)) = \dim\ker(\mathbb{I} - s'(\theta)) + \dim\ker(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta)). \tag{2.30}$$

Пусть $h^{(2)} \in \ker(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))$; тогда $(0, h^{(2)})^t \in \ker(\mathbb{I} - s(\theta))$ по лемме 2.10 (1°). Если же $h^{(1)} \in \ker(\mathbb{I} - s'(\theta))$, то для вектора $h = (h^{(1)}, h^{(2)})^t$, где $h^{(2)} = (\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta))^{-1}s^{(2,1)}(\theta)h^{(1)}$, выполняется соотношение $s(\theta)h = h$. Таким образом, левая часть (2.30) не меньше правой. Установим противоположное неравенство. Пусть $(h^{(1)}, h^{(2)})^t \in \ker(\mathbb{I} - s(\theta))$, т.е.

$$\begin{aligned} &s^{(1,1)}(\theta)h^{(1)} + s^{(1,2)}(\theta)h^{(2)} = h^{(1)}, \\ &s^{(2,1)}(\theta)h^{(1)} + s^{(2,2)}(\theta)h^{(2)} = h^{(2)}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Если $h^{(1)} \neq 0$, то из равенства $s^{(1,2)}(\theta)h^{(2)} = s^{(1,2)}\theta(\mathbb{I}-s^{(2,2)}(\theta))^{-1}\, s^{(2,1)}(\theta)h^{(1)}$, первой строки системы (2.31) и формулы (2.26) вытекает, что $h^{(1)}$ — собственный вектор матрицы $s'(\theta)$, отвечающий собственному числу 1. В случае $h^{(1)} = 0$ вектор $h^{(2)}$ оказывается собственным для матрицы $s^{(2,2)}(\theta)$.

Следствие 2.12. *Пусть* $\ker A^{\circ}_{l\gamma}(\theta) = 0$ *и на прямой* $\mathbb{R} + i(n-2)/2$ *нет спектра пучка* $\mathfrak{A}$. *Тогда оператор* $A^{\circ}_{ll}(\theta)$ *оказывается изоморфизмом лишь при условии* $\dim\ker(\mathbb{I} - s(\theta)) = 0$.

4. Обобщенная формула Грина. Если в обычную формулу Грина (1.13) „подставить“ функции $u, v \in \mathfrak{D}$, то за счет асимптотических частей этих функций формула (1.13) нарушится, как видно из предложения 1.1. В терминах новой (обобщенной) формулы Грина можно переформулировать утверждения 2.4 и 2.7 (2°). Это окажется полезным далее при рассмотрении задачи в области с ребром.

Для того чтобы описать изменения формулы (1.13), уточним способ нумерации элементов базиса в пространстве W. Будем приписывать элементу с представителем χU_j^{kp} меньший номер, чем элементу с представителем $\chi U_\nu^{\sigma\tau}$, если $j < \nu$ или $j = \nu$, $p < \tau$ или $j = \nu$, $p = \tau$, $k < \sigma$. Так пронумерованный базис обозначим ${}^\bullet W_{-T}, \dots, {}^\bullet W_{-1}, {}^\bullet W_1, \dots, {}^\bullet W_T$. В силу равенств (1.16) и (1.17) формула Грина для $u, v \in \mathfrak{D}$ имеет вид

$$\begin{aligned} &(L^\circ(\theta)U, V)_{\mathbb{K}} + (B^\circ(\theta)U, T^\circ(\theta)V)_{\partial\mathbb{K}} - (U, L^\circ(\theta)V)_{\mathbb{K}} - \\ &-(T^\circ(\theta)U, B^\circ(\theta)V)_{\partial\mathbb{K}} = i\langle \mathbb{J}\pi U, \pi V\rangle_{2T}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

где $\langle , \rangle_{2T}$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{2T}$, а $\mathbb{J}$ — инволюция в $\mathbb{C}^{2T}$ с матрицей

$$\left\| \begin{matrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{J}(\mu) \\ \mathbb{O} & \mathcal{J} & \mathbb{O} \\ \mathbb{J}(\mu) & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{matrix} \right\|, \tag{2.33}$$

$\mathbb{J}(\mu)$ — антидиагональная матрица $\|\delta_{i,\mu-1-j}\|_{i,j=0}^{\mu-1}$, μ — сумма полных алгебраических кратностей собственных чисел $\lambda_{\nu^\circ+1}, \dots, \lambda_N$ пучка (1.14), $\mathcal{J}$ — блочно диагональная матрица

$$\begin{aligned} &\operatorname{diag}\{\alpha(1, -\nu^\circ)\mathbb{J}(\varkappa_{1,-\nu^\circ}), \dots, \alpha(J_{-\nu^\circ}, -\nu^\circ)\mathbb{J}(\varkappa_{J_{-\nu^\circ},-\nu^\circ}), \dots, \\ &\dots, \alpha(1, \nu^\circ)\mathbb{J}(\varkappa_{1,\nu^\circ}), \dots, \alpha(J_{\nu^\circ}, \nu^\circ)\mathbb{J}(\varkappa_{J_{\nu^\circ},\nu^\circ})\}; \end{aligned} \tag{2.34}$$

здесь, как и прежде, $\alpha(\tau, \nu)$ — знак из формулы (1.17).

Естественно переписать формулу (2.32) так, чтобы билинейные граничные формы, отвечающие конической поверхности $\partial\mathbb{K}\backslash 0$ и вершине конуса 0 (правая часть (2.32)), стали „равноправными". Именно, допустим, что существуют $T\times 2T$-матрицы $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$, $\mathfrak{T}^\circ(\theta)$, $\mathfrak{S}^\circ(\theta)$ и $\mathfrak{Q}^\circ(\theta)$, для которых

$$\begin{aligned}(L^\circ(\theta)U,V)_{\mathbb{K}}+(B^\circ(\theta),U,T^\circ(\theta)V)_{\partial\mathbb{K}}+\langle\mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi U,\mathfrak{T}^\circ(\theta)\pi V\rangle_T=\\=(U,L^\circ(\theta)V)_{\mathbb{K}}+(T^\circ(\theta)U,B^\circ(\theta)V)_{\partial\mathbb{K}}+\langle\mathfrak{S}^\circ(\theta)\pi U,\mathfrak{Q}^\circ(\theta)\pi V\rangle_T.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Переход от (2.32) к (2.35) возможен, если $2T\times 2T$-матрицы

$$\mathfrak{X}(\theta)=\left\|\begin{matrix}i\mathfrak{B}^\circ(\theta)\\ \mathfrak{S}^\circ(\theta)\end{matrix}\right\|,\quad \mathfrak{Y}(\theta)=\left\|\begin{matrix}\mathfrak{T}^\circ(\theta)\\ i\mathfrak{Q}^\circ(\theta)\end{matrix}\right\|\tag{2.36}$$

связаны соотношением $\mathfrak{Y}^*\mathfrak{X}=\mathbb{J}$ (см. [4]).

Введем непрерывные операторы

$$\mathbb{A}^\circ(\theta)=\{L^\circ(\theta),B^\circ(\theta),\mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi\},\quad \mathbb{A}^\circ(\theta)_*=\{L^\circ(\theta),B^\circ(\theta),\mathfrak{Q}^\circ(\theta)\pi\},\tag{2.37}$$

действующие из пространства $\mathfrak{D}$ в пространство

$$\mathfrak{R}=\mathcal{R}^l_\gamma E(\mathbb{K})\times\mathbb{C}^T.$$

Согласно [4], эти операторы фредгольмовы. Они называются сопряженными относительно обобщенной формулы Грина (2.35); если $\mathfrak{B}^\circ(\theta)=\mathfrak{Q}^\circ(\theta)$ и $\mathfrak{T}^\circ(\theta)=\mathfrak{S}^\circ(\theta)$, то оператор $\mathbb{A}^\circ(\theta)$ формально самосопряженный.

5. Связь условий излучения с обобщенной формулой Грина. Условия излучения можно заменить равенством вида

$$\mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi U=0\tag{2.38}$$

при подходящем выборе матрицы $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$. Найдем матрицы (2.36), отвечающие условиям излучения $\pi U\in\mathcal{W}_-$ или $\pi U\in\mathcal{W}_e$. Сначала сделаем это в предположении, что прямая $\mathbb{R}+i(n-d)/2$ свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим естественные условия излучения $\pi U\in\mathcal{W}_-$. Поскольку на прямой $\mathbb{R}+i(n-d)/2$ нет собственных чисел, то блок $\mathcal{J}$ в (2.33) отсутствует, $T=\mu$ и для базиса ${}^\bullet W_{-T},\dots,{}^\bullet W_{-1},{}^\bullet W_1,\dots,{}^\bullet W_T$, введенного перед формулой (2.32), справедливы равенства ${}^\bullet U_j^\pm=2^{-1/2}({}^\bullet W_j\pm{}^\bullet W_{-j})$, $j=1,\dots,T$ (см. 2.10). Можно положить

$$\mathfrak{X}(\theta)=i\left\|\begin{matrix}\mathbb{I}&\mathbb{J}(\mu)\\ \mathbb{I}&\mathbb{O}\end{matrix}\right\|,\quad \mathfrak{Y}(\theta)=i\left\|\begin{matrix}\mathbb{I}&\mathbb{O}\\ -\mathbb{I}&\mathbb{J}(\mu)\end{matrix}\right\|.\tag{2.39}$$

Тогда естественные условия излучения записываются в виде (2.38) с матрицей $\mathfrak{B}^\circ(\theta)=\|\mathbb{I}\ \mathbb{J}(T)\|$. Проверим это. Пусть $b_{-T},\dots,b_T$ — координаты вектора $\pi U\in\mathbb{C}^{2T}$ в базисе $\{{}^\bullet W_{-T},\dots,{}^\bullet W_T\}$. Равенство (2.38) означает, что $b_j+b_{-j}=0$, $j=1,\dots,T$. Таким образом,

$$\pi U=\sum_{j=1}^T(b_j{}^\bullet W_j+b_{-j}{}^\bullet W_{-j})=\sum_{j=1}^T b_j({}^\bullet W_j-{}^\bullet W_{-j})=2^{1/2}\sum_{j=1}^T b_j{}^\bullet U_j^-,$$

что и требовалось.

Теперь рассмотрим „энергетические“ условия излучения $\pi U \in \mathcal{W}_e$. В этом случае $V_j^e = W_j$, $V_j^n = W_{-j}$, $j = 1, \dots, T$, и

$$\mathfrak{X}(\theta) = i \begin{Vmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{J}(\mu) \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{Y}(\theta) = i \begin{Vmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{J}(\mu) \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{Vmatrix}. \tag{2.40}$$

Равенство (2.38) приводит к соотношениям $b_{-T} = \dots = b_{-1} = 0$, т.е. в разложении πU отсутствуют неэнергетические волны ${}^\bullet V_1^n, \dots, {}^\bullet V_T^n$.

Перейдем к обсуждению общего случая: на прямой $\mathbb{R}+i(n-d)/2$ имеются собственные числа пучка $\mathfrak{A}$. Сначала предположим, что справедливо требование (1.18), и обратимся к энергетическим условиям излучения. Соответствующие матрицы (2.36) ищем в виде

$$\mathfrak{X}(\theta) = \begin{Vmatrix} \mathfrak{X}_{11}(\theta) & \mathbb{O} & \mathfrak{X}_{12}(\theta) \\ \mathbb{O} & \mathcal{X}(\theta) & \mathbb{O} \\ \mathfrak{X}_{21}(\theta) & \mathbb{O} & \mathfrak{X}_{22}(\theta) \end{Vmatrix}, \quad \mathfrak{Y}(\theta) = \begin{Vmatrix} \mathfrak{Y}_{11}(\theta & \mathbb{O} & \mathfrak{Y}_{12}(\theta) \\ \mathbb{O} & \mathcal{Y}(\theta) & \mathbb{O} \\ \mathfrak{Y}_{21}(\theta) & \mathbb{O} & \mathfrak{Y}_{22}(\theta) \end{Vmatrix}, \tag{2.41}$$

где $\mathcal{X}(\theta)$ и $\mathcal{Y}(\theta)$ — матрицы с теми же размерами $(2T-2\mu) \times (2T-2\mu)$, что и средний блок $\mathcal{J}$ в (2.33), а $\mu \times \mu$-матрицы

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{X}_{11}(\theta) & \mathfrak{X}_{12}(\theta) \\ \mathfrak{X}_{21}(\theta) & \mathfrak{X}_{22}(\theta) \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \mathfrak{Y}_{11}(\theta) & \mathfrak{Y}_{12}(\theta) \\ \mathfrak{Y}_{21}(\theta) & \mathfrak{Y}_{22}(\theta) \end{Vmatrix} \tag{2.42}$$

заданы формулами (2.40). Блок $\mathcal{J}$ определен в (2.34), причем согласно предложению 1.4 $\nu^\circ = 0$, $\lambda_0 = i(n-d)/2$, $J_0 = T - \mu$ и $\varkappa_{10} = \dots \varkappa_{J_0 0} = 2$. Положим

$$\mathcal{X}(\theta) = i \begin{Vmatrix} \mathcal{M} \\ \mathcal{N} \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{Y}(\theta) = i \begin{Vmatrix} \mathcal{N} \\ \mathcal{M} \end{Vmatrix}, \tag{2.43}$$

$$\mathcal{M} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\mathcal{N} = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha(0,1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(0,2) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha(0,J_0) \end{Vmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями проверяется, что при указанном выборе $\mathfrak{B}^\circ(\theta), \mathfrak{S}^\circ(\theta)$ и $\mathfrak{T}^\circ(\theta)$, $\mathfrak{Q}^\circ(\theta)$ (см. (2.36) и (2.41)) выполняется равенство

$$iq^\circ(\pi U, \pi V) = \langle \mathfrak{S}^\circ(\theta)\pi U, \mathfrak{Q}^\circ(\theta)\pi V\rangle_T - \langle \mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi U, \mathfrak{T}^\circ(\theta)\pi V\rangle_T, \tag{2.44}$$

а следовательно, и обобщенная формула Грина (2.35). Кроме того, соотношение (2.38) означает, что для коэффициентов представления $\pi U = \sum b_j^\bullet W^j$ верны формулы

$$b_{-T} = b_{1-T} = \dots = b_{\mu-1-T} = 0, b_{\mu-T+1} = b_{\mu-T+3} = \dots = b_{T-\mu-2} = b_{T-\mu} = 0,$$

т.е. в соответствии с принятой нумерацией элементов базиса $^\bullet W_{-T}, \dots {}^\bullet W_T$ упомянутое представление не содержит неэнергетических волн $^\bullet V_1^n, \dots, {}^\bullet V_T^n$. Итак, требуемая обобщенная формула Грина, обслуживающая энергетические условия излучения, построена. Отметим, что соответствующий оператор $\mathbb{A}^\circ$ из (2.37) формально самосопряжен.

Обратимся теперь к естественным условиям излучения. Представим $\mathfrak{X}(\theta)$ и $\mathfrak{Y}(\theta)$ в виде (2.41). Матрицы (2.42) совпадают с матрицами (2.39) (благодаря этому обстоятельству равенство (2.38) влечет отсутствие приходящих волн $^\bullet U_T^+, \dots, {}^\bullet U_{T-\mu+1}^+$ в разложении πU; см. пояснения к формуле (2.39)). Осталось выбрать матрицы $\mathcal{X}(\theta)$ и $\mathcal{Y}(\theta)$, структура которых определяется блоками $\alpha\mathbb{J}(\varkappa)$, составляющими матрицу $\mathcal{J}$ из (2.33). Рассмотрим первый блок (т.е. $\alpha = \alpha(1, -\nu^\circ)$ и $\varkappa = \varkappa_{1,-\nu^\circ}$ согласно (2.34)).

Пусть $\varkappa = 2m$ — четное число. Введем $m \times 2m$-матрицы

$$\mathcal{N}^\pm = \|\pm\mathbb{I}\ \ \alpha\mathbb{J}(m)\|, \qquad \mathcal{M}^\pm = \|\mathbb{I}\ \ \mathbb{O}\|$$

(ср. с (2.39)). Напомним, что по формуле (2.11) жордановой цепочке $\{\varphi_{-\nu^\circ}^{(0,1)}, \dots, \varphi^{(\varkappa_{1,-\nu^\circ}-1,1)}\}$ сопоставлялось одинаковое количество приходящих и уходящих волн. Эта же формула показывает, что для уничтожения приходящих волн в матрице $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ должен присутствовать блок $\mathcal{N}^+$. Поэтому поместим блоки $i\mathcal{N}^+$ и $i\mathcal{M}^+$ (блоки $i\mathcal{M}^-$ и $i\mathcal{N}^-$) соответственно в левые верхний и нижний углы матрицы $\mathcal{X}(\theta)$(матрицы $\mathcal{Y}(\theta)$); в обеих матрицах остальные элементы столбцов с номерами $j = -T+\mu+1, \dots, -T+\mu+2m$ и строк с номерами h, где $|h| > T-\mu-m$, считаем равными нулю. Подчеркнем, что выбор $\mathfrak{X}(\theta)$ и $\mathfrak{Y}(\theta)$ подчинен условию: если волны πU и πV суть линейные комбинации волн, отвечающих названной жордановой цепочке, то справедлива формула (2.44) (проверяется непосредственно).

Предположим, что $\varkappa = 2m+1$ — нечетное число. В случае $\alpha = 1$ по жордановой цепочке в п.2 построено m уходящих и $1+m$ приходящих волн. Поэтому введем матрицы

$$\begin{gathered}\mathcal{N}^+ = \left\|\begin{matrix}\mathbb{I} & \mathcal{O}^t & \mathbb{J}(m)\\ \mathcal{O} & 1 & \mathcal{O}\end{matrix}\right\|, \quad \mathcal{M}^- = \left\|\begin{matrix}\mathbb{I} & \mathcal{O}^t & \mathbb{O}\\ \mathcal{O} & 1 & \mathcal{O}\end{matrix}\right\|,\\ \mathcal{M}^+ = \|\mathbb{I}\ \ \mathcal{O}^t\ \ \mathbb{O}\|, \qquad \mathcal{N}^- = \|-1\ \ \mathcal{O}^t\ \ \mathbb{J}(m)\|,\end{gathered} \tag{2.45}$$

где $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}^t$ — строка и столбец из m нулей; $\mathbb{I}, \mathbb{O}$ и $\mathbb{J}(m)$ — матрицы размеров $m\times m$. Размещение блоков $i\mathcal{N}^+, i\mathcal{M}^+$ в матрице $\mathcal{X}(\theta)$ и блоков $i\mathcal{M}^-, i\mathcal{N}^-$ в матрице $\mathcal{Y}(\theta)$ то же самое, что и при четном $\varkappa$, а строки и столбцы, выделенные этими блоками, дополняются нулями. Нетрудно убедиться в том, что присутствие $\mathcal{N}^+$ в матрице $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ устраняет из πU часть приходящих волн (ввиду равенства (2.38))и что верна формула (2.44) (пока при тех же ограничениях, что и для четного $\varkappa$).

Наконец, при $\varkappa = 2m+1$ и $\alpha = -1$ положим

$$\begin{gathered}\mathcal{N}^+ = \|\mathbb{I}\ \ \mathcal{O}^t - \mathbb{J}(m)\|, \quad \mathcal{M}^- = \|\mathbb{I}\ \ \mathcal{O}^t\ \ \mathbb{I}\|,\\ \mathcal{M}^+ = \left\|\begin{matrix}\mathbb{I} & \mathcal{O}^t & \mathbb{O}\\ \mathcal{O} & 1 & \mathcal{O}\end{matrix}\right\|, \quad \mathcal{N}^- = \left\|\begin{matrix}-\mathbb{I} & \mathcal{O}^t & -\mathbb{J}(m)\\ \mathcal{O} & -1 & \mathcal{O}\end{matrix}\right\|\end{gathered} \tag{2.46}$$

(изменилось число уходящих и приходящих волн, отвечающих упомянутой жордановой цепочке; см. п.2). Теперь сохраняется в силе все сказанное в предыдущем абзаце после формул (2.45).

В любой из трех ситуаций после рассмотрения первого блока (2.34) остаются неопределенными в матрицах $\mathcal{X}(\theta)$ и $\mathcal{Y}(\theta)$ квадратные подматрицы размера $T_{-\mu-\varkappa_{1,-\nu^\circ}}$. Повторяя построения для второго блока, сокращаем количество неизвестных элементов в $\mathcal{X}(\theta)$ и $\mathcal{Y}(\theta)$. Таким образом, за несколько шагов построение этих матриц, а значит, и матриц (2.36), завершается. На каждом шаге мы добивались справедливости (усеченной; см. выше) формулы (2.44); потому окажется верным и соотношение (2.35). Кроме того, по построению матрицы $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ равенство (2.38) уничтожает все приходящие волны в разложении проекции πU. Итак, обобщенная формула Грина, обслуживающая естественные условия излучения, найдена. Отметим, что формально сопряженным с оператором $\mathbb{A}^\circ(\theta) = \{L^\circ(\theta), B^\circ(\theta), \mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi\}$ является оператор $\mathbb{A}^\circ(\theta)_* = \{L^\circ(\theta), B^\circ(\theta), \mathfrak{Q}^\circ(\theta)\pi\}$ задачи (1.9) с условиями излучения $\pi U \in \mathcal{W}_+$ (разрешаются только приходящие волны).

6. Ядро и коядро оператора $\mathbb{A}^\circ(\theta)$. Оператор $A^\circ_{l\gamma}(\theta)$ (см. (1.23)) фредгольмов, и его ядро тривиально по предположению. Подпространство $\ker A^0_{l\beta}(\theta)$ натянуто на функции $\zeta_1(\theta), \dots, \zeta_T(\theta)$ (теорема 2.5). Поэтому ядро оператора $\mathbb{A}^\circ(\theta)$ задачи (1.9), (2.38) совпадает с подпространством

$$\{U \in \ker A^\circ_{l\beta}(\theta) : \mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi U = 0\}. \tag{2.47}$$

Поскольку условия разрешимости задачи с оператором $\mathbb{A}^\circ(\theta)$ выражаются в терминах обобщенной формулы Грина (теорема 2.2 [4]), то

$$\operatorname{coker} \mathbb{A}^\circ(\theta) = \{(U, T^\circ(\theta)U, \mathfrak{T}^\circ(\theta)\pi U) : U \in \ker A^\circ_{l\beta}(\theta), \mathfrak{Q}^\circ(\theta)\pi U = 0\}. \tag{2.48}$$

§ 3. Задачи с условиями излучения в области с ребром

1. Об асимптотике решений вблизи ребра. Постановка задачи с условиями излучения в конусе была связана с введением пространства $\mathfrak{D}$, полученного расширением пространства $\mathcal{D}^l_\gamma E(\mathbb{K})$ за счет „асимптотических решений“ задачи. Этот же принцип используется и в случае ребра. Подробные сведения об асимптотике решений вблизи ребра можно найти, например, в [3], гл.9. Здесь мы ограничиваемся введением необходимых понятий и обозначений без дополнительной мотивировки.

Согласно предположениям п.1.1, пучок (1.14) не зависит от точки z ребра M. Сохраним за обозначениями λ_ν, $\varphi^{\sigma\tau}_\nu(\omega)$ и т.п. прежний смысл (см. п.2.1). Положим

$$u^{\sigma\tau}_\nu(y, D_z) = \|r^{i\lambda_\nu + t_j} \sum_{q=0}^{\sigma} \frac{1}{q!}(i \ln r + i \ln |\nabla_\Gamma|)^q (\varphi^{\sigma-q,\tau}_\nu)_j(\omega)\|^k_{j=1}, \tag{3.1}$$

где

$$\ln |\nabla_\Gamma| w(z) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz\xi} (\ln |\xi|) \hat{w}(\xi)\, d\xi. \tag{3.2}$$

Определим еще оператор

$$(\mathfrak{C}_0 k)(y,z) = \int_{\mathbb{R}^d} X(t)k(x - t|y|)\,dt \tag{3.3}$$

продолжения в клин $\mathbb{D}$ функций k, заданных на ребре Γ. В (3.3) $X(z) = (2\pi)^{-d/2} \quad \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to z}\chi(|\xi|)$, χ — гладкая быстро убывающая функция на $\mathbb{R}$, $\chi(s) = 1$ вблизи точки $s = 0$.

Пусть весовые показатели β и γ такие же, что и в п.2.1. Введем пространство $\mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(\mathbb{D})$, элементами которого служат функции вида

$$u(y,z) = u^\circ(y,z) + \sum_{\nu,\tau,\sigma} u^{\sigma,\tau}_\nu(y,D_z)(\mathfrak{C}^\circ k^{\sigma\tau}_\nu)(y,z), \tag{3.4}$$

где суммирование распространяется на те же значения индексов, что и в (2.7), $u^\circ \in \mathcal{D}^l_\gamma(V(\mathbb{D})$ (см. (1.21), $k^{\sigma\tau}_\nu$ — элемент пространства Соболева–Слободецкого $H^{\mu_\nu}(\Gamma)$, причем

$$\mu_\nu = l - \gamma + \mathrm{Im}\lambda_\nu - (n-d)/2. \tag{3.5}$$

Положим

$$\|u; \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(\mathbb{D})\| = (\|u^\circ; \mathcal{D}^l_\gamma V(\mathbb{D})\|^2 + \sum_{\nu,\tau,\sigma} \|k^{\sigma\tau}_\nu; H^{\mu_\nu}(\Gamma)\|^2)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Замечание 3.1. *В соответствии с* (3.6) *пространство* $\mathfrak{D}$ *из* § 2 *следует обозначать* $\mathfrak{D}^l_{\beta,\gamma}E(\mathbb{K})$.

Нам понадобятся аналогичные объекты и для области G с ребром M. Роль оператора (3.2) передается оператору

$$(\ln|\nabla_M|v)(z) = 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)\int_M (v(z) - v(\zeta))|\zeta - z|^{-d} ds_\zeta + v(z) \tag{3.7}$$

(ds_ζ — лебегов элемент объема, Γ — гамма-функция). Оператор (3.7) — симметрический положительно определенный псевдодифференциальный оператор с главным символом $\ln|\xi|$. Оператор $\mathfrak{C}$ продолжения функций, заданных на ребре M, в область G склеивается при помощи разбиения единицы из „локальных“ операторов вида (3.3). Будем считать, что продолженные таким образом функции аннулируются вне малой трубчатой окрестности $\mathcal{U}$ ребра M.

Введем пространство $\mathfrak{D}^l_{\beta,\gamma}V(G)$. Пусть (z,r,ω) — „цилиндрические“ координаты в $\mathcal{U}$: $z \in M$, (r,ω) — сферические координаты на $(n-d)$-мерной плоскости, ортогональной ребру в точке z; через y обозначим соответствующие декартовы координаты в этой плоскости. Выражения $u^{\sigma\tau}_\nu(y,D_z)$ в $\mathcal{U}\cap G$ определим формулой (3.1) с заменой оператора (3.2) оператором (3.7). Пространство $\mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G)$ состоит из функций вида

$$u = u^\circ + \sum_{\nu,\tau,\sigma} u^{\sigma\tau}_\nu \mathfrak{C}k^{\sigma\tau}_\nu; \tag{3.8}$$

оно снабжается нормой (3.6), где вместо $\mathbb{D}$ и Γ выступают G и M. Упорядочим так же, как и в п.2.4, множества $\{k_\nu^{\sigma\tau}\}$, $\{u_\nu^{\sigma\tau}\}$, будем далее писать просто $\{k_t\}$, $\{u_t\}$ и введем столбец $k = \|k_t\|$ (верхний элемент k_{-T}). Равенство (3.8) примет вид

$$u = u^0 + \sum_{t=-T}^{T}{}' u_t \mathfrak{C} k_t, \tag{3.9}$$

где штрих указывает на пропуск значения $t = 0$.

Как и в случае конической точки, формула Грина (1.1) приобретает дополнительное слагаемое, если в качестве u и v взять элемент пространства $\mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G)$. Более точно, пусть k и l — векторы коэффициентов из представлений (3.9) функций u и v; тогда

$$(\mathcal{L}u, v)_G + (\mathcal{B}u, \mathcal{J}v)_{\partial G} - (u, \mathcal{L}v)_G - (\mathcal{J}u, \mathcal{B}v)_{\partial G} = i(\mathbb{J}k, l)_M. \tag{3.10}$$

В (3.10) $\mathbb{J}$ — матрица (2.33), а $(,)_M$ — скалярное произведение в $L_2(M)$.

2. Пространство волн. Фактор-пространство $\mathcal{W} = \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G)/\mathcal{D}^l_\gamma V(G)$ назовем пространством волн, а его элементы U, V, W и т.п. — волнами. Пусть $\pi : \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G) \to \mathcal{W}$ — проекция. Обозначив левую часть (1.1) через $q(u, v)$, перепишем (3.10):

$$q(u, v) = i(\mathbb{J}\pi u, \pi v)_M. \tag{3.11}$$

Если хотя бы один из элементов u или v принадлежит $\mathcal{D}^l_\gamma V(G)$, то сохраняется формула (1.1). Это означает, что (кососимметрическая) форма q в действительности определена на $\mathcal{W} \times \mathcal{W}$.

Ясно, что пространство $\mathcal{W}$ изоморфно произведению

$$\mathcal{H} = H^{\mu_{-T}}(M) \times \cdots \times H^{\mu_{-1}}(M) \times H^{\mu_1}(M) \times \cdots \times H^{\mu_T}(M), \tag{3.12}$$

где $\mu_t = l - \gamma + \operatorname{Im}\lambda_t - (n-d)/2$ и в отличие от (3.5) использована новая нумерация собственных чисел $\lambda_{-T}, \ldots, \lambda_{-1}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_T$ в соответствии с переходом от (3.8) к (3.9).

Теперь опишем специальные типы волн — энергетические и неэнергетические, уходящие и приходящие. Классификация основана на использовании аналогичной классификации волн в конусе. Более точно, применяя к функциям (3.4) преобразование (1.8) (ведущее от задачи в $\mathbb{D}$ к задаче в $\mathbb{K}$), получаем представитель вида (2.7) волны в $\mathbb{K}$. Тип этой волны приписывается исходной функции (3.4). Перефразировка сказанного непосредственно для функций (3.9) дает следующее описание.

Пусть выражение $u_t(y, D_z)$ отвечает собственному числу пучка $\mathfrak{A}$, расположенному ниже (выше) прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$; тогда волна с представителем $u_t \mathfrak{C} k_t$ при любом $k_t \in H^{\mu_t}(M)$ называется энергетической (неэнергетической). Понятия энергетической и неэнергетической волн для собственного числа на прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$ вводятся лишь при условии (1.18). В этом случае $\lambda_0 = i(n-d)/2$ — единственная точка спектра на указанной прямой (предложение 1.4), и этой точке отвечают волны с представителями $u_0^{0\tau}(y)\mathfrak{C}k_0^{0\tau}$ и

$u_0^{1\tau}(y, D_z)\mathfrak{C}k_0^{1\tau}$, где $\tau = 1, \dots, J_0$ и $k_0^{i\tau} \in H^{l-\gamma}(M)$. Первые волны относятся к энергетическим, а вторые — к неэнергетическим. Сохраним эти названия за линейными комбинациями волн одного типа. В результате пространство волн разобьется в прямую сумму

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}^e \dot{+} \mathcal{W}^n. \tag{3.13}$$

Можно проверить, что для представителей u волн из $\mathcal{W}^e$ форма $a(u, u; G)$ из (1.6) конечна, и для неэнергетических волн соответствующий интеграл (по G) расходится.

Теперь определим уходящие и приходящие волны. Квадратичная форма $\mathcal{W} \ni {}^\bullet u \mapsto q(u, u)$ принимает чисто мнимые значения. Если $iq(u, u) < 0 (> 0)$, то волна ${}^\bullet u$ называется приходящей (уходящей). Ввиду независимости пучка $\mathfrak{A}$ от точки $z \in M$ равносильное определение таких волн можно дать, используя выражения $u_\nu^{\sigma\tau}(u, D_z)$ так, как это было сделано в п.2.2; построенные по формулам, аналогичным (2.10), (2.11), выражения обозначим $u_j^{\pm}(y, D_z)$ (где $j = 1, \dots, T$ — такая же нумерация, что и перед теоремой 2.7).

Вопрос о представлении элемента из $\mathcal{W}$ как суммы уходящей и приходящей волн оказывается более тонким (при учете собственных чисел вне прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$). Это связано с гладкостью коэффициентов k_t в разложении вида (3.9), которая определяется соответствующими собственными числами (см. (3.5)). С другой стороны, приходящие и уходящие волны согласно (2.10) порождаются двумя различными собственными числами. Более подробно, представитель (3.9) волны ${}^\bullet u$ переписывается в виде

$$u = u^0 + \sum_{j=1}^{T} \{u_j^+(y, D_z)\mathfrak{C}k_j^+ + u_j^-(y, D_z)\mathfrak{C}k_j^-\}. \tag{3.14}$$

Если номер j отвечает собственному числу, не лежащему на прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$, то

$$k_j^{\pm} = 2^{-1/2}(k_j \pm k_{-j}), \tag{3.15}$$

причем $k_j \in H^{\mu_j}(M)$, $k_{-j} \in H^{\mu_{-j}}(M)$ и $\mu_j < \mu_{-j}$. Если же собственное число расположено на прямой, то соответствующие коэффициенты k_j, k_{-j} и $k_j^{\pm}$ принадлежат одному и тому же пространству $H^{l-\gamma}(M)$. Таким образом, коэффициенты из (3.14) являются элементами пространств $H^{\mu_j}(M)$, однако не при любом $k_j^{\pm} \in H^{\mu_j}(M)$ комбинация (3.14) попадает в $\mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G)$.

Замечание 3.2. *Можно было бы изменить определение пространства $\mathfrak{D}$, отправляясь от представлений (3.14) вместо (3.9) и допуская включение $k_j^{\pm} \in H^{\mu_{-j}}(M)$, $j = 1, \dots, T$. Это расширение пространства $\mathcal{D}^l_\gamma V(G)$ оказывается недостаточным, поскольку в таком $\mathfrak{D}$ задача с естественными условиями излучения не является фредгольмовой (коядро бесконечномерно). Последний факт объясняется, например, тем, что задача фредгольмова в более широком пространстве $\mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G)$ с нормой (3.6) (см. теорему 3.9). Различие между двумя расширениями пространства $\mathcal{D}^l_\gamma$ исчезает для задачи в конусе $\mathbb{K}$.*

3. Энергетические условия излучения на ребре. В [4] обсуждалась постановка краевой задачи, приводящая к фредгольмову оператору и связанная с обобщенной формулой Грина

$$(\mathcal{L}u, v)_G + (\mathcal{B}u, \mathcal{J}v)_{\partial G} + (\mathfrak{B}\pi u, \mathfrak{T}\pi v)_M = \\ = (u, \mathcal{L}v)_G + (\mathcal{J}u, \mathcal{B}v)_{\partial G} + (\mathfrak{S}\pi u, \mathfrak{Q}\pi v)_M, \tag{3.16}$$

где $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Q}$ — некоторые $T\times 2T$-матрицы псевдодифференциальных операторов на M. (В [4] рассматривались более общие задачи с несамосопряженными краевыми условиями и на $\partial G \setminus M$). Оператор

$$\mathbb{A} = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathfrak{B}\pi\} : \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G) \to \mathfrak{R}^l_{\beta\gamma}V(G) = \mathcal{R}^l_\gamma V(G) \times \prod_{j=-1}^{-T} H^{\rho_j}(M) \tag{3.17}$$

является фредгольмовым в том и только в том случае, если модельная задача (1.9), (2.38) в конусе однозначно разрешима. В этом и следующем разделах энергетическим или естественным условиям излучения сопоставляется оператор (3.17) с подходящей матрицей $\mathfrak{B}$. Тем самым устанавливается фредгольмовость задач с названными условиями излучения на ребре.

Теорема 3.3. *Пусть форма a° обладает свойством* (1.18). *Тогда задаче* (1.2) *с энергетическими условиями излучения*

$$\pi u \in \mathcal{W}^e \tag{3.18}$$

отвечает фредгольмов оператор

$$A^e = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\} : \mathfrak{D}^e = \{u \in \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G) : \pi u \in W^e\} \to \mathcal{R}^l_\gamma V(G), \tag{3.19}$$

индекс которого равен нулю.

Доказательство. Энергетические условия излучения (3.18) означают в силу (3.13), что асимптотика искомого решения (3.9) не содержит неэнергетические слагаемые, т.е. коэффициенты k_t подчинены требованиям

$$k_{-T+\mu+2n+1} = 0 \text{ при } n = 0, \dots, n^{(-)}, k_{T-\mu-2n} = 0 \text{ при } n = 0, \dots, n^{(+)}, \\ k_j = 0 \text{ при } j = -T, \dots, \mu - 1 - T, \tag{3.20}$$

где $n^{(\pm)} = (T-\mu-2)/2$ в случае четного $T-\mu$ и $n^{(\pm)} = (T-\mu\pm 1-2)/2$ в случае нечетного. Если в качестве оператора $\mathfrak{B}(z, D_z)$ взять числовую матрицу $\mathfrak{B}$, определенную так же, как и для задачи в конусе (см. формулы (2.40)–(2.43)), то равенства (3.20) запишутся в виде

$$\mathfrak{B}\pi u = 0. \tag{3.21}$$

Матрицы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ дифференциальных операторов краевой задачи имеют „оснащения“ $\{t_j\}$, $\{\sigma_q\}$, определяющие порядки элементов этих матриц; так, $\operatorname{ord}\mathcal{B}_{qj} = \sigma_q + t_j$. Подобное оснащение нужно указать и для матрицы

$$\mathfrak{B} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{B}_{-T,-T} & \mathfrak{B}_{-T,-T+1} & \dots & \mathfrak{B}_{-T,-1} & \mathfrak{B}_{-T,1} & \dots & \mathfrak{B}_{-T,T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{B}_{-1,-T} & \mathfrak{B}_{-1,-T+1} & \dots & \mathfrak{B}_{-1,-1} & \mathfrak{B}_{-1,1} & \dots & \mathfrak{B}_{-1,T} \end{matrix} \right\|. \tag{3.22}$$

(Нумерация элементов матрицы согласована с нумерацией элементов столбца k и тем самым учитывает расположение собственных чисел пучка $\mathfrak{A}$ относительно прямой $\mathbb{R}+i(n-d)/2$). Положим $\operatorname{ord}\mathfrak{B}_{pt} = \alpha_p - i\lambda_t$ (ср. с [4]). Поскольку в каждой строке матрицы $\mathfrak{B}$ имеется только один ненулевой элемент (равный 1), то, положив $\alpha_p = i\lambda_p$, мы обеспечим соотношение $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^\circ(\theta)$ (см. (2.40), (2.43)). Таким образом, задаче (1.2), (3.21) отвечает модельная задача (1.9), (2.38) в конусе с энергетическими условиями излучения, которая однозначно разрешима в силу теоремы 2.7 (2°). Значит, операторы (3.17) и (3.19) фредгольмовы по теореме 3.3, [4]; при этом в (3.17) $\rho_j = l - \gamma - \operatorname{Re}\alpha_j - (n-d)/2 = \mu_j$ (см. формулу (3.23) в [4]).

Осталось проверить равенство $\operatorname{Ind} A^e = 0$. Учитывая теорему 4.3 [4], для этого достаточно установить, что тройка $\{\mathcal{L}, \mathcal{B}, \mathfrak{B}\}$ допускает включение в симметрическую обобщенную формулу Грина (3.16) с операторами $\mathfrak{Q} = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$. С этой целью в качестве псевдодифференциальных операторов

$$\mathfrak{X}(z, D_z) = \left\| \begin{matrix} i\mathfrak{B}(z, D_z) \\ \mathfrak{S}(z, D_z) \end{matrix} \right\|, \quad \mathfrak{Y}(z, D_z) = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{T}(z, D_z) \\ i\mathfrak{Q}(z, D_z) \end{matrix} \right\| \tag{3.23}$$

возьмем числовые матрицы, построенные в п.2.4 (см. (2.41) и (2.43)). Поскольку $\mathfrak{Y}^*\mathfrak{X} = \mathbb{J}$, то формула (3.10) примет вид (3.16). Симметричность полученной обобщенной формулы Грина очевидна. •

4. Естественные условия излучения на ребре. Введем непрерывный оператор

$$\mathcal{W} \ni k = (k_{-T}, \dots, k_T) \mapsto p_+ k = (k_1^+, \dots, k_T^+) \in \prod_{j=1}^{T} H^{\mu_j}(M),$$

где k_t и k_j^+ — коэффициенты из формул (3.9) и (3.14) соответственно. Естественные условия излучения на ребре требуют отсутствия приходящих волн в представлении (3.14) решения $u \in \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma} V(G)$. Иными словами, должно выполняться равенство

$$p + \pi u = 0. \tag{3.24}$$

Как и в предыдущем разделе, подберем оператор $\mathfrak{B}$, позволяющий переписать (3.24) в виде (3.21). Ясно, что в качестве $\mathfrak{B}$ следует взять ту же числовую матрицу, что и для задачи в конусе с естественными условиями излучения (см. п.2.5 и, в частности, формулы (2.39), (2.41), (2.42) и (2.45), (2.46)). Желая получить модельный оператор $\mathbb{A}^\circ(\theta)$, осуществляющий изоморфизм, постараемся выбрать оснащение $\{\alpha_p\}$ для $\mathfrak{B}$ так, чтобы в каждой строке $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ оставался хотя бы один ненулевой элемент. Напомним, что матрица $\mathfrak{B}$ имеет вид

$$\mathfrak{B} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{B}^{(11)} & \mathbb{O} & \mathfrak{B}^{(13)} \\ \mathbb{O} & \mathfrak{B}^{(22)} & \mathbb{O} \end{Vmatrix}, \tag{3.25}$$

где $\mathfrak{B}^{(11)} = \|\delta_{i,j}\|_{i,j=1}^{\mu}$, $\mathfrak{B}^{(13)} = \|\delta_{i,\mu+1-j}\|_{i,j=1}^{\mu}$, μ — сумма кратностей собственных чисел пучка $\mathfrak{A}$, лежащих в полосе $\{\lambda : 0 > \mathrm{Im}\lambda - (n-d)/2 > \gamma - l\}$, а $\mathfrak{B}^{(22)}$ — блок с размерами $(T-\mu)\times(2T-2\mu)$, построенный в п.2.5. Всякое допустимое оснащение должно удовлетворять условию $\mathrm{Re}(\alpha_p - i\lambda_t) \geqslant 0$ для ненулевых элементов $\mathfrak{B}_{pt}$ (сохраняем нумерацию (3.22)). Положим $\alpha_p = i\lambda_{-t}$. Поскольку элементы блока $\mathfrak{B}^{(22)}$ отвечают собственным числам на прямой $\mathbb{R} + i(n-d)/2$, то $\mathrm{Re}(\alpha_p - i\lambda_t) = 0$ для всех элементов $\mathfrak{B}_{pt}$ этого блока. Пусть теперь $p = -T, \dots, \mu - 1 - T$, т.е. речь идет о верхних строках $\mathfrak{B}$. В p-й строке лишь два элемента $\mathfrak{B}_{pp} = 1$ и $\mathfrak{B}_{p,-p} = 1$ отличны от нуля. Кроме того,

$$\mathrm{Re}(\alpha_p - i\lambda_p) = \mathrm{Im}(\lambda_p - \lambda_{-p}) > 0, \mathrm{Re}(\alpha_p - i\lambda_{-p}) = 0.$$

Значит, указанное оснащение допустимо и соответствующая главная часть $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ имеет вид

$$\mathfrak{B}^\circ(\theta) = \begin{Vmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathfrak{B}^{(13)} \\ \mathbb{O} & \mathfrak{B}^{(22)} & \mathbb{O} \end{Vmatrix}. \tag{3.26}$$

Таким образом, оказывается, что критерием фредгольмовости задачи (1.2), (3.24) с естественными условиями излучения на ребре является однозначная разрешимость задачи (1.9), (2.38) в конусе с условиями излучения, определяемыми матрицей (3.26) (теорема 3.3, [4]). Если $\mu = 0$, то матрицы (3.25) и (3.26) совпадают, условия излучения в конусе остаются естественными и однозначная разрешимость задачи (1.9), (2.38) обеспечивается теоремой 2.4. При $\mu > 0$ возникает новый тип условий излучения в конусе, требующий специального рассмотрения.

Сначала обсудим более простой случай, когда прямая $\mathbb{R}+i(n-d)/2$ свободна от спектра пучка (т.е. $\mu = T$). Тогда в силу (2.10)

$$\pi U_j^{\pm} = 2^{-1/2}\pi(V_j^e \pm V_j^n), \quad j = 1, \dots, \mu. \tag{3.27}$$

Пусть $a = (a_1, \dots, a_T) \in \mathbb{C}^T$, а ζ, $U^{\pm}$ и V^e, V^n — столбцы с T элементами, введенные в доказательстве теоремы 2.7. Ядро оператора $\mathbb{A}^\circ(\theta)$ задачи (1.9), (2.38) тривиально, если равенство $\mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi a\zeta = 0$ влечет $a = 0$ (см. (2.47)). Цель состоит в том, чтобы выразить это условие в терминах матрицы рассеяния $s(\theta)$.

Учитывая (2.15), (3.27) и формулу

$$\mathfrak{B}^\circ(\theta) = \|\mathbb{O}\ \ \mathfrak{B}^{(13)}\| = \|\mathbb{O}\ \ \mathbb{J}(\mu)\|,$$

имеем

$$\begin{aligned} 0 = \mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi a\zeta &= 2^{-1/2}\mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi\{a(\mathbb{I} + s(\theta))V^e + a(\mathbb{I} - s(\theta))V^n\} = \\ &= 2^{-1/2}\mathbb{J}(\mu)\pi(a(\mathbb{I} + s(\theta))V^e). \end{aligned}$$

Следовательно, $\pi(a(\mathbb{I}+s(\theta))V^e)=0$ или $a(\mathbb{I}+s(\theta))=0$. Итак, $\dim\ker\mathbb{A}^\circ(\theta)=0$ лишь при условии, что число -1 не является собственным для матрицы $s(\theta)$. Последнее условие обеспечивает и тривиальность коядра оператора $\mathbb{A}^\circ(\theta)$. Этот факт вытекает из обобщенной формулы Грина (см. следующую лемму 3.4) и равенства (2.48).

Лемма 3.4. *Пусть операторы $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ заданы формулами* (2.41), *где $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ определены как и в п.2.5, а матрицы* (2.42) *имеют вид*

$$i\begin{Vmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{J}(\mu)\\ \mathbb{I} & \mathbb{O}\end{Vmatrix},\qquad i\begin{Vmatrix}\mathbb{I} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & \mathbb{J}(\mu)\end{Vmatrix}.$$

Тогда для оператора $\mathbb{A}^\circ(\theta)$ верна обобщенная формула Грина (2.35) *с матрицами $\mathfrak{T}^\circ(\theta)$, $\mathfrak{S}^\circ(\theta)$ и $\mathfrak{S}^\circ(\theta)$ из* (2.36).

Доказательство этой леммы состоит по существу в повторении рассуждений из п.2.5. •

Замечание 3.5. 1°. *Если $\mu=T$, то $\mathfrak{Q}^\circ(\theta)=\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ и $\mathfrak{T}^\circ(\theta)=\mathfrak{S}^\circ(\theta)=\|i\mathbb{I}\ \ \mathbb{O}\|$, т.е. задача* (1.9), (2.38) *является самосопряженной относительно формулы Грина* (2.35).

2°. *Пусть $\mu<T$. Если матрица $\mathfrak{B}$ отвечает естественным условиям излучения (т.е. допускает лишь уходящие волны), то в качестве $\mathfrak{Q}$ в* (3.16) *можно взять матрицу, допускающую только приходящие волны (см. конец п.2.5). Главные части $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ и $\mathfrak{Q}^\circ(\theta)$ оказываются сопряженными (в том же смысле) относительно формулы* (2.35).

Рассмотрим теперь задачу (1.9), (2.38) с матрицей (3.26) в случае $0<\mu<T$. Пусть показатель σ такой, что все собственные числа пучка из полосы $\{\lambda:\sigma-l+(n-d)/2\leqslant\operatorname{Im}\lambda\leqslant\sigma'-l+(n-d)/2\}$, где $\sigma'=2l-\sigma$, лежат на прямой $\mathbb{R}+i(n-d)/2$ (напомним, что $\gamma<\sigma<l$). Введем обозначения, аналогичные принятым в доказательстве теоремы 2.9; теперь блок $s^{(1,1)}(\theta)$ матрицы рассеяния $s(\theta)$ имеет размеры $T'\times T'$, где $2T'=2T-2\mu$ — сумма полных кратностей собственных чисел пучка на прямой $\mathbb{R}+i(n-d)/2$.

Предложение 3.6. *Оператор $\mathbb{A}^\circ(\theta)$ задачи* (1.9), (2.38), *в которой матрица $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ определена формулой* (3.26), *есть мономорфизм лишь при условии, что число -1 не является собственным для блока $s^{(2,2)}(\theta)$ матрицы рассеяния $s(\theta)$.*

Доказательство. Пусть строка $a=(a^{(1)},a^{(2)})$, где $a^{(1)}\in\mathbb{C}^{T'}$, $a^{(2)}\in\mathbb{C}^{\mu}$ такова, что $\mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi a\zeta=0$. Обозначим через $\pi^{(1)}$ проектор, действующий из $\mathfrak{D}$ на линейную оболочку волн $U_1^\pm,\dots,U_{T'}^\pm$, и положим $\pi^{(2)}=\pi-\pi^{(1)}$. Ввиду блочной структуры матрицы (3.26) имеют место равенства

$$\mathfrak{B}^\circ(\theta)\pi^{(j)}a\zeta=0, j=1,2. \tag{3.28}$$

В силу представлений (2.21), (2.22) условие (3.28) для $j=1$ означает, что волна

$$a^{(1)}({}^\bullet U^{(1)+}+s^{(1,1)}(\theta){}^\bullet U^{(1)-})+a^{(2)}s^{(2,1)}(\theta){}^\bullet U^{(1)-} \tag{3.29}$$

не содержит приходящих волн, т.е. $a^{(1)} = 0$. Теперь из равенства (3.28) при $j = 2$ вытекает с учетом (2.15), что волна

$$\begin{aligned} &a^{(1)}s^{(1,2)}(\theta)^{\bullet}U^{(2)-} + a^{(2)}({}^{\bullet}U^{(2)+} + s^{(2,2)}(\theta)^{\bullet}U^{(2)-}) = \\ &= 2^{-1/2}a^{(2)}({}^{\bullet}V^{(2)e} +^{\bullet} V^{(2)n} + s^{(2,2)}(\theta)({}^{\bullet}V^{(2)e} -^{\bullet} V^{(2)n})) \end{aligned} \tag{3.30}$$

не включает энергетических составляющих. Таким образом,

$$a^{(2)}(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)) = 0. \quad \bullet \tag{3.31}$$

Предложение 3.7. *Коядро оператора* $\mathbb{A}^{\circ}(\theta)$ *тривиально в том и только в том случае, когда* $\det(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)) \neq 0$.

Доказательство. Согласно теореме 2.2 (2°), [4], подпространство $\operatorname{coker}\mathbb{A}^{\circ}(\theta)$ тривиально лишь при условии тривиальности ядра оператора $\mathbb{A}^{\circ}(\theta)_* = \{L^{\circ}(\theta), B^{\circ}(\theta), \mathfrak{Q}^{\circ}(\theta)\pi\}$, сопряженного с $\mathbb{A}^{\circ}(\theta)$ относительно обобщенной формулы Грина (2.35). Как и в предыдущем доказательстве включение $a\zeta \in \ker\mathbb{A}^{\circ}(\theta)_*$ равносильно соотношениям

$$\mathfrak{Q}^{\circ}(\theta)\pi^{(j)}a\zeta = 0, j = 1,2. \tag{3.32}$$

Вспоминая замечание 3.5 (2°), из (3.32) при $j = 1$ выводим, что в (3.29) должны отсутствовать уходящие волны, т.е.

$$a^{(1)}s^{(1,1)}(\theta) + a^{(2)}s^{(2,1)}(\theta) = 0. \tag{3.33}$$

Для $j = 2$ соотношение (3.32) означает, что по-прежнему левая часть (3.30) не содержит энергетических волн:

$$a^{(1)}s^{(1,2)}(\theta) + a^{(2)}(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)) = 0. \tag{3.34}$$

Если (нетривиальная) строка $a^{(2)}$ удовлетворяет равенству (3.31), то строка $a = (0, a^{(2)})$ является решением системы (3.33), (3.34) по лемме 2.10 (2°). Значит, $a\zeta \in \ker\mathbb{A}^{\circ}(\theta)_*$, т.е. условие $\det(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)) \neq 0$ необходимо.

Обратимся к достаточности. Решим (3.34) относительно $a^{(2)}$ и подставим результат в (3.33); тогда $a^{(1)}u(\theta) = 0$, где

$$u(\theta) = s^{(1,1)}(\theta) - s^{(1,2)}(\theta)(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta))^{-1}s^{(2,1)}(\theta).$$

Для завершения доказательства нужно учесть, что матрица $u(\theta)$ является неособенной в силу следующей леммы 3.8. •

Лемма 3.8. *Матрица* $u(\theta)$ *унитарная.*

Доказательство. Унитарность матрицы $s(\theta)$ означает, что ее блоки подчинены соотношениям

$$\sum_{k=1}^{2} s^{(h,k)}(\theta)s^{(j,k)}(\theta)^* = \delta_{j,h}\mathbb{I}.$$

Поэтому

$$u(\theta)u(\theta)^* = s^{(1,1)}(\theta)s^{(1,1)}(\theta)^* - s^{(1,1)}(\theta)s^{(2,1)}(\theta)^*(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)^*)^{-1}s^{(1,2)}(\theta)^* -$$
$$-s^{(1,2)}(\theta)(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta))^{-1}s^{(2,1)}(\theta)s^{(1,1)}(\theta)^* +$$
$$+s^{(1,2)}(\theta)(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta))^{-1}s^{(2,1)}(\theta)s^{(2,1)}(\theta)^*(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)^*)^{-1}s^{(1,2)}(\theta)^* =$$
$$= s^{(1,1)}(\theta)s^{(1,1)}(\theta)^* + s^{(1,2)}(\theta)\{s^{(2,2)}(\theta)^*(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)^*)^{-1} + (\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta))^{-1}s^{(2,2)}(\theta) +$$
$$+(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta))^{-1}(\mathbb{I} - s^{(2,2)}(\theta)s^{(2,2)}(\theta)^*)(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)^*)^{-1}\}s^{(1,2)}(\theta)^* =$$
$$= s^{(1,1)}(\theta)s^{(1,1)}(\theta)^* + s^{(1,2)}(\theta)s^{(2,1)}(\theta)^* = \mathbb{I}.$$

Отметим в заключение, что последняя выкладка остается справедливой и без предположения о неособенности матрицы $\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)$ (см. лемму 2.10). •

Теорема 3.9. *Оператор*

$$\mathcal{A}^{\text{out}} = \{\mathcal{L}, \mathcal{B}\} : \mathfrak{D}^{\text{out}} = \{u \in \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G) : p_+\pi u = 0\} \to \mathcal{R}^l_\gamma V(G) \tag{3.35}$$

задачи (1.2) *с естественными условиями излучения* (3.24) *фредгольмов лишь тогда, когда число* -1 *не является собственным для блока* $s^{(2,2)}(\theta)$ *матрицы рассеяния* $s(\theta)$ *при всех* $\theta \in S^{d-1}$. *Индекс такого фредгольмова оператора равен нулю.*

Доказательство. Достаточность. В силу предложений 3.6 и 3.7 соответствующий модельный оператор $\mathbb{A}^\circ(\theta)$, содержащий в условиях излучения матрицу $\mathfrak{B}^\circ(\theta)$ из (3.26), есть изоморфизм. Тогда по теореме 3.3, [4] оператор $\mathcal{A}^{\text{out}}$ из (3.35) оказывается фредгольмовым.

Необходимость. Рассмотрим оператор (3.17) с „неоднородными“ условиями излучения; в соответствии с оснащением матрицы $\mathfrak{B}$ имеем

$$\rho_j = l - \gamma - \operatorname{Re}\alpha_j - (n-d)/2 = l - \gamma + \operatorname{Im}\lambda_{-j} - (n-d)/2 = \mu_{-j}$$

(ср. с п.3.3 [4]). Если $\det(\mathbb{I} + s^{(2,2)}(\theta)) = 0$, то такой оператор нефредгольмов (утверждение 3.3 и 3.4 [4]). Остается избавиться от неоднородности в условиях излучения. С этой целью заметим, что уравнение $\mathfrak{X}k = (h, 0)$ с оператором $\mathfrak{X}$ из (3.23) имеет единственное решение $k \in \mathcal{H}$ (см. (3.12)) при всех $h = (h_{-T}, \dots, h_{-1})$, $h_j \in H^{\rho_j}(M)$; согласно п.4.1 [4], норма k оценивается через норму h. По вектору k коэффициентов определяется функция $u(k;\cdot) \in \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G)$, причем

$$\|\{\mathcal{L}, \mathcal{B}\}u(k;\cdot); \mathfrak{D}^l_{\beta\gamma}V(G)\| \leqslant \text{const}\, \|k; \mathcal{H}\|.$$

Сказанное означает, что из фредгольмовости оператора (3.35) вытекает фредгольмовость оператора (3.17). Так как последний нефредгольмов, то же верно и для (3.35).

Индекс. Пусть $\zeta \in \ker \mathbb{A}$. Из формулы (3.10) и условия $p_+\pi\zeta = 0$ получаем, что

$$0 = i(\mathbb{J}\pi\zeta, \pi\zeta)_M = -i(\pi\zeta, \pi\zeta)_M.$$

Следовательно, $\zeta \in \ker \mathcal{A}_{l\gamma}$.

Пусть теперь $\zeta \in \ker \mathbb{A}_*$. Условия излучения для $\mathbb{A}_*$ означают, что волна $\pi\zeta$ не содержит уходящих составляющих (см. конец п.2.5). Снова применяя (3.10), выводим равенство $0 = i(\pi\zeta, \pi\zeta)_M$ и включение $\zeta \in \ker \mathcal{A}_{l\gamma}$. Итак, подпространства $\ker \mathbb{A}$ и $\ker \mathbb{A}_*$ совпадают, т.е. $\operatorname{Ind} \mathbb{A} = 0$ в силу теоремы 4.3 [4]. •

Следствие 3.10. 1°. *Если число* -1 *не является собственным для матрицы рассеяния* $s(\theta)$ *при всех* $\theta \in S^{d-1}$, *то операторы* (3.17) *и* (3.35) *с естественными условиями излучения фредгольмовы.*

2°. *Пусть выполнено условие* (1.18) *и тем самым определена матрица поряризации* (2.18). *Если эта матрица неособенная при всех* $\theta \in S^{d-1}$, *то операторы* (3.17) *и* (3.35) *фредгольмовы.*

Доказательство. В силу леммы 2.10 $\dim\ker(\mathbb{1} + s(\theta)) \geqslant \dim\ker(\mathbb{1} + s^{(2,2)}(\theta))$; остальное ясно. •

Замечание 3.11. *При доказательстве теоремы 3.9 попутно установлены равенства* $\ker \mathcal{A}_{l\gamma} = \ker \mathcal{A}^{\text{out}} = \ker \mathbb{A}$ *и* $\operatorname{coker} \mathcal{A}^{\text{out}} = \operatorname{coker} \mathcal{A}_{l\beta} = \{(v, \mathcal{J}v) : v \in \ker \mathcal{A}_{l\gamma}\}$ *(последние соотношения вытекают из теоремы* 4.3 [4]).

Список литературы

[1] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А., *L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами*, Тр. Моск. мат. об-ва, т. 37, 1978, с. 49–93.

[2] Назаров С.А., Пламеневский Б.А., *Задача Неймана для самосопряженных систем в области с кусочно-гладкой границей*, Тр. С.-Петербургского мат. об-ва, т. 1, 1991, с. 174–211.

[3] Назаров С.А., Пламеневский Б.А., *Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей*, Наука, М., 1991.

[4] Назаров С.А., Пламеневский Б.А., *Эллиптические задачи с условиями излучения на ребрах границы*, Мат. сб..

[5] Лионс Ж.-Л., Мадженес Э., *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

[6] Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г., *Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и их приложения*, Мат. сб. **78**, вып. 3 (1969), 446–472.

[7] Мазья В.Г., Пламеневский Б.А., *Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями*, Проблемы мат. анализа, вып. 6 (1977), 85–142, Изд-во ЛГУ, Л..

[8] Назаров С.А., Пламеневский Б.А., *Принципы излучения для самосопряженных эллиптических задач*, Проблемы мат. физики, вып. 13 (1991), 192–244, Изд-во ЛГУ, Л..

[9] Полиа Г., Сеге Г., *Изопараметрические неравенства в математической физике*, Физматгиз, М., 1962.

С.-Петербургский электротехнический институт связи
191065, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 61

Поступило 29 января 1992 г.