УДК 514.763.637+514.154

КВАДРАТИЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

А. А. Аграчев

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

1. Пусть M — дифференцируемое многообразие с выделенной точкой $\mu_0 \in M$ и $f_0(\mu)$ — гладкое векторное поле на M. Полю f отвечает кривая на M — решение дифференциального уравнения $\left.\frac{d\mu}{d\tau}\right| = f_0(\mu)$ с начальным условием $\mu(0) = \mu_0$. Пусть $g(\mu)$ — еще одно гладкое векторное поле. Возмущая поле f_0 с помощью полей, пропорциональных g, получим новые кривые — траектории уравнений вида

$$\frac{d\mu}{d\tau} = f_0(\mu) + u(\tau) g(\mu) \tag{1}$$

с тем же начальным условием μ_0. В качестве $u(\tau)$ можно брать произвольную локально суммируемую функцию, но коль скоро такая функция выбрана, уравнение (1) (вместе с начальным условием) однозначно определяет траекторию $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Возникают отображения $F_t : u(\cdot) \mapsto \mu(t)$ пространства функций в многообразие M. Отображения довольно замысловатые: в то время как скорость каждой траектории, проходящей через точку $\mu \in M$, лежит в одной и той же аффинной прямой $f_0(\mu) + ug(\mu)$, $u \in \mathbb{R}$, совокупность точек всех траекторий может образовывать множество сколь угодно большой размерности; как правило, образ отображения F_t имеет непустую внутренность в M.

Можно рассмотреть более общую ситуацию, заменив $f_0(\mu) + ug(\mu)$ на произвольное семейство $f(\mu, u)$ векторных полей на M, гладко зависящее от $u \in U$, где U — некоторое гладкое многообразие.

Снова определены отображения $F_t : u(\cdot) \mapsto \mu(t)$, где

$$\frac{d}{d\tau}\mu(\tau) = f(\mu(\tau), u(\tau)), \quad \mu(0) = \mu_0. \tag{2}$$

Однопараметрическое семейство отображений F_t, $t > 0$, мы называем гладкой управляемой системой.

Согласно принятой в этой работе точке зрения, теория оптимального управления состоит в изучении эволюции образа и множеств уровня отображений F_t с ростом параметра t. Здесь проводится только локальное исследование — изучается поведение отображений F_t вблизи фиксированной критической точки $\tilde{u}(\cdot)$ (легко видеть, что любая точка, критическая для F_t, критична также для всех F_τ, $0<\tau<t$).

Взгляд на управляемую систему как на семейство отображений $u(\cdot) \mapsto \mu_t$, $t \geqslant 0$, восходит к основополагающим работам Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе и Е. Ф. Мищенко, подытоженным в книге [14]. В работе [11] явно сформулирован геометрический подход к оптимизационным задачам, при котором оптимальность в том или ином смысле траектории $\tilde{\mu}_\tau = F_\tau(\tilde{u}(\cdot))$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, интерпретируется как принадлежность точки μ_t границе образа F_t или некоторой модификации этого отображения. Если речь идет о локальной оптимальности, то рассматривается сужение F_t на малую окрестность $\tilde{u}(\cdot)$.

Ключевой результат классической теории — принцип максимума Л. С. Понтрягина — дает необходимое условие оптимальности, полученное при помощи линеаризации системы (2) по переменной μ вдоль траектории $\tilde{\mu}_\tau$. Этот принцип оказался очень эффективным орудием для решения задач оптимального управления. Тем не менее, во многих задачах, в первую очередь, для важных в приложениях систем, обладающих т. н. особыми экстремалями, применение принципа максимума оказывается недостаточным для выявления оптимальных траекторий (см., например, [10]). Для исследования таких систем усилиями многих специалистов были найдены различные дополнительные условия оптимальности, учитывающие приближения более высокого порядка, прежде всего второго. В рамках геометрического подхода условиями оптимальности высокого порядка, начиная с середины 70-х годов занимались также Р. В. Гамкрелидзе и автор. Для того, чтобы добиться настоящего понимания, пришлось основательно перестроить язык теории и значительно расширить постановку задачи (см. [3]—[7]). Важным моментом в начале этой деятельности явилось знакомство с работой [18].

Интуитивно ясно, что строгая локальная оптимальность траектории $\tilde{\mu}_\tau = F_\tau(\tilde{u}(\cdot))$ — это почти то же самое, что изолированность точки $\tilde{u}(\cdot)$ на множествах уровня $F_\tau^{-1}(\tilde{\mu}_\tau)$. В настоящей работе предпринято изучение локальной структуры множеств уровня $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)$: традиционный вопрос о том, лежит ли точка $\tilde{\mu}_t$ на границе или внутри образа малой окрестности $\tilde{u}(\cdot)$ при отображении F_t, вкладывается в задачу вычисления относительных групп гомологий $H_*(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t); F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \setminus \tilde{u}(\cdot))$.

Классическими примерами и образцами являются регулярные вариационные задачи. Стандартная вариационная задача в

$\mathbf{R}^n$ с интегральным функционалом

$$I=\int_0^T \varphi\left(x(\tau),\ \frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)d\tau, \quad \varphi>0,$$

и краевыми условиями $x(0)=x_0$, $x(T)=x_1$, по существу, эквивалентна управляемой системе

$$F_\theta: u(\cdot)\mapsto x(\theta), \quad \text{где} \quad \frac{dx}{d\theta}=\frac{u(\theta)}{\varphi(x, u(\theta))}.$$

В самом деле, замена времени $\theta(t)=\int_0^t \varphi\left(x(\tau), \frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)d\tau$ приводит к гомеоморфизму множеств уровня F_θ^{-1} (x_1) и $I^{-1}(\theta)$ При таком гомеоморфизме критические точки отображения F_θ переходят в критические точки (экстремали) функционала I.

Кроме того, при разумных ограничениях на φ оказывается, что:

$$\begin{array}{ccc} \text{минимум функционала} & \Leftrightarrow x_1 & \text{— граничная точка} \\ I \text{ равен } \theta & & \text{образа } F_\theta. \end{array}$$

Важнейшую информацию о поведении функционала I в окрестности фиксированной экстремали $\tilde{x}(\cdot)$ дает вторая вариация (гессиан I в $\tilde{x}(\cdot)$). Для регулярных задач вторая вариация является интегральной квадратичной формой конечного индекса, причем индекс этой формы полностью определяет поведение функционала I вблизи $\tilde{x}(\cdot)$.

Аналогом второй вариации для общей управляемой системы является гессиан отображения F_t в критической точке $\tilde{u}(\cdot)$. Однако, в отличие от регулярной вариационной задачи, возникающие квадратичные формы обычно оказываются сингулярными, и, что даже более существенно, гессиан является, вообще говоря, не скалярной квадратичной формой, а векторным квадратичным отображением! Причем эти эффекты возникают не в каких-то патологических случаях, а для совершенно естественных систем: например, когда $f(\mu, u)=f_0(\mu)+ug(\mu)$, $u\in\mathbf{R}$, $f_0(\mu)$, $g(\mu)$ — левоинвариантные поля на полупростой группе Ли. Явления такого рода сильно обогащают предмет по сравнению с классической ситуацией, и существенной частью исследования становится изучение топологии квадратичных отображений. Однако, прежде, чем описывать полученные результаты, необходимо уточнить исходные понятия.

2. На протяжении всей работы гладкость означает бесконечную дифференцируемость, а кусочно-непрерывные и кусочно-гладкие функции вещественного аргумента считаются непрерывными слева; группы гомологий (когомологий) везде, где не оговорено противное, есть группы сингулярных гомологий (когомологий) топологического пространства; утверждение о том, что типичный элемент данного топологического пространства

обладает неким свойством, означает, что это свойство выполнено для всех элементов некоторого открытого всюду плотного подмножества.

Пусть M, U — гладкие многообразия размерностей d и r соответственно, $\mu_0 \in M$ и $\mu \to f_t(\mu, u)$ — гладко зависящее от $u \in U$ и кусочногладко от $t \in \mathbf{R}$ семейство гладких векторных полей на M. Таким образом, $f_t(\mu, u) T_\mu M$ $\forall \mu \in M$, $u \in U$, $t \in \mathbf{R}$. Многообразие M называют фазовым пространством, а U — множеством управляющих параметров.

Замечание. Как правило, в теории управления рассматриваются множества управляющих параметров более общей природы, чем гладкие многообразия. Методы настоящей работы вполне приложимы в случае, когда U — многообразие с краем и «с углами». Они рассчитаны на такие приложения, но суть дела, на наш взгляд, лучше видна в чисто гладкой ситуации. Встречаются также задачи, в которых $f_t(\mu, u)$ недифференцируемо зависит от μ, к таким задачам наши методы принципиально неприменимы.

Через $L_\infty([0, t]; U)$, как обычно, обозначается совокупность всех таких измеримых кривых $u(\tau) \in U$, $\tau \in [0, t]$, что множество $u([0, t] \setminus \Gamma) \subset U$ компактно для некоторого (зависящего от $u(\cdot)$) подмножества меры нуль $\Gamma \subset [0, t]$. Легко видеть, что $L_\infty([0, t], U)$ — банахово многообразие класса C_∞, моделируемое на $L^r_\infty[0, t]$.

Пусть $u(\cdot) \in L_\infty([0, t]; U)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mu}{d\tau} = f_\tau(\mu, u(\tau)), \quad \tau \in [0, t] \tag{3}$$

с начальным условием $\mu(0) = \mu_0$.

Решение такого уравнения, вообще говоря, не определено на всем отрезке $[0, t]$. Чтобы избежать подобных затруднений, предположим выполненными следующие условия:

Многообразие M вложено в евклидово пространство $\mathbf{R}^N$ в качестве гладкого подмногообразия и, одновременно, замкнутого подмножества; в частности $f_t(\mu, u) \in T_\mu M \subset T_\mu \mathbf{R}^N = \mathbf{R}^N$. Для любых $K \Subset U$, $t > 0$, найдется такая константа $c_t(K)$, что

$$|f_\tau(\mu, u)| \leqslant c_t(K)(1 + |\mu|) \text{ при } u \in K, \ \tau \in [0, t], \ \mu \in M \subset \mathbf{R}^N.$$

Сделанное предположение, очевидно, обеспечивает продолжимость решений уравнений вида (3) на весь отрезок $[0, t]$. Определим отображение $F_t : L_\infty([0, t]; U) \to M$, положив $F_t(u(\cdot)) = \mu(t)$, где $\mu(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, удовлетворяет дифференциальному уравнению (3), $\mu(0) = \mu_0$.

Нетрудно показать, что F_t — бесконечно дифференцируемое отображение. Критические точки отображения F_t по аналогии с классическим вариационным исчислением называются экстремалями.

Зафиксируем некоторую точку $\tilde{u}(\cdot)\in L_\infty([0, t]; U)$, пусть $\tilde{\mu}_t = F_t(\tilde{u}(\cdot))$.

Нас интересуют следующие вопросы:

I) Верно ли, что $\tilde{\mu}_t \in \operatorname{int} F_t(\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)})$ для любой окрестности $\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$ точки $\tilde{u}(\cdot)$ в $L_\infty([0, t]; U)$?

II) Что можно сказать о топологии пересечений множества уровня $F_t^{-1}(\tilde{u}(\cdot))$ с малыми окрестностями точки $\tilde{u}(\cdot)$, в первую очередь, о группах гомологий

$$H_*\left(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t),\ F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)\setminus\tilde{u}(\cdot)\right)?$$

Если $\tilde{u}(\cdot)$ — регулярная точка отображения F_t, то, согласно теореме о неявной функции, найдутся такие локальные координаты $\Phi: \mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)} \to L_\infty^r[0, t]$ и $\varphi: O_{\tilde{\mu}_t} \to \mathbb{R}^d$, определенные в некоторых окрестностях точек $\tilde{u}(\cdot)\in L_\infty([0, t]; U)$ и $\tilde{\mu}_t \in M$, что $\varphi\circ F_t\circ\Phi^{-1}: L_\infty^r[0, t]\to\mathbb{R}^d$ — линейное сюръективное отображение. Следовательно, ответ на вопрос I) положительный. Множество уровня $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)$ вблизи $\tilde{u}(\cdot)$ устроено совсем просто: $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)\cap\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$ диффеоморфно подпространству коразмерности d в $L_\infty^r[0, t]$, в частности, $H_i\left(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t),\ F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)\setminus\tilde{u}(\cdot)\right)=0,\ i\geqslant 0$.

Предположим теперь, что $\tilde{u}(\cdot)$ — экстремаль и, кроме того, $u(\tilde{\tau})$ кусочно гладко зависит от $\tau\in[0, t]$. Обозначим через F_t' дифференциал отображения F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$, тогда $F_t': T_{\tilde{u}(\cdot)}L_\infty([0; t]; U)\to T_{\tilde{\mu}_t}M$ — линейное отображение. Касательное пространство $T_{\tilde{u}(\cdot)}L_\infty([0, t]; U)$ состоит из всех таких измеримых ограниченных в существенном кривых $v(\tau)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, в TU, что $v(\tau)\in T_{\tilde{u}(\tau)}U$ $\forall\tau\in[0, t]$. Каждое из пространств $T_{\tilde{u}(\tau)}U$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, изоморфно $\mathbb{R}^r$, причем изоморфизмы $I_\tau: T_{\tilde{u}(\tau)}U\to R^r$ можно, разумеется, выбрать кусочно гладко зависящими от τ. Получается изоморфизм $v(\tau)\mapsto I_\tau v(\tau)$, $\tau\in[0, t]$, пространств $T_{\tilde{u}(\cdot)}L_\infty([0, t]; U)$ и $L_\infty^r[0, t]$. Поскольку экстремаль $\tilde{u}(\cdot)$ в дальнейшем фиксирована, удобно, в целях упрощения обозначений, зафиксировать раз и навсегда некоторый изоморфизм пространств $T_{\tilde{u}(\cdot)}L_\infty([0, t]; U)$ и $L_\infty^r[0, t]$, и в дальнейшем вообще не различать эти пространства. В частности, мы будем писать

$$F_t': L_\infty^r[0, t]\to T_{\tilde{\mu}_t}M.$$

Тот факт, что $\tilde{u}(\cdot)$ экстремаль (критическая точка отображения F_t), эквивалентен соотношению

$$\operatorname{im} F_t'\neq T_{\tilde{\mu}_t}M.$$

Пусть $L'_\infty[0, t] \supset \ker F'_t$ — ядро, а $T_{\tilde{\mu}_t} M / \operatorname{im} F'_t = \operatorname{coker} F'_t$ — коядро отображения F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$. Обозначим через F_t гессиан отображения F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$, тогда

$$F''_t : \ker F'_t \times \ker F'_t \to \operatorname{coker} F'_t$$

— симметричное билинейное отображение (см. [1, § 1]).

3. Ответы на вопросы I), II) мы будем искать, изучая квадратичное отображение $v(\cdot) \mapsto F''_t(v(\cdot), v(\cdot))$, $v(\cdot) \in \ker F'_t$. В случае, когда $\dim \operatorname{coker} F'_t = 1$, это квадратичное отображение является, по-существу, вещественной квадратичной формой. Если, вдобавок, квадратичная форма оказывается знакоопределенной на некотором подпространстве конечной коразмерности в $\ker F'_t$, то для ответа на интересующие нас вопросы достаточно найти ее индекс инерции (см. [1, § 1]). В действительности, однако, эти замечательные свойства очень часто не выполняются. Чтобы не быть голословным, приведу характерный пример.

Предположим, что на M определена структура полупростой группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{M}$, причем $\mu_0 = e$ — единичный элемент в M.

Рассмотрим управляемую систему на M, определяемую дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mu}{d\tau} = f_0(\mu) + u(\tau) g(\mu), \quad \mu(0) = e, \quad u(\tau) \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t,$$

где $f_0(\mu)$, $g(\mu)$ — левоинвариантные векторные поля на M. Положим $\tilde{u}(\tau) = 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Пусть $a = f_0(e)$, $b = g(e)$ — элементы алгебры Ли $\mathfrak{M} = T_e M$. Вместо отображения $F_t : u(\cdot) \to \mu(t)$ удобно рассматривать эквивалентное ему отображение

$$G_t : u(\cdot) \mapsto e^{-ta} \mu(t).$$

Легко видеть, что $G_t(0) = e$, пусть $G'_t : L_\infty[0, t] \to \mathfrak{M}$, $G''_t : \ker G'_t \times \times \ker G'_t \to \operatorname{coker} G'_t$ — дифференциал и гессиан отображения G_t в нуле. Несколько позже, в § 2, будут получены явные выражения для производных сколь угодно высокого порядка произвольной гладкой управляемой системы. Пока же приведем нужные нам формулы без обоснования

$$G'_t v(\cdot) = \int_0^t e^{\tau \operatorname{ad} a} b v(\tau) \, d\tau, \quad \forall v(\cdot) \in L_\infty[0, t], \tag{4}$$

$$G''_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int_0^t \left[\int_0^\tau e^{\theta \operatorname{ad} a} b v_1(\theta) \, d\theta, \; e^{\tau \operatorname{ad} a} b v_2(\tau) \right] d\tau + \operatorname{im} G'_t,$$

$$\forall v_1(\cdot), \; v_2(\cdot) \in \ker G'_t;$$

квадратичные скобки $[\cdot, \cdot]$ обозначают, как обычно, коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{M}$, и $(\mathrm{ad}^n a) b = [a, (\mathrm{ad}^{n-1} a) b]$, $n = 1, 2, \ldots$ $\ldots, (\mathrm{ad}^0 a) b = b$.

Из (4) следует, что $\mathrm{im}\, G_t' = \mathrm{span}\{(\mathrm{ad}^n a) b \mid n = 0, 1, \ldots\}$. Предположим, что a — регулярный элемент полупростой алгебры Ли $\mathfrak{M}$. Пусть H_a — подалгебра Картана, содержащая a, и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — форма Киллинга на $\mathfrak{M}$. Поскольку $\langle H_a, \mathrm{ad}^n a b \rangle = 0$ $\forall n > 0$, а сужение формы Киллинга на H_a невырождено, то $\dim (H_a \cap \mathrm{im}\, G_t') \leqslant 1$. Следовательно, $\dim \mathrm{coker}\, G_t' \geqslant \mathrm{rank}\, \mathfrak{M} - 1$, где, по определению, $\mathrm{rank}\, \mathfrak{M} = \dim H_a$.

Таким образом, для любой алгебры Ли ранга не меньше трех G_t'' заведомо является векторным (не скалярным) билинейным отображением. Кроме того, его скалярные проекции

$$\psi G_t''(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int_0^t \psi \left[\int_0^\tau e^{\theta \mathrm{ad} a} b v_1(\theta)\, d\theta,\ e^{\tau \mathrm{ad} a} b v_2(\tau) \right] d\tau,$$

где $\psi \in (\mathrm{im}\, G_t')^\perp$, являются вполне непрерывными формами, и ни о какой знакоопределенности думать не приходится.

Возвратимся к общему случаю. Разумным условием невырожденности билинейного отображения F_t'' является требование, чтобы нуль в пространстве $\mathrm{coker}\, F_t'$ не являлся критическим значением отображения

$$v(\cdot) \mapsto F_t''(v(\cdot), v(\cdot)), \quad v(\cdot) \in \ker F_t' \setminus 0. \tag{5}$$

Если $\dim \mathrm{coker}\, F_t' = 1$, и F_t'' — вещественная билинейная форма, то это условие невырожденности эквивалентно обычному условию $\ker F_t'' = 0$. Однако в случае $\dim \mathrm{coker}\, F_t' > 1$ невырожденность F_t'' вовсе не влечет невырожденности всех скалярных форм $\varphi F_t''$, $\varphi \in (\mathrm{im}\, F_t')^\perp \setminus 0$ (последнее означало бы, что отображение (5) вообще не имеет критических значений).

Если F_t'' невырожденно в указанном смысле, то конус $\{v \in \ker F_t' \mid F_t''(v, v) = 0\}$ неплохо аппроксимирует множество уровня $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)$ вблизи точки $\tilde{u}(\cdot)$, а естественным «квадратичным» аналогом вопроса 1) из пункта 2 оказывается вопрос о том, является ли квадратичное отображение $v(\cdot) \mapsto F_t''(v(\cdot), v(\cdot))$ существенно сюръективным (см. [1]).

Спаривание произвольных вектора $x \in T_\mu M$ и ковектора $\xi \in T_\mu^* M$ мы обозначаем просто ξx (как произведение строки на столбец). Таким образом, для любого $\psi \in (\mathrm{im}\, F_t')^\perp \subset T^*_{\tilde{\mu}_t} M$ выражение $\psi F_t''$ представляет собой вещественную квадратичную (= симметричную билинейную) форму на $\ker F_t'$. Важнейшим инвариантом произвольной вещественной квадратичной формы q является ее индекс инерции $\mathrm{ind}\, q$ — целое неотрицательное число либо $+\infty$. Для векторного квадратичного отображения F_t'' роль индекса играет функция $\psi \mapsto \operatorname{ind} \psi F_t$, $\psi \in (\operatorname{im} F'_t)^{\perp} \setminus 0$, принимающая целые неотрицательные значения и $+\infty$. В работе [1] показано, как с помощью этой функции выявлять различные свойства отображения F''_t. Однако, чтобы успешно применять методы упомянутой работы, необходимо иметь гибкие явные формулы для $\operatorname{ind} \psi F''_t$. Описанию таких формул посвящен § 3. Перед этим, в § 2, мы приводим одно специальное представление разложения Тейлора отображения F_t, из которого, в частности, получается инвариантное выражение для F''_t. Общее исследование квадратичного отображения $v(\cdot) \mapsto F''_t(v(\cdot), v(\cdot))$ завершается в § 4, а § 5 посвящен конкретным вычислениям для некоторых специальных классов систем.

В заключение я выражаю благодарность моему учителю Р. В. Гамкрелидзе за постоянную поддержку и внимание к этой работе.

§ 2. ВАРИАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

1. При работе с гладкими управляемыми системами (как и во многих других случаях) удобно использовать следующую операторную символику.

Точка $\mu \in M$ отождествляется с гомоморфизмом $\varphi \to \varphi(\mu)$ алгебры $C_\infty(M)$ в $\mathbb{R}$. Диффеоморфизму $\Phi : M \to M$ соответствует автоморфизм $\Phi^* : \varphi(\cdot) \to \varphi(\Phi(\cdot))$ алгебры $C_\infty(M)$; значение $\Phi(\mu)$ диффеоморфизма Φ в точке μ на операторном языке записывается в виде $\mu \circ \Phi^*$ — композиция автоморфизма и мультипликативного функционала (которая снова является мультипликативным функционалом). В то же время, операция композиции $(\Phi_1, \Phi_2) \to \Phi_2 \circ \Phi_1$ превращает совокупность всех диффеоморфизмов в группу, обозначаемую $\operatorname{Diff} M$. Заметим, что $(\Phi_2 \circ \circ \Phi_1)^* = \Phi_1^* \circ \Phi_2^*$, нетрудно показать, что любой автоморфизм алгебры $C_\infty(M)$ имеет вид Φ^* для некоторого $\Phi \in \operatorname{Diff} M$, так что соответствие $\Phi \to \Phi^*$ устанавливает изоморфизм группы $\operatorname{Diff} M$ и группы автоморфизмов алгебры $C_\infty(M)$. Гладкие векторные поля на M отождествляются с дифференцированиями алгебры $C_\infty(M)$, т. е. $\mathbb{R}$-линейными отображениями $X : C_\infty(M) \to C_\infty(M)$, удовлетворяющими правилу Лейбница:

$$X(\varphi_1\varphi_2) = (X\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1(X\varphi_2) \ \forall \varphi_1\varphi_2 \in C_\infty(M).$$

Коммутатор $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ превращает пространство всех гладких векторных полей в алгебру Ли, обозначаемую $\operatorname{Der} M$. Значение векторного поля X в точке $\mu \in M$ (касательный вектор к многообразию M в точке μ) записывается в виде $\mu \circ X$. Символом $T_\mu M$, как обычно, обозначается касательное пространство к многообразию M в точке μ — для нас это пространство всех $\mathbb{R}$-линейных функционалов ξ на $C_\infty(M)$, удовлетворяющих условияю $\xi(\varphi_1\varphi_2)=(\xi\varphi_1)\varphi_2(\mu)+\varphi_1(\mu)(\xi\varphi_2)$. Символом $\mathrm{Ad}\,\Phi$, где $\Phi\in\mathrm{Diff}\,M$ обозначается внутренний автоморфизм $\mathrm{Ad}\,\Phi: X\mapsto\Phi^*\circ X\circ\Phi^{*-1}$ алгебры $\mathrm{Der}\,M$, а символом $\mathrm{ad}\,Y$, где $Y\in\mathrm{Der}\,M$, внутреннее дифференцирование $\mathrm{ad}\,Y: X\mapsto[Y, X]$ той же алгебры Ли, $X\in\mathrm{Der}\,M$.

Пусть N — еще одно многообразие класса C_∞, и $\Phi: M\to N$ — диффеоморфизм. Символом $\Phi_*:\mathrm{Der}\,M\to\mathrm{Der}\,N$ обозначается дифференциал отображения Φ, а символом $\Phi_{*\mu}: T_\mu M\to T_{\Phi(\mu)}N$, где $\mu\in M$, — соответствующее линейное отображение касательных пространств — оно определено для любого гладкого отображения, а не только для диффеоморфизмов; если $\Phi\in\mathrm{Diff}\,M$, то $\Phi_*=\mathrm{Ad}\,\Phi^{*-1}$.

В алгебре $C_\infty(M)$ вводится топология Уитни — топология равномерной сходимости производных любого порядка на компактах. Топологию Уитни можно задать с помощью семейства полунорм $\|\cdot\|_{k,K}$, $k\geqslant 0$, $K\Subset M$, где полунорма $\|\cdot\|_{k,K}$ определяет топологию равномерной сходимости всех производных до порядка k на компакте K. Полунормы $\|\cdot\|_{k,K}$, в отличие от задаваемой ими топологии, не определяются однозначно многообразием M и могут быть выбраны многими способами. В дальнейшем считается, что такой выбор произведен и полунормы фиксированы. Для произвольного векторного поля $X\in\mathrm{Der}\,M$ положим

$$\|X\|_{k,K}=\sup\{\|X\varphi\|_{k,K}\mid\|\varphi\|_{k+1,K}=1\},\quad k=0,\quad K\Subset M.$$

Диффеоморфизмы и векторные поля определяют непрерывные линейные операторы в пространстве Фреше $C_\infty(M)$, а точки и касательные векторы — непрерывные линейные функционалы. В пространстве $\mathscr{L}(C_\infty(M))$ всех непрерывных линейных операторов в M и пространстве $C_\infty(M)^*$ всех непрерывных линейных функционалов на M вводится топология поточечной сходимости: последовательность $A_i\in\mathscr{L}(C_\infty(M))$, $i=1, 2\ldots$ (соответственно, $a_i\in C_\infty(M)^*$) в том и только том случае сходится к $A\in\mathscr{L}(C_\infty(M))$ $(a\in C_\infty(M)^*)$, когда $A_i\varphi\to A\varphi$ $(a_i(\varphi)\to a(\varphi))$ $\forall\varphi\in C_\infty(M)$.

Пусть φ_t, $t\in\mathbf{R}$ — однопараметрическое семейство элементов из $C_\infty(M)$, оно называется измеримым, если $\forall\mu\in M$ скалярная функция $t\to\varphi_t(\mu)$ измерима; измеримое семейство называется локально интегрируемым, если

$$\int_{t_1}^{t_2}\|\varphi_\tau\|_{k,K}d\tau<+\infty\quad\forall t_1,\quad t_2\in\mathbf{R},\quad k\geqslant 0,\quad K\Subset M.$$

Легко видеть, что для локально интегрируемых семейств φ_t функции $\int_{t_1}^{t_2}\varphi_\tau d\tau:\mu\to\int_{t_1}^{t_2}\varphi_\tau(\mu)d\tau$, $\mu\in M$, принадлежат $C_\infty(M)$, $t_1,t_2\in\mathbf{R}$.

Семейство φ_t, $t\in\mathbf{R}$, называется абсолютно непрерывным, если существует такое локально интегрируемое семейство Ψ_t, что $\varphi_t=\varphi_{t_0}+\int\limits_{t_0}^{t}\Psi_\tau d\tau$. Воспользовавшись сепарабельностью $C_\infty(M)$, можно доказать также, как и для скалярных функций, что для почти всех t

$$\frac{d}{dt}\varphi_t=\frac{d}{dt}\int\limits_0^t\Psi_\tau d\tau=\Psi_t.$$

Для однопараметрических семейств A_t, $t\in\mathbf{R}$, операторов из $\mathscr{L}(C_\infty(M))$ понятия измеримости, непрерывности, дифференцируемости, локальной интегрируемости, абсолютной непрерывности определяются требованием, чтобы $\forall\varphi\in C_\infty(M)$ семейство $A_t\varphi$ обладало соответствующим свойством. Тот факт, что локально интегрируемое семейство можно интегрировать, а дