I. R. Shafarevich, Deformations of commutative algebras of class 2, *Algebra i Analiz*, 1990, Volume 2, Issue 6, 178–196

И.Р.Шафаревич

ДЕФОРМАЦИИ КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР КЛАССА 2

Рассматривается многообразие коммутативных ассоциативных алгебр класса нильпотентности 2 и размерности n. Изучаются неприводимые компоненты. Исследуется вопрос о сохранении класса нильпотентности при деформациях.

Введение

О нильпотентных (или вообще неполупростых) алгебрах известно очень мало. Основное свойство, резко отличающее их от полупростых алгебр, заключается в том, что в заданной размерности их может быть бесконечное число неизоморфных, и их структура с точностью до изоморфизма зависит от параметров. Например, алгебра N размерности 6 с базисом $e_1, e_2, e_3, e_4, f_1, f_2$ и таблицей умножения

$$e_i e_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad e_i^2 = \lambda_i f_1 + \mu_i f_2, \quad e_i f_k = f_k f_\ell = 0$$

коммутативна, нильпотентна и имеет класс 2 (т.е. $N^3=0$). Ангармоническое отношение четырех точек $(\lambda_i : \mu_i)$, $i=1,2,3,4$ на проективной прямой является, как легко видеть, инвариантом алгебры с точностью до изоморфизма.

Ввиду этого обстоятельства естественно рассматривать многообразия, образуемые этими алгебрами (вернее, коэффициентами их таблиц умножения). Эта точка зрения широко применяется. Здесь мы рассмотрим простейшую ситуацию коммутативных алгебр класса 2 (т.е. таких, что $xyz=0$ для любых элементов x, y, z алгебры). Вопрос, который нас интересует, - насколько это свойство „устойчиво", т.е. когда любую алгебру такого типа можно деформировать в алгебру большего класса. Точнее этот вопрос ставится так. Мы исследуем многообразие $\mathcal{A}_n$ всех коммутативных алгебр N класса 2 размерности n. Оно содержится в многообразии $\mathcal{C}_n$ всех коммутативных асссоциативных алгебр той же размерности. Вообще говоря, многообразие $\mathcal{A}_n$ приводимо, и мы перечисляем его неприводимые компоненты, находим их размерности и особые точки (см. теорему 1). Компонента $\mathcal{A}_{n,r}$ определяется числом $r=\dim N^2$. Здесь может представиться два случая - эта компонента является компонентой и многообразия $\mathcal{C}_n$ (т.е. некоторая окрестность общей алгебры этого типа состоит только из алгебр класса 2) или она является собственным подмногообразием некоторой компоненты многообразия $\mathcal{C}_n$ (т.е. любая алгебра этого типа может быть деформирована в алгебру, не являющуюся алгеброй класса 2). Какой случай имеет место, зависит только от чисел r и n.

Ключевые слова: нильпотентные алгебры, коммутативные алгебры, деформации алгебр, тангенциальные когомологии.

Например, пусть таблица умножения алгебры N в базисе, $e_1,\dots,e_d$, $f_1,\dots,f_r$, $(r+d=n)$ имеет вид $e_ie_j=0$ при $i\neq j$, $e_i^2=\sum_{s=1}^{r}\lambda_i^s f_s$, $e_if_s=f_sf_t=0$. Тогда алгебра с таблицей умножения $e_ie_j=0$ при $i\neq j$, $e_i^2=\alpha e_i+\sum_{s=1}^{r}\lambda_i^s f_s$, $e_if_s=f_sf_t=0$ ассоциативна, но в ней $e_i^3=\alpha e_i^2\neq 0$. Поэтому в любой окрестности алгебры N имеются алгебры класса большего, чем 2. Любая коммутативная алгебра класса 2 имеет базис с таблицей умножения, задаваемой формулами (2) ниже. При $r=1$ мы имеем одну симметрическую матрицу (a_{ij}^1) и замена базиса $e_1,\dots,e_d$ приводит к обычному преобразованию этой матрицы. Приведя ее к диагональному виду, мы получим таблицу умножения, в которой $e_ie_j=0$ при $i\neq j$. То же верно и при $r=2$, так как общую пару симметрических матриц можно привести к диагональному виду. Таким образом, при $r=1$ или 2 мы имеем второй случай описанной выше дихотомии. В случае $r=3$ и $d=4$ (т.е. $n=7$) в работе Ярробино и Энсалема [1] впервые было показано, что имеет место первый случай. В настоящей работе вопрос решается в более общей ситуации, хотя и не в общем случае. А именно доказано, что первый случай имеет место при $2<r\le\frac{(d-1)(d-2)}{6}+2$, кроме, может быть, случая $d=5$, $r=4$ (здесь $d=n-r=\dim N/N^2$), а второй случай – при $r\ge\frac{d^2-1}{3}$. Надо иметь в виду, что всегда $r\le\frac{d(d+1)}{2}$. Рассматривая асимптотику при $d\to\infty$ (т.е. обращая внимание лишь на коэффициент при d^2), мы можем сказать, что делим интервал $2<r\le\frac{d(d+1)}{2}$ на три равные части, причем в левом интервале имеет место первый случай, в правом – второй, а средний интервал остается неисследованным.

Технически легче исследовать не нильпотентные алгебры N, а локальные алгебры $A=K\cdot 1+N$, получающиеся присоединением единицы. Так, $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{A}_{n,r}$, которые мы для простоты называли многообразиями, на самом деле являются схемами, и $\mathcal{A}_{n,r}$ как подсхема в $\mathfrak{C}_n$ не приведена, в то время как аналогичные схемы для локальных алгебр приведены (см. замечание 1 в конце работы). Поэтому результаты формулируются для локальных алгебр (см. теорему 2).

Основное поле K, над которым определены все рассматриваемые нами алгебры, мы будем считать алгебраически замкнутым и имеющим характеристику 0.

Когда речь будет идти об „общей точке" алгебраического многообразия X, то, в духе старых геометров, будет подразумеваться точка некоторого непустого открытого по Зарисскому подмножества $U\subset X$, которое всегда легко уточнить из рассуждения.

§ 1. Коммутативные алгебры класса 2

Для любого целого числа $n>0$ рассмотрим коммутативные, ассоциативные алгебры N размерности n и такие, что $N^3=0$, т.е. $xyz=0$ для любых $x,y,z\in N$. Если фиксировать в такой алгебре базис $e_1,\dots,e_n$ или, что то же самое, отождествить ее пространство с некоторым стандартным n-мерным пространством E, то задание умножения сводится к заданию билинейного отображения $c\colon E\otimes E\to E$, удовлетворяющего соотношениям $c(x,y)=c(y,x)$ и $c(c(x,y),z)=0$, которые определяют замкнутую подсхему $\mathcal{A}_n$ во множестве всех билинейных отображений. Если пользоваться базисом $e_1,\dots,e_n$, то умножение задается структурными константами $c^k_{ij}\colon e_ie_j=\sum\limits_1^n c^k_{ij}e_k$, а уравнения схемы $\mathcal{A}_n$ принимеют вид

$$c^k_{ij} = c^k_{ji},\quad \sum_{k,m=1}^{n} c^k_{ij}\, c^m_{k\ell} = 0,\qquad i,j,\ell = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Схема $\mathcal{A}_n$ является классифицирующим пространством (или многообразием модулей) для таких объектов - алгебр указанного типа с выделенным базисом (аналогично тому, как в [2], т. II, с. 124).

Для каждой алгебры N обозначим через N^2 подалгебру, порожденную элементами $xy, x,y\in N$, а через N_0 - аннулятор алгебры N, т.е. множество тех $x\in N$, для которых $xy=0$ для всех $y\in N$. Условие $N^3=0$, очевидно, эквивалентно тому, что $N^2\subset N_0$. Обозначим через $\mathcal{A}_{n,r}$ подсхему, определенную условиями $\dim N^2\le r$, $\dim N_0\ge r$. Она задается условиями $\mathrm{rg}\{e_ie_j, i,j=1,\dots,n\}\le r$ и $\mathrm{rg}\{x\,|\,xe_i=0,\ i=1,\dots,n\}\ge r$, т.е. обращением в 0 некоторых миноров. Поэтому $\mathcal{A}_{n,r}$ - замкнутая подсхема в $\mathcal{A}_n$. Положим $d=n-r$. В алгебре, соответствующей точке схемы $\mathcal{A}_{n,r}$, можно выбрать часть базиса (обозначим его $f_1,\dots,f_k$, $k=\dim N^2$), лежащую в N^2, и дополнить до r векторов базиса $f_1,\dots,f_r$, лежащих в N_0. Наконец, оставшиеся векторы базиса обозначим через $e_1,\dots,e_d$. Тогда таблица умножения примет вид

$$\begin{gathered} e_ie_j = \sum_{s=1}^{r} a^s_{ij}\, f_s,\quad e_if_k = f_kf_\ell = 0,\\ i,j = 1,\dots,d;\qquad k,\ell = 1,\dots,r, \end{gathered} \tag{2}$$

где $A^s=(a^s_{ij})$ - симметрические матрицы. Наоборот, любая такая таблица умножения определяет алгебру, соответствующую точке схемы $\mathcal{A}_{n,r}$. Через $U_{n,r}\subset\mathcal{A}_{n,r}$ обозначим подсхему, выделенную условиями $\mathrm{rg}\, N^2=r$, $\mathrm{rg}\, N_0=r$. Первое условие означает, что система $\frac{d(d+1)}{2}$ векторов $\xi_{ij}=\{a^s_{ij}, s=1,\dots,r\}$ в r-мерном пространстве имеет ранг r. Для этого необходимо, чтобы было $r\le\frac{d(d+1)}{2}$. Поэтому при $r>\frac{d(d+1)}{2}$ $U_{n,r}$ пусто. Если же $r\le\frac{d(d+1)}{2}$, то первое условие равносильно тому, что симметрические матрицы $A^s=(a^s_{ij})$ линейно независимы. Второе же условие равносильно тому, что уравнения $A^sx=0$, $s=1,\dots,r$ не имеют ненулевого решения, т.е. ядра линейных преобразований A^s, $s=1,\dots,r$ пересекаются только по 0.

Теорема 1. *Неприводимые компоненты схемы $\mathcal{A}_n$ совпадают с $\mathcal{A}_{n,r}$ при $1\le r\le\frac{d(d+1)}{2}$. Они приведены, и подсхемы $U_{n,r}$ в них открыты, гладки и совпадают с множеством их простых точек. Их размерность равна $\frac{d(d+3)}{2}\cdot r$.*

Очевидно, что если $\xi\in\mathcal{A}_n$, то $\xi\in\mathcal{A}_{n,r}$, где $r=\dim N^2$, а N - алгебра, соответствующая ξ. В записи (2) тогда векторы $\xi_{ij}=\{a^s_{ij}, s=1,\dots,r\}$ линейно независимы, а отсюда, как мы видели, $r\le\frac{d(d+1)}{2}$. Кроме того, $\mathcal{A}_{n,0}$ соответствует $a^s_{ij}=0$, и, значит, $\mathcal{A}_{n,0}\subset\mathcal{A}_{n,r}$ при всех $r\ge 1$. Поэтому

$$\mathcal{A}_n = \bigcup_r \mathcal{A}_{n,r}\quad \text{для}\quad 1 \le r \le \frac{d(d+1)}{2}. \tag{3}$$

Обозначим через $S_{n,r}$ множество таблиц умножения вида (2). Тогда $\mathcal{A}_{n,r}=G\cdot S_{n,r}$, где $G=\mathrm{GL}(n)$ действует на $\mathcal{A}_n$ через действие на векторы $e_1,\dots,e_n$. Поэтому $\mathcal{A}_{n,r}$ неприводимо.

Очевидно, что при общих a^s_{ij} в формулах (2) и при $r\le\frac{d(d+1)}{2}$ система векторов $\xi_{ij}=\{a^s_{ij}, s=1,\dots,r\}$ в r-мерном пространстве имеет ранг r, и, значит, $\mathrm{rg}\ N^2=r$. Точно так же при $r\ge1$ общая матрица A^s невырождена и, значит, $\mathrm{rg}\ N_0=r$. Таким образом, $U_{n,r}$ открыто в $\mathcal{A}_{n,r}$ при $1\le r\le\frac{d(d+1)}{2}$. Но очевидно, что $U_{n,r}$ и $U_{n,r'}$ не пересекаются при $r\ne r'$, и, значит, (3) есть разложение $\mathcal{A}_n$ на неприводимые компоненты.

Из (2) видно, что $\dim S_{n,r}=\frac{d(d+1)}{2}\cdot r$. Рассматривая отображение $G\times S_{n,r}\to G\cdot S_{n,r}=$ $=\mathcal{A}_{n,r}$, $(g,\xi)\to g(\xi)$, мы получаем, что

$$\dim \mathcal{A}_{n,r} = \dim G + \dim S_{n,r} - \dim F, \tag{4}$$

где F – общий слой этого отображения.

Очевидно, что слой над точкой $\xi_0\in S_{n,r}$ состоит из пар (g,ξ), где $g(\xi)=\xi_0$, т.е. $g^{-1}(\xi_0)\in S_{n,r}$. Отсюда следует, что $g^{-1}(e_1),\dots,g^{-1}(e_d)$, $g^{-1}(f_1),\dots,g^{-1}(f_r)$ имеют таблицу умножения вида (2), и, значит, если $\xi_0\in U_{n,r}$, то $g^{-1}(f_i)\in N^2=\{f_1,\dots,f_r\}$. Т.е. g принадлежат параболической подгруппе, состоящей из преобразований, сохраняющих подпространство $\{f_1,\dots,f_r\}$, размерность которой равна d^2+rd+r^2. Подставляя в (4), получаем, ввиду $\dim G=(d+r)^2$, что

$$\dim \mathcal{A}_{n,r}=\frac{d(d+3)}{2}\cdot r.$$

Наконец, чтобы доказать приведенность схемы $\mathcal{A}_{n,r}$, нам надо вычислить размерность касательного пространства в ее общей точке $\xi\in\mathcal{A}_{n,r}$. Пусть ей соответствует алгебра N. Дифференцируя соотношения (1), мы получаем (например, аналогично [2], т. I, с. 115), что оно изоморфно пространству билинейных форм $c(x,y)$ на пространстве алгебры N, удовлетворяющих соотношениям

$$c(x,y) = c(y,x), \quad c(x,y)z + c(xy,z) = 0, \qquad x,y,z \in N. \tag{5}$$

Пространство решений уравнений (5) обозначим через $V^1(N,N)$.

Из (5) следует, что $c(N,N_0)\subset N_0$, поэтому c определяет линейное отображение $c\colon S^2(N/N_0)\to N/N_0$, где S^2 обозначает симметрический квадрат. Докажем, что оно дополняется до коммутативного треугольника

$$\begin{tikzcd} S^2(N/N_0) \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "m"'] & & N/N_0 \\ & N^2 \arrow[ur, "\psi_0"'] & \end{tikzcd},$$

где m обозначает умножение в N, а ψ_0 – некоторое линейное преобразование. Для этого достаточно доказать, что c обращается в 0 на ядре m, т.е. что из $\sum x_iy_i=0$ следует, что $\sum c(x_i,y_i)\in N_0$. Это очевидно, так как

$$(\sum c(x_i,y_i))z = -\sum c(x_iy_i,z) = -c(\sum x_iy_i,z) = 0.$$

Положим $c(x,y)-\psi(xy)=\xi(x,y)$, где ψ – подъем ψ_0 до отображения в N. Тогда $\xi(x,y)\in N_0$, а из (5) следует, что $\xi(N,N^2)=0$.

Таким образом, все решения уравнений (5) представляются в виде $c(x,y)=\xi(x,y)+\psi(x,y)$, где $\xi\in\mathrm{Hom}(S^2(N/N^2),N_0)$, $\psi\in\mathrm{Hom}(N^2,N)$.

При этом пересечение пространств билинейных форм $\xi(x,y)$ и $\psi(xy)$, $\psi\in\mathrm{Hom}(N^2,N)$ состоит из $\psi\in\mathrm{Hom}(N^2,N_0)$. Поэтому размерность касательного пространства в точке ξ равна

$$(\dim S^2(N/N^2))\dim N_0+\dim N^2\cdot\dim N-\dim N^2\dim N_0. \qquad (6)$$

Если $\dim N/N^2=d$, $\dim N^2=r, \dim N_0=r'$, то $\dim S^2(N/N^2)=\frac{d(d+1)}{2}$, и выражение (6) приобретает вид $\frac{d(d+1)}{2}r'+nr-rr'=\left(\frac{d(d+1)}{2}-r\right)r'+nr$. Так как $r\le r'$ и $r\le\frac{d(d+1)}{2}$, то оно принимает максимальное значение в точности при $r'=r$, и тогда это значение равно $\frac{d(d+3)}{2}\cdot r$.

Этим доказаны все утверждения теоремы.

Замечание. Из теоремы следует, что число неприводимых компонент $\mathcal{A}_{n,r}$ многообразия $\mathcal{A}_n$ равно $[n+3/2-\sqrt{2n+9/4}]$. Размерности многообразий $\mathcal{A}_{n,r}$ сначала монотонно растут с ростом r, а потом, достигнув некоторого максимума, монотонно убывают. Например, при $n=9$ для $r=1,2,3,4,5,6$ эти размерности равны 44, 70, 81, 80, 70, 54.

§ 2. Тангенциальные когомологии алгебр класса 2

Перейдем к рассмотрению произвольных коммутативных алгебр. Мы введем аналогично предыдущему классифицирующее пространство для множества алгебр с отмеченным базисом, причем рассмотрим два случая - совершенно произвольных коммутативных ассоциативных алгебр и алгебр с единицей. В первом случае мы получим для алгебр размерности n схему с уравнениями

$$c^k_{ij}=c^k_{ji},\quad \sum_{k,m=1}^{n}c^k_{ij}c^m_{k\ell}=\sum_{k,m=1}^{n}c^m_{ik}c^k_{j\ell};\quad i,j,\ell=1,\dots,n, \qquad (7)$$

которую обозначим $\mathcal{C}_n$. Во втором случае мы будем рассматривать алгебры размерности $n+1$ с базисом $e_0=1,e_1,\dots,e_n$. В качестве классифицирующего пространства получим схему, определенную уравнениями (7), где теперь $i,j,k,\ell,m=0,\dots,n$ и $c^k_{0j}=\delta^k_j$. Мы обозначим ее через $\tilde{\mathcal{C}}_n$.

Касательное пространство к схеме $\mathcal{C}_n$ в точке, соответствующей алгебре A, состоит из билинейных функций на A, $\varphi(x,y)\in A$, $x,y\in A$, удовлетворяющих соотношениям

$$\varphi(y,x)=\varphi(x,y),\quad \varphi(x,y)z+\varphi(xy,z)=x\varphi(y,z)+\varphi(x,yz). \qquad (8)$$

В случае схемы $\tilde{\mathcal{C}}_n$ добавляются условия $\varphi(1,x)=0$.

Напомним стандартные обозначения. Если M - модуль над алгеброй A, то билинейная функция $\varphi(x,y)\in M$, $x,y\in A$, называется коциклом, если она удовлетворяет соотношениям (8). Пространство коциклов обозначается через $Z^1(A,M)$. Если алгебра A обладает единицей, то пространство коциклов с условием $\varphi(1,x)=0, x\in A$, обозначается $\tilde{Z}^1(A,M)$. Таким образом, касательное пространство к схеме $\mathcal{C}_n$ в точке, соответствующей алгебре A, совпадает с $Z^1(A,A)$, а к схеме $\tilde{\mathcal{C}}_n$ - $\tilde{Z}^1(A,A)$. Если ψ любое линейное отображение $A\to M$, то коциклом является $\varphi(x,y)=\psi(xy)-x\psi(y)-y\psi(x)$. Пространство таких коциклов обозначается $B^1(A,M)$. В случае алгебр с единицей дополнительно налагается условие $\psi(1)=0$. Пространство $T^1(A,M)=Z^1(A,M)/B^1(A,M)$

называется первым пространством тангенциальных когомологий (или вторым пространством когомологий Харрисона). Легко видеть, что $\tilde{Z}^1(A,M)/\tilde{B}^1(A,M)=T^1(A,M)$. Известно, что если $0\longrightarrow M_1\longrightarrow M_2\longrightarrow M_3\longrightarrow 0$ - точная последовательность A-модулей, то точна последовательность

$$0\longrightarrow \mathrm{Der}(A,M_1)\longrightarrow \mathrm{Der}(A,M_2)\longrightarrow \mathrm{Der}(A,M_3)\longrightarrow T^1(A,M_1)\longrightarrow T^1(A,M_2)\longrightarrow T^1(A,M_3),$$

где $\mathrm{Der}(A,M)$ - пространство K-дифференцирований A в M (см. [3] или [4]).

В качестве вспомогательного результата нам нужно будет вычислить пространство $T^1(N,K)$, где K - основное поле, на которое N действует нулевым образом. Пространство $T^1(N,K)$ равно, следовательно, фактор-пространству пространства билинейных форм $\lambda(x,y)\in K$, $x,y\in N$, удовлетворяющих условиям

$$\lambda(y,x) = \lambda(x,y), \quad \lambda(xy,z) = \lambda(x,yz)$$
$$x,y,z \in N$$

по пространству форм вида $\lambda(x,y)=\mu(x,y)$, где $\mu:N\longrightarrow K$ - любая линейная форма.

Мы будем называть коцикл $\lambda(x,y)$ стандартным, если $\lambda(N,N^2)=0$.

Для изучения пространства $T^1(N,K)$ полезно воспользоваться другой его интерпретацией. Обозначим через $\mathfrak{D}_d$ кольцо формальных степенных рядов от переменных $t_1,\dots,t_d$, $d=\dim N/N^2$, а через M - максимальный идеал кольца $\mathfrak{D}_d$. Представим алгебру N в виде $N=M/I$, где $I\subset M$ - идеал, причем даже $I\subset M^2$, что, очевидно, возможно. Надо только отобразить e_i в t_i при $i=1,\dots,d$. Согласно лемме Накаямы, $e_1,\dots,e_d$ являются образующими алгебры N, и мы получим нужное представление $N=M/I$. Иначе говоря, мы имеем точную последовательность I-модулей $0\longrightarrow I\longrightarrow M\longrightarrow N\longrightarrow 0$, из которой вытекает точность последовательности $\mathrm{Der}_M(M,K)\xrightarrow{\alpha}\mathrm{Der}_M(I,K)\longrightarrow T^1(N,K)\longrightarrow 0$, где Der_M означает M-дифференцирования, а M действует на K нулевым образом. В нашем случае, очевидно, $\mathrm{Der}_M(I,K)\simeq\mathrm{Hom}_K(I/IM,K)$, а $\alpha(\mathrm{Der}_M(M,K))=0$. Поэтому $T^1_M(N,K)\simeq\mathrm{Hom}_K(I/IM,K)$ (см., например, [4]). Это сопоставление легко явно задать. Если $\xi\in\mathrm{Hom}_K(I/IM,K)$, а $\sigma:N\longrightarrow M$ - некоторое сечение гомоморфизма $M\longrightarrow N$, то $\lambda(x,y)=$ $=\xi(\sigma(x)\sigma(y)-\sigma(xy))$ определяет коцикл, лежащий в классе когомологий пространства $T^1(N,K)$, соответствующем линейной форме ξ.

Выясним, когда все циклы являются стандартными. Если $x\in N$, $y\in N^2$, то $xy=0$ и стандартность означает, что $\xi(\sigma(x)\sigma(y))=0$. Если стандартны коциклы, соответствующие всем линейным формам ξ, то $\sigma(x)\sigma(y)\in IM$ для всех $x\in N$, $y\in N^2$, т.е. $\sigma(N)\sigma(N^2)\subset IM$. Обозначим через $I^{(k)}$ и $M^{(k)}$ однородные составляющие степени k идеалов I и M.

Мы можем выбрать σ так, что $\sigma(e_i)\in M^{(1)}$, $\sigma(N^2)\subset M^{(2)}$. Тогда $M^{(1)}=I^{(1)}$, $M^{(2)}=I^{(2)}+\sigma(N^2)$ и $M^{(3)}=M^{(1)}M^{(2)}=I^{(2)}M^{(1)}+\sigma(N^2)M^{(1)}$. Поэтому наше условие $\sigma(N)\sigma(N^2)\subset IM$ дает $M^{(3)}=I^{(2)}M^{(1)}$. Очевидно, и наоборот, если $M^{(3)}=I^{(2)}M^{(1)}$, то $\sigma(e_i)\sigma(N^2)\subset M^{(3)}=I^{(2)}M^{(1)}$, и тогда $\sigma(N)\sigma(N^2)\subset IM$. Пространство $I^{(2)}$ состоит из $\frac{d(d+1)}{2}-r=\rho$ квадратичных форм $F_1,\dots,F_\rho$, и мы видим, что для алгебры N все циклы являются стандартными тогда и только тогда, когда для форм $F_1,\dots,F_\rho$, порождающих пространство $I^{(2)}$, формы x_iF_j, $i=1,\dots,d$; $j=1,\dots,\rho$ порождают пространство $M^{(3)}$. Тогда, конечно, формы $F_1,\dots,F_\rho$ порождают и весь идеал I. Иными словами, алгебра N

является „квадратичной" - она определяется квадратичными соотношениями $F_1,\dots,F_\rho$. (Напомним, что для произвольной алгебры N с $N^3=0$ верно лишь соотношение $I=(F_1,\dots,F_\rho,M^3)$).

Из этих соображений очевидно, что при $\rho<\frac{(d+1)(d+2)}{6}$ на алгебре N обязательно существуют нестандартные коциклы. Действительно, число форм x_iF_j тогда равно $d\rho<\frac{d(d+1)(d+2)}{6}$, и они не могут порождать все пространство $M^{(3)}$. Пусть в этих условиях $\lambda(x,y)$ - нестандартный коцикл. Так как $\lambda(N^2,N^2)=0$, то он устанавливает спаривание пространств N/N^2 и N^2 со значениями в K. Так как $r=\frac{d(d+1)}{2}-\rho>\frac{d^2-1}{3}$, то $r>d$ при $d\geq 2$, и поэтому существует такое $f_0\in N^2, f_0\neq 0$, что $\lambda(N,f_0)=0$. В этом случае мы можем включить алгебру N в неприводимое семейство алгебр, общая алгебра которого уже не удовлетворяет условию $N^3=0$. Достаточно ввести в алгебре N новое умножение

$$x\circ y=xy+t\lambda(x,y)f_0.$$

Тогда $(x\circ y)\circ z=xyz+t\lambda(xy,z)f_0=t\lambda(xy,z)f_0$ и ассоциативность следует из того, что $\lambda\in T^1(N,K)$.

Таким образом, нами доказано

Предложение. *Если $r>\frac{d^2-1}{3}$, то компонента $\mathcal{A}_{n,r}$ не составляет компоненты в схеме $\mathcal{C}_n$ (является собственной подсхемой некоторой компоненты).*

Дальше нам понадобится обращение этого результата - утверждение, что все циклы $\lambda\in T^1(N,K)$ стандартны для алгебры, соответствующей общей точке компоненты $\mathcal{A}_{n,r}$, если $r\leq\frac{d^2-1}{3}$, т.е. $\rho\geq\frac{(d+1)(d+2)}{6}$. Это, ввиду сказанного выше, вытекает из следующего утверждения.

Лемма 1. *Если $\rho\geq\frac{(d+1)(d+2)}{6}$ и $F_1,\dots,F_\rho$ - общие квадратичные формы от d переменных, то формы x_iF_j, $i=1,\dots,d$; $j=1,\dots,\rho$ порождают все кубические формы.*

Обозначим пространство линейных форм от d переменных через E. Тогда квадратичные формы составляют пространство S^2E, а кубические - S^3E. В двукратно проективном пространстве $\mathbb{P}(E^\rho)\times\mathbb{P}((S^2E)^\rho)$ рассмотрим многообразие Γ, заданное уравнениями $\ell_1F_1+\dots+\ell_\rho F_\rho=0$, где $(\ell_1,\dots,\ell_\rho)\in E^\rho$, $(F_1,\dots,F_\rho)\in(S^2(E))^\rho$. Множество тех точек из Γ, для которых ранг системы форм $\ell_1,\dots,\ell_\rho$ равен p, обозначим через Γ_p. Тогда $\Gamma=\cup\overline{\Gamma}_p$, где $p=1,\dots,d$, а $\overline{\Gamma}_p$ обозначает замыкание Γ_p. Вычислим $\dim\overline{\Gamma}_p$. При проекции $p_1:\Gamma_p\to\mathbb{P}(E^\rho)$ слой $p_1^{-1}(L)$, $L=(\ell_1,\dots,\ell_\rho)\in E^\rho$ состоит из тех $F_1,\dots,F_\rho$, для которых $\ell_1F_1+\dots+\ell_\rho F_\rho=0$. Пусть сначала $\rho=p$, т.е. $\ell_1,\dots,\ell_p$ линейно независимы. Тогда мы можем считать их независимыми переменными $x_1,\dots,x_p$. Комплекс Кошуля (см. [5], гл. VIII, § 4) даст точную последовательность

$$0\longleftarrow\Phi\xleftarrow{\alpha}E^{\frac{p(p-1)}{2}}\xleftarrow{\beta}K^{\frac{p(p-1)(p-2)}{6}}\longleftarrow 0,\tag{9}$$

где Φ состоит из $(F_1,\dots,F_p)$, для которых $\sum_1^p x_iF_i=0$, $E^{\frac{p(p-1)}{2}}$ состоит из

$\{\ell_{ij}\}, -\ell_{ji}=\ell_{ij}, i,j=1,\ldots,p,\ \ell_{ij}\in E$ и $\alpha(\{\ell_{ij}\})=(F_1,\ldots,F_p),\ F_i=\sum_{j=1}^{p}\ell_{ij}x_j$. Наконец, $K^{\frac{p(p-1)(p-2)}{6}}=\{c_{ijk}|c_{ijk}\in K$ и кососимметричны$\}$, а $\beta=(\{c_{ijk}\})=\{\ell_{ij}\},\ \ell_{ij}=\sum_{k=1}^{p}c_{ijk}x_k$.

Из точной последовательности (9) следует, что

$$\dim\Phi=\frac{p(p-1)}{2}d-\frac{p(p-1)(p-2)}{6}=\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6}. \qquad (10)$$

Пусть теперь $p\le\rho$ любое и $\ell_1,\ldots,\ell_p$ линейно независимы, а $\ell_{p+j}=\sum_{i=1}^{p}\gamma_{ij}\ell_i$, $j=1,\ldots,\rho-p$. Соотношение $\sum_1^{\rho}\ell_iF_i=0$ переписывается как $\sum_{i=1}^{p}\ell_i(F_i+\sum_j\gamma_{ij}F_{p+j})=0$. Если $F_i+\sum_{j=1}^{\rho-p}\gamma_{ij}F_{p+j}=G_i$, $i=1,\ldots,p$, то $\sum_{i=1}^{p}\ell_iG_i=0$, так что размерность пространства таких наборов $(G_1,\ldots,G_p)$ задается формулой (10), а $F_i=G_i-\sum_{j=1}^{\rho-p}\gamma_{ij}F_{p+j}$, где F_{p+j}, $j=1,\ldots,\rho-p$ произвольные. Поэтому размерность пространства решений уравнений $\sum_1^{\rho}\ell_iF_i=0$ равна $\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6}+(\rho-p)\frac{d(d+1)}{2}$ и, значит,

$$\dim p_1^{-1}(\xi)=\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6}+(\rho-p)\frac{d(d+1)}{2}-1.$$

Так как множество систем $\xi=(\ell_1,\ldots,\ell_\rho)$, $\xi\in p_1(\Gamma_p)$ имеет размерность $p(d+\rho-p)-1$, то

$$\dim\Gamma_p=\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6}+(\rho-p)\frac{d(d+1)}{2}+p(d+\rho-p)-2. \qquad (11)$$

Из неприводимости $p_1(\Gamma_p)$ следует, что и Γ_p неприводимо.

Рассмотрим теперь отображение $(\ell_1,\ldots,\ell_\rho)\longmapsto\sum_1^{\rho}\ell_iF_i$ для некоторых общих форм $(F_1,\ldots,F_\rho)=F$. Оно определяет морфизм

$$\varphi_F:\ \mathbb{P}(E^\rho)\setminus p_1p_2^{-1}(F)\longrightarrow\mathbb{P}(S^3(E)).$$

Нам надо доказать, что при общих F_i и при $\rho\ge\frac{(d+1)(d+2)}{6}$ этот морфизм эпиморфен. Если это не так, то для точки $\eta\in\mathbb{P}(S^3(E))$, принадлежащей образу φ_F,

$$\dim\varphi_F^{-1}(\eta)>\dim\mathbb{P}(E^\rho)-\dim\mathbb{P}(S^3(E))=d\rho-\frac{d(d+1)(d+2)}{6}. \qquad (12)$$

Но для всех точек образа морфизма φ_F размерность $\varphi_F^{-1}(\eta)$ одна и та же и равна $\dim p_2^{-1}(F)+1$ при проекции p_2: $\Gamma\to\mathbb{P}((S^2(E)|^\rho)$. Поэтому (12) равносильно тому, что

$$\dim p_2^{-1}(F)>d\rho-\frac{d(d+1)(d+2)}{6}-1$$

для общего F. Но тогда

$$\dim \Gamma > d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d+1)}{2}\rho - 2.$$

Нам надо доказать, следовательно, что

$$\dim \Gamma \le d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} - \frac{d(d+1)}{2}\rho - 2.$$

Т.е. ввиду (11) (и так как $\Gamma=\cup\overline{\Gamma}_p$), то

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} + (\rho-p)\frac{d(d+1)}{2} + p(d+\rho-p) \le d\rho - \frac{d(d+1)(d+2)}{6} + \frac{d(d+1)}{2}\rho$$

для всех $p\le d$ при $\rho\ge\frac{(d+1)(d+2)}{6}$.

Сокращая в обеих частях член $\rho\frac{d(d+1)}{2}$, мы получаем неравенство

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} - p\frac{d(d+1)}{2} + p(d-p) + (p-d)\rho + \frac{d(d+1)(d+2)}{6} \le 0.$$

Так как $p\le d$, то мы можем заменить ρ на $\frac{(d+1)(d+2)}{6}$ и, значит, нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{p(p-1)(3d-p+2)}{6} - p\frac{d(d+1)}{2} + p(d-p) + p\frac{(d+1)(d+2)}{6} \le 0.$$

Левая часть его равна, как легко видеть, $\frac{1}{6}p(d-p)(p-2d+3)$ и поэтому неположительна.

Дальше нам понадобится утверждение, аналогичное лемме 1, также и для кососимметрических форм.

Лемма 2. *Пусть $\alpha_i\in\Lambda^2E$, $i=1,\dots,\rho$ - общие бивекторы в d-мерном пространстве E. Соотношение $\alpha_1\wedge\ell_1+\dots+\alpha_\rho\wedge\ell_\rho=0$, где $\ell_i\in E$, тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда $\rho>\frac{(d-1)(d-2)}{6}$ или $d=5,\rho>1$.*

Одна часть утверждения очевидна: если $\rho>\frac{(d-1)(d-2)}{6}$, то уравнение $\sum\alpha_i\wedge\ell_i=0$ равносильно $\frac{d(d-1)(d-2)}{6}$ линейным уравнениям (приравнивание нулю координат три первых вектора), а число неизвестных равно $d\rho$ и в нашем случае больше числа уравнений.

Пусть $\rho\le\frac{(d-1)(d-2)}{6}$. В пространстве $\mathbb{P}(E^\rho)\times\mathbb{P}((\Lambda^2E)^\rho)$ рассмотрим многообразие Γ, состоящее из таких $(\ell_1,\dots,\ell_\rho;\ \alpha_1,\dots,\alpha_\rho)$, что $\sum\alpha_i\wedge\ell_i=0$, и многообразия Γ_p, для которых $\mathrm{rg}(\ell_1,\dots,\ell_\rho)=p$, $p\le\rho$. Пусть $p=\rho$ и $\ell_1,\dots,\ell_p$ фиксированы и линейно независимы. Рассмотрим комплекс Кошуля (см. [6], с. 133)

$$0 \longleftarrow \Phi \xleftarrow{\alpha} E^{\frac{p(p-1)}{2}} \xleftarrow{\beta} K^{\frac{p(p+1)(p+2)}{6}} \longleftarrow 0, \tag{13}$$

где Φ состоит из $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, для которых $\sum\alpha_i\wedge\ell_i=0$, $E^{\frac{p(p+1)}{2}}$ состоит из векторов $\varphi_{ij}\in E$, $\varphi_{ji}=\varphi_{ij}$ и $\alpha(\{\varphi_{ij}\})=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$, $\alpha_i=\sum\varphi_{ij}\wedge\ell_j$, а $K^{\frac{p(p+1)(p+2)}{6}}$ – из констант $c_{ijk}\in K$, c_{ijk} симметричны по i,j,k и $\beta(\{c_{ijk}\})=\{\varphi_{ij}\}$, $\varphi_{ij}=\sum c_{ijk}\ell_k$.

Из точности последовательности (13) следует, что

$$\dim\Phi = \frac{p(p+1)}{2}d - \frac{p(p+1)(p+2)}{6} = \frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6}.$$

Пусть $p\le\rho$ любое и $\ell_1,\dots,\ell_p$ независимы.

Рассуждая как и в лемме 1, получим, что множество $\alpha_1,\dots,\alpha_\rho$ решений уравнения $\sum_1^\rho \alpha_i\wedge\ell_i=0$ имеет размерность

$$\frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p)\frac{d(d-1)}{2}.$$

Рассмотрим проекцию $p_1\colon\Gamma_p\longrightarrow\mathbb{P}(E^\rho)$. Так как $p_1(\Gamma_p)$ неприводимо и имеет размерность $p(d+\rho-p)-1$, то Γ_p неприводимо и

$$\dim\Gamma_p = \frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p)\frac{d(d-1)}{2} + p(d+\rho-p) - 2. \tag{14}$$

Докажем, что $\dim\Gamma<\dim\mathbb{P}((\Lambda^2E)^\rho)$ – это и даст утверждение леммы 2. Ввиду (14) наше неравенство равносильно тому, что для всех $p\le d$

$$\frac{p(p+1)(3d-p-2)}{6} + (\rho-p)\frac{d(d-1)}{2} + p(d+\rho-p) \le \rho\frac{d(d-1)}{2}.$$

Сокращая обе части на $\rho\frac{d(d-1)}{2}$ и деля на p, получим неравенство

$$\frac{(p+1)(3d-p-2)}{6} - \frac{d(d-1)}{2} + \rho+d-p\le 0.$$

Так как $\rho\le\frac{(d-1)(d-2)}{6}$, то достаточно доказать неравенство

$$\frac{(p+1)(3d-p-2)}{6} - \frac{d(d-1)}{2} + \frac{(d-1)(d-2)}{6} + d-p\le 0.$$

Левая часть его равна, как легко проверить,

$$\frac{1}{6}(d-p)(p-2d+9). \tag{15}$$

Так как $p\le d$, то выражение (15) может быть положительным лишь при $d\le 8$ и $p<d$. Но условие $p\le\rho\le\frac{(d-1)(d-2)}{6}$ показывает, что оно неположительно во всех оставшихся

случаях $d=8,7,\dots,3$, кроме $d=5$ (относительно случая $\rho=p=1$ при $d=4$ (см. замечание 3 в конце работы).

Проверим, что в случае $d=5$ мы действительно имеем исключение, т.е. уравнение $\alpha\wedge x+\beta\wedge y=0$, где $\alpha,\beta\in\Lambda^2E$, $x,y\in E$, $\dim E=5$, всегда имеет ненулевое решение для общих α и β. Ввиду того, что 5 - нечетное число, бивектор β вырожден, т.е. его можно записать в некотором базисе $e_1,\dots,e_5$ в виде $e_1\wedge e_2+e_3\wedge e_4$. Положим $\alpha=\alpha_0+u\wedge e_5$, где $u\in E_0=Ke_1+\dots+Ke_4$, $\alpha_0\in\Lambda^2E_0$. Положив $x=u$, мы получим, что $\alpha_0\wedge u+\beta\wedge y=0$. Будем искать y как вектор из E_0. Отображение $\varphi_\beta\colon E_0\longrightarrow\Lambda^3E_0$, $z\longrightarrow z\wedge\beta$ невырождено, и поэтому мы можем положить $y=-\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha(u)$.

§ 3. Деформации алгебр класса 2

Для любой нильпотентной алгебры N алгебра $A=K\cdot1+N$ является локальной, а для любой локальной конечномерной алгебры A ее радикал N нильпотентен и $A=K\cdot1+N$. Таким образом, существует взаимно-однозначное соответствие между нильпотентными алгебрами размерности n и локальными алгебрами размерности $n+1$, рассматриваемыми с точностью до изоморфизма. Однако нас будут интересовать алгебры с фиксированным базисом, и здесь ситуация требует отдельного рассмотрения.

Пусть A - локальная конечномерная алгебра и N - ее радикал. Из точной последовательности A-модулей $0\longrightarrow N\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}K\longrightarrow0$ вытекает точная последовательность

$$0\longrightarrow\mathrm{Der}(A,N)\longrightarrow\mathrm{Der}(A,A)\longrightarrow(A,K)\xrightarrow{\delta_1}T^1(A,N)\xrightarrow{T^1(\alpha)}T^1(A,A)\xrightarrow{T^1(\beta)}T^1(A,K). \qquad (16)$$

Лемма 3. *Если* $N^3=0$, $r=\dim N^2>2$, *то для общей алгебры* $A=K\cdot1+N$ *гомоморфизм* $T^1(\beta)$ *нулевой.*

Ввиду изоморфизмов $T^1(A,M)\simeq\tilde{T}^1(A,M)=T^1(N,M)$ мы можем заменить $T^1(A,M)$ на $T^1(N,M)$.

Запишем коцикл Φ из $T^1(N,A)$ в виде $\Phi(x,y)=\varphi(x,y)+\lambda(x,y)$, где $\lambda(x,y)\in T^1(N,K)$, $\varphi\in N$. Условие коцикла имеет вид

$$\lambda(x,y)z+\varphi(x,y)z+\lambda(xy,z)+\varphi(xy,z)=x\lambda(y,z)+x\varphi(y,z)+\lambda(xy,z)+\varphi(xy,z). \qquad (17)$$

Если $y\in N^2$, то отсюда $\lambda(x,y)z\equiv x\lambda(y,z)(\mathrm{mod}N^2)$, и выбирая z, непропорциональным x, получаем $\lambda(N,N^2)=0$. Теперь соотношение (17) дает $\varphi(x,y)z=x\varphi(y,z)$ при $y\in N^2$. Фиксируем y и положим $\varphi(x,y)=\psi(x)$. Докажем, что при сделанных об алгебре N предположениях отображение $\psi\in\mathrm{End}(N/N^2)$, обладающее свойством $\psi(x)z=x\psi(z)$, имеет вид $\psi(x)\equiv\alpha x(\mathrm{mod}N^2)$.

Введем в алгебре N базис с таблицей умножения (2) и предположим, что матрицы A^1 и A^2 имеют простой спектр, т.е. форма $\det(t_1A^1+t_2A^2)$ не имеет кратных множителей. Тогда заменой базиса $e_1,\dots,e_d$ мы можем сделать матрицы A^1 и A^2 диагональными, а A^1 - единичной. Положим $\psi(e_i)\equiv\sum\xi_i^ke_k(\mathrm{mod}N^2)$. Соотношение $\psi(e_i)e_j=e_i\psi(e_j)$ даст, если мы приравняем коэффициенты при f_1, что $\xi_i^j=\xi_j^i$. Пусть на диагонали матрицы A^2 стоят $\lambda_1,\dots,\lambda_d$, $\lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$. Приравнивая коэффициенты при

f_2, получаем $\lambda_i\xi_i^j=\lambda_j\xi_j^i$, а ввиду того, что $\xi_j^i=\xi_i^j$, $(\lambda_i-\lambda_j)\xi_i^j=0$. Поэтому $\xi_i^j=0$ при $i\neq j$, и мы можем записать ψ в виде $\psi(e_i)\equiv\xi_i e_i(\mathrm{mod} N^2)$. Наше соотношение $\psi(e_i)e_j=e_i\psi(e_j)$ даст теперь $\xi_i e_i e_j=\xi_j e_i e_j$. Так как алгебра N - общая для $r\geq 3$, то мы можем предполагать, что $e_i e_j\neq 0$ при всех i, j. Отсюда $\xi_i=\xi_j$.

Возвращаясь к $\varphi(x,y)$, мы можем теперь положить $\varphi(x,y)\equiv\xi(y)x(\mathrm{mod} N^2)$ при $y\in N^2$. Тогда соотношение (17) дает (ввиду $\lambda(n,N^2)=0$) $(\lambda(x,y)+\xi(xy))z=x(\lambda(y,z)+\xi(yz))$. Выбирая z непропорциональным x, получаем, что $\lambda(x,y)=-\xi(xy)$, т.е. λ - нулевой класс в $T^1(N,K)$.

Заметим, что в последовательности (16)

$$\mathrm{Der}(A,K) = \mathrm{Der}(N,K) = \mathrm{Hom}(N/N^2,K) = (N/N^2)^*,$$

так как N действует на K нулевым образом. Если $\ell\in(N/N^2)^*$, то $-(\delta_1\ell)(x,y)=\ell(x)y+\ell(y)x$. Из леммы 3 мы получаем

$$T^1(A,A) \simeq T^1(N,N)/\delta_1(N/N^2)^* \tag{18}$$

(при условиях, наложенных на N в лемме 3).

Лемма 4. *Пусть N - алгебра, соответствующая общей точке многообразия $\mathcal{A}_{n,r}$, причем $2<r\leq\frac{(d-1)(d-2)}{6}+2$ и $d\neq 5$. Тогда отображение $V^1(N,N)\longrightarrow T^1(A,A)$ имеет своим образом все пространство $T^1(A,A)$.*

Доказательство. Как мы видели, $T^1(A,A)\simeq T^1(N,A)$, и ввиду (18) нам достаточно доказать, что образ отображения $V^1(N,N)\longrightarrow T^1(N,N)$ порождает все пространство $T^1(N,N)$.

Пусть $\varphi\in Z^1(N,N)$. Рассматривая его образ $\tilde\varphi$ в $N/N^2\simeq K^r$, мы получаем, что $\tilde\varphi\in Z^1(N,K^r)$, где $N\cdot K=0$, и из леммы 1 получаем, что $\tilde\varphi(N,N^2)=0$, т.е. $\varphi(N,N^2)\subset N^2$.

Воспользовавшись тем, что алгебра N - общая, мы предположим, что в связке матриц $\alpha_1A^1+\ldots+\alpha_rA^r$ имеются две линейно-независимые матрицы с простым спектром. Тогда мы можем взять их за A^1 и A^2 и при помощи линейного преобразования в пространстве N/N^2 привести к виду $A^1=E$, A^2 - диагональная матрица с элементами $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ на диагонали.

Запишем теперь φ в явном виде

$$\begin{aligned}\varphi(e_i,e_j) &\equiv \sum_{m=1}^{d} \alpha_{ijm}e_m(\mathrm{mod}\ N^2),\quad i,j = 1,\ldots,d,\\ \varphi(e_i,f_s) &= \sum_{t=1}^{r} \beta_{is}^t f_t,\quad i=1,\ldots,d;\ s=1,\ldots,r.\end{aligned} \tag{19}$$

Если $\varphi\in B^1(N,N)$, то $\varphi(e,f)=-e\psi(f)$ для $e\in N$, $f\in N^2$, $\psi\in\mathrm{End}\ N$.

Обозначим через $C_i(f)$ коэффициент при f_i в разложении элемента $f\in N^2$ по базису $f_1,\ldots,f_r$. Ввиду сделанного выбора мы имеем $C_1(e_ie_j)=\delta_{ij}$, $C_2(e_ie_j)=\lambda_i\delta_{ij}$.

В частности, линейные формы $\xi_i(x)=C_1(e_ix)$ образуют взаимный базис к базису $e_1,\ldots,e_d$. Поэтому в виде $C_1(e_i\psi(f))$ можно получить любые d линейных форм на пространстве N^2, подбирая соответствующее отображение $\psi\in\mathrm{Hom}(N^2,N/N^2)$.

В частности, за счет выбора ψ мы можем добиться того, что $C_1(\varphi(e_i,f))=0$, т.е. $\beta^1_{is}=0$, $i=1,\dots,d$; $s=1,\dots,r$.

Кроме того, воспользуемся существованием коциклов $\varphi\in\delta_1((N/N^2)^*)$. Если $\ell\in(N/N^2)^*$, то $(\delta\ell)(e,f)=-\ell(e)f$. Из точности последовательности (16) следует, что эти коциклы являются кограницами в $T^1(N,A)$ (хотя и не в $T^1(N,N)$). Поэтому можно изменить φ на такой коцикл, не меняя его образа в $T^1(N,A)$. В частности, положим $\psi(f_s)=0$ при $s>1$, $\psi(f_1)\equiv\sum\alpha_i e_i(\mathrm{mod}N^2)$, $\ell(e_i)=\alpha_i$. Тогда $C_1(\ell(e_i)f_s-e_i\psi(f_s))=0$, а $C_2(\ell(e_i)f_2-e_i\psi(f_2))=\alpha_i$. В результате мы можем добиться того, что $\beta^1_{is}=0$, $\beta^2_{i2}=0$.

Рассмотрим теперь соотношение (17) для $x=e_i$, $y=e_j$, $z=e_k$. Пусть сначала $i\neq j\neq k\neq i$.

Приравнивая коэффициенты при f_1, мы получаем $\alpha_{ijk}=\alpha_{ikj}$, т.е. (ввиду $\alpha_{ij\ell}=\alpha_{ji\ell}$) симметричность α_{ijk} при $i\neq j\neq k\neq i$. Приравнивая коэффициенты, при f_2 получим

$$\alpha_{ijk}\lambda_k+\sum_{s\geq 3}a^s_{ij}\beta^2_{ks}=\alpha_{jki}\lambda_i+\sum_{s\geq 3}a^s_{jk}\beta^2_{is}$$

(суммирование по $s\geq 3$ ввиду условия $\beta^2_{k2}=0$). Отсюда ввиду симметрии α_{ijk} имеем

$$\alpha_{ijk}=\frac{\sum\limits_{s\geq 3}(a^s_{ij}\beta^2_{ks}-a^s_{jk}\beta^2_{is})}{\lambda_k-\lambda_i} \tag{20}$$

при $i\neq j\neq k\neq i$.

Симметрия α_{ijk} по i и j дает

$$\sum_{s\geq 3}(a^s_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)\beta^2_{ks}+a^s_{jk}(\lambda_j-\lambda_k)\beta^2_{is}+a^s_{ki}(\lambda_k-\lambda_i)\beta^2_{js})=0. \tag{21}$$

Матрицы $\Gamma^s=(a^s_{ij}(\lambda_i-\lambda_j))$ при $s\geq 3$ кососимметричны. Это коммутаторы $[A^s,A^2]$, где A^2 - диагональная матрица, имеющая $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ по диагонали. Более того, при надлежащем выборе матриц A^s, $s=3,\dots,r$, мы получим так любые $r-2$ кососимметрические матрицы - уравнения $a_{ij}(\lambda_i-\lambda_j)=b_{ij}$ разрешимы для любых $b_{ij},b_{ji}=-b_{ij}$ в виде $a_{ij}=\dfrac{b_{ij}}{\lambda_i-\lambda_j}$.

Введем бивекторы ω^s с матрицами Γ^s и векторы x_s с координатами β^2_{ks}. Тогда равенство (21) переписывается в виде $\sum\limits_{s\geq 3}\omega^s\wedge x_s=0$. Так как бивекторы ω^s мы можем считать общими, то, согласно лемме 2, отсюда следует, что $x_s=0$, т.е. $\beta^2_{ks}=0$ при $s\geq 3$. Так как по условию также и $\beta^2_{k2}=0$, то среди чисел β^2_{ks} остаются еще не определенными только β^2_{k1}. Мы положим $\beta^2_{k1}=\beta_k$. Из того, что $\beta^2_{ks}=0$ при $s\geq 3$, и из (20) следует, что $\alpha_{ijk}=0$ при $i\neq j\neq k\neq i$.

Положим теперь в соотношении (17) $x=y=e_i$, $z=e_j$, $i\neq j$. Приравнивая коэффициенты при f_1 в обеих частях равенства, получаем, что $\alpha_{iij}=\alpha_{iji}$.

Из рассмотрения коэффициентов при f_2 имеем $\alpha_{iij}\lambda_j+\beta_j=\alpha_{iji}\lambda_i$, откуда ввиду найденной симметрии $\alpha_{iij}=\dfrac{\beta_j}{\lambda_i-\lambda_j}$, т.е.

$$\varphi(e_i,e_j) \equiv \frac{\beta_j e_i-\beta_i e_j}{\lambda_i-\lambda_j} \pmod{N^2} \text{ при } i \neq j.$$

Рассмотрим теперь аналогично коэффициент при $f_s, s>2$. Полагая $i\neq j\neq k\neq i$, получаем

$$\frac{\beta_j a^s_{ik} - \beta_i a^s_{jk}}{\lambda_i - \lambda_j} + \sum_{t\geq 3} a^t_{ij}\beta^s_{kt} = \frac{\beta_k a^s_{ji} - \beta_j a^s_{ki}}{\lambda_j - \lambda_k} + \sum_{t\geq 3} a^t_{jk}\beta^s_{it}.$$

Это соотношение переписывается в виде

$$a^s_{ik}(\lambda_i-\lambda_k)\beta_j+a^s_{kj}(\lambda_k-\lambda_j)\beta_i+a^s_{ji}(\lambda_j-\lambda_i)\beta_k=(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_k-\lambda_j)\sum_{t\geq 3}(a^t_{ij}\beta^s_{kt}-a^t_{jk}\beta^s_{it}).$$

Слева стоит компонента с индексами i,j,k тривектора $\omega^s\wedge\beta$, где β - вектор с координатами β_k. Она кососимметрична по i,j и k. Кососимметричность правой части по i и j дает соотношение, которое можно записать в виде

$$\sum_{t\geq 3} \omega^t\wedge b^s_t = 0,$$

где b^s_t - вектор с координатами β^s_{kt}. Из леммы 2 мы получаем, что $b^s_t=0$, т.е. $\beta^s_{kt}=0$ при $t\geq 3$. Отсюда следует, что $\omega^s\wedge\beta=0$ и, значит, $\beta=0$, т.е. $\beta^2_{k1}=0$, а значит, $\alpha_{iij}=0$ при $i\neq j$.

Теперь остаются еще не найденными только $\alpha_{iii}=\xi_i$, $\beta^s_{k1}=\xi^s_k$ при $s\geq 3$ и $\beta^s_{k2}=\eta^s_k$ при $s\geq 3$. Мы имеем

$$\varphi(e_i,e_i)\equiv\xi_i e_i (\mathrm{mod} N^2),\ \varphi(x,f_s)=0 \text{ при } s\geq 3,$$

$$\varphi(e_i,f_1) = \sum_{s\geq 3} \xi^s_i f_s,\quad \varphi(e_i,f_2) = \sum_{s\geq 3} \eta^s_i f_s,$$

$$\varphi(e_i,e_j) \in N^2 \text{ при } i \neq j.$$

В соотношении (17) при $x=y=e_i$, $z = e_j$ рассмотрение коэффициента при f_s дает

$$\xi_i a^s_{ij} + \xi^s_j + \lambda_i\eta^s_j = 0. \tag{22}$$

Вычитая два уравнения этого типа (с одним и тем же s), мы получим, что $\eta^s_j = \dfrac{\xi_k a^s_{kj}-\xi_i a^s_{ij}}{\lambda_i - \lambda_k}$. Эта формула должна быть верна при всех k. Заменяя k на ℓ и приравнивая результаты, получим уравнение

$$\xi_k a_{kj}(\lambda_i-\lambda_\ell)+\xi_i a_{ij}(\lambda_\ell-\lambda_k)+\xi_\ell a_{\ell j}(\lambda_k-\lambda_i)=0. \tag{23}$$

Для четверки (i,j,k,ℓ) мы получим четыре таких уравнения. Определитель полученной системы, как легко проверить, равен пфаффиену матрицы $(a_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta))$, $\alpha,\beta=i,j,k,\ell$. Если не все $\xi_\alpha=0$, $\alpha=1,\dots,d$, то среди ξ_α, $\alpha=i,j,k,\ell$, тоже есть отличное от 0 - если хотя бы два $\xi_\alpha=\xi_\beta=0$, то из (23) следует что $\xi^s_j=\eta^s_j=\xi_i=0$. Поэтому в кососимметрической матрице $(a_{\alpha\beta}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta))$ все диагональные миноры порядка 4 равны 0, а это противоречит тому, что матрицы A^s общие и $d\geq 4$.

Каждой алгебре N с $N^3=0$ размерности n сопоставим алгебру A размерности $n+1$, получающуюся из нее присоединением единицы - $A=K\cdot 1+N$.

В схеме $\mathfrak{C}_n$ точки, соответствующие таким алгебрам, образуют подсхему $\tilde{\mathfrak{A}}_n$.

Ее можно задать уравнениями $(x-\frac{1}{n+1}\mathrm{Sp}(x))^3=0$ для всех $x\in A$, где $\mathrm{Sp}(x)$ - след матрицы, соответствующей элементу x в регулярном представлении.

В схеме $\mathfrak{A}_n$ содержатся замкнутые подсхемы $\mathfrak{A}_{n,r}$, соответствующие схемам $\mathcal{A}_{n,r}$, введенным в начале работы.

Теорема 2. *При* $2<r\le\frac{(d-1)(d-2)}{6}+2$ *схема* $\mathfrak{A}'_{n,r}$ *является неприводимой компонентой схемы* $\mathfrak{C}_n$. *Она приведена и имеет размерность* $\frac{d(d+3)}{2}\,r+n$. *При* $r>\frac{d^2-1}{3}$ *эта схема является собственной подсхемой некоторой неприводимой компоненты.*

Последнее утверждение доказано в предложении. Рассмотрим теперь случай $2<r\le\frac{(d-1)(d-2)}{2}+2$. Найдем сначала размерность схемы $\mathfrak{A}_{n,r}$. В базисе $e_1,\dots,e_d,f_1,\dots,f_r$ алгебра N имеет таблицу умножения (2) и множество $\tilde{S}\subset\mathfrak{C}_n$ точек, соответствующих таким алгебрам, имеет размерность $\frac{d(d+1)}{2}\,r$.

Вся редуцированная подсхема схемы $\mathfrak{A}_{n,r}$ имеет вид $G\tilde{S}$, где $G\subset\mathrm{GL}(n+1)$ состоит из преобразований g с $g(1)=1$. Как и в доказательстве теоремы 1,

$$\dim G\tilde{S} = \dim \tilde{S} + \dim G - \dim F_{s_0},$$

где F_{s_0} состоит из тех $g\in G$, для которых $g(s_0)\in\tilde{S}$. Это значит, что 1, $g(e_1),\dots,g(e_d),g(f_1),\dots,g(f_r)$ имеет таблицу умножения такого же вида, как и базис 1, $e_1,\dots,e_d$, $f_1,\dots,f_r$ алгебры A, соответствующей точке s_0.

Иными словами, $g(e_1),\dots,g(e_d)$, $g(f_1),\dots,g(f_r)$ порождают подалгебру коразмерности 1, не содержащую 1. Отсюда следует, что они образуют базис в N. Кроме того,

$$g(e_i)g(e_j)\in\{g(f_1),\dots,g(f_r)\},\quad g(e_i)g(f_s)=g(f_s)g(f_t)=0,$$

откуда $g(f_t)\in N^2$, т.е. $g(N)=N$, $g(N^2)=N^2$ и g имеет матрицу вида

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 \ \ldots & 0 \\ 0 & \boxed{} & \\ \vdots & & \\ \vdots & 0 & \boxed{} \\ 0 & & \end{array}\right)\begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\0\\\vdots\end{array}}\right\} d \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}\vdots\\0\end{array}}\right\} r \end{array}$$

Мы получаем, что $\dim G=n(n+1)$, $\dim F_s=d^2+dr+r^2$ и $\dim G\tilde{S}=\frac{d(d+1)}{2}r+n^2+n-d^2-dr-r^2=$ $=\frac{d(d+3)}{2}\cdot r+n$, так как $n=d+r$.

Найдем теперь касательное пространство в некоторой общей точке многообразия $\mathfrak{A}_{n,r}$ к схеме $\mathfrak{C}_n$. Оно изоморфно $\tilde{Z}^1(A,A)$, если A - алгебра, соответствующая этой точке. Ввиду леммы 4 пространство $\tilde{T}^1(A,A)$ порождается коциклами из пространства $V^1(N,N)$. Для них $\varphi(N,N)\subset N^2$ и $\varphi(N,N^2)=0$, так что такой коцикл имеет вид (19) с $\alpha^t_{ijk}=\beta_{ij}=0$, откуда $\dim V^1(N,N)=\frac{d(d+1)}{2}r$. Согласно лемме 4, $\tilde{Z}^1(A,A)=V^1(N,N)+\tilde{B}^1(A,A)$. Коцикл из $\tilde{B}^1(A,A)$ определяется отображением $\psi\colon A\longrightarrow A$, для которого $\psi(1)=0$. Пространство таких отображений обозначим через $\mathcal{L}$, а пространство тех из них, для которых соответствующий коцикл $\varphi(x,y)=\psi(xy)-x\psi(y)-y\psi(x)$, $\varphi\in V^1(N,N)$, обозначим $\mathcal{L}_0$. Очевидно,

$$\dim Z^1(A,A) = \dim V^1(N,N) + \dim \mathcal{L} - \dim \mathcal{L}_0. \tag{24}$$

Если $\psi\in\mathcal{L}_0$, то $\psi(xy)-x\psi(y)-y\psi(x)\in N^2$ при $x,y\in N$. Отсюда $\psi(N^2)\subset N^2$. Положим $\psi(x)=\ell(x)\cdot 1+\psi_0(x)$, где $\ell(x)\in K$, $\psi_0(x)\in N$. Тогда $\ell(N^2)=0$, $\ell(x)y+\ell(y)x\in N^2$. Беря $y\notin Kx+N^2$, получаем $\ell=0$. Мы видим, что $\psi(N)\subset N$, $\psi(N^2)\subset N^2$, $\psi(1)=0$, откуда, как и в первой части рассуждения, получаем, что $\dim \mathcal{L}_0=d^2+dr+r^2$. Очевидно, что $\dim \mathcal{L}=n(n+1)$, и так как $\dim V^1(N,N)=\frac{d(d+1)}{2}r$, то формула (24) показывает, что $\dim Z^1(A,A)=\frac{d(d+3)}{2}r+n$.

Мы видим, что касательное пространство к схеме $\mathscr{C}_n$ в общей точке схемы $\mathfrak{A}_{n,r}$ совпадает с размерностью схемы $\mathfrak{A}_{n,r}$. Отсюда следует, что в окрестности этой точки схемы $\mathscr{C}_n$ и $\mathfrak{A}_{n,r}$ совпадают, приведены и гладки. Это и утверждалось теоремой.

Замечания. 1. Рассмотренный случай показывает, что изучение локальных колец $A=K\cdot 1+N$ естественнее, чем соответствующих нильпотентных алгебр. Действительно, те же рассуждения показывают, что в условиях теоремы 2 схема $\mathscr{A}_{n,r}$, соответствующая нильпотениным алгебрам, совпадает с максимальной приведенной компонентой схемы $\mathscr{C}_n$, но компонента эта не приведена. Это связано с наличием коциклов $\delta_1((N/N^2)^*)$ в (18). Легко видеть, что гомоморфизм δ_1 является вложением - это следует из того, что в характеристике 0 $\mathrm{Der}(A,A)=\mathrm{Lie\ Aut}(A)$, $\mathrm{Der}(N,N)=\mathrm{Lie\ Aut}(N)$, где Lie обозначает алгебру Ли соответствующей группы. Но $\mathrm{Aut}(A)=\mathrm{Aut}(N)$, так как автоморфизм сохраняет радикал, откуда и следует наше утверждение. Соответствующие коциклы $\varphi(x,y)=\ell(x)+y\ell(x)$, $\ell\in(N/N^2)^*$ представляют собой инфинитезимальные автоморфизмы $x\longrightarrow x+\ell(x)\cdot\varepsilon$, $\varepsilon^2=0$, которые радикал не сохраняют. Легко проверить, что для общей алгебры деформация $x\circ y=xy+(\ell(x)y+\ell(y)x)\varepsilon$, $\varepsilon^2=0$, не может быть уже продолжена до деформации по модулю ε^3.

Такая разница в свойствах компоненты $\mathscr{A}_{n,r}$ и $\mathfrak{A}_{n,r}$ кажется удивительной: описываемые ими алгебры N и $K\cdot 1+N$ с точностью до изоморфизма находятся во взаимно-однозначном соответствии. Схема $\mathscr{A}_{n,r}$ получается из $\mathfrak{A}_{n,r}$ пересечением с подпространством, определенным условиями $c^0_{ij}=0$, $i>0$, $j>0$, наложенными на таблицу умножения (если в базисе $1,e_1,\ldots,e_n$ положить $e_0=1$). Это подпространство касается подмногообразия $\mathfrak{A}_{n,r}$. Такой эффект можно видеть уже в случае $n=1$. Если алгебра, соответствующая точке многообразия $\mathscr{C}_n$, имеет базис $1,e$ с таблицей умножения $e^2=\alpha+\beta e$, то для элемента $x=u+ve$, $\mathrm{Sp}(x)=2u+v\beta$, $(x-\frac{1}{2}\mathrm{Sp}(x))^2=v^2(\alpha-\frac{\beta^2}{4})$. Поэтому компонента $\mathfrak{A}$ в этом случае является параболой $\alpha-\frac{\beta^2}{4}=0$, а $\mathscr{A}$ получается из нее пересечением с прямой $\alpha=0$.

2. Реальные трудности содержатся в доказательстве леммы 4. В ней решающую роль играют вычисления во внешней алгебре $\Lambda(N/N^2)$, хотя не ясно, какое отношение эта алгебра имеет к изучаемой алгебре N и ее пространству $T^1(N,N)$. Выяснение внутренней (а не чисто формульной) роли внешней алгебры, вероятно, сделало бы доказательство более прозрачным.

3. Ключевое соотношение $\sum_{s\geq 3} \omega^s\wedge x_s=0$ в доказательстве леммы 4 в случае $s=3$ приобретает вид $\omega\wedge x=0$, где ω – бивектор с матрицей $\Gamma=[A^3,A^2]$. Его разрешимость с $x\neq 0$ равносильна тому, что $\mathrm{rg}\,\Gamma\leq 2$. В таком виде оно встречалось в работе В. Барта [7] в связи с описанием двумерных векторных расслоений на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ (рассматриваются стабильные расслоения с первым классом Черна, равным 0). Если попытаться интерпретировать его в духе настоящей работы, то надо сопоставить пучку F на $\mathbb{P}^2$ локальную алгебру $A=\bigoplus_{p=0}^{2} H^p(\mathbb{P}^2,\Lambda^pF(-2p))$. При этом $\Lambda^2F=0$. Умножение

$$H^1(\Lambda^1F(-2))\otimes H^1(\Lambda^1F(-2))\longrightarrow H^2(\mathfrak{O}(-4))$$

коммутативно. При этом $\dim H^2(\mathfrak{O}(-4))=3$.

Список литературы

[1] Jarrobino A., Emsalem J. Some zero-dimensional generic singularities; finite algebras having small tangent space // Compositio Mathematica. 1978. Vol.36, N 2. P.145-188.

[2] Шафаревич И.Р. Основы алгебраической геометрии. Т.I,II. М.: Наука, 1988.

[3] Harrison D.K. Commutative algebras and cohomology // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. Vol.104. P.191-204.

[4] Quillen D. On the (co-)homology of commutative rings // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. Vol.XVII. 1970. P.65-87.

[5] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М.: ИЛ, 1960.

[6] Гельфанд С.И., Манин Ю.И. Методы гомологической алгебры. Т.1. М.: Наука, 1988.

[7] Barth W. Moduli of Vector Bundles on the Projective Plane // Invent. Math. 1977. Vol.42. P.63-93.

Математический институт АН СССР им. В. А. Стеклова
117966, Москва, ГСП-1, ул. Вавилова, д. 42

Поступило 5 июня 1990 г.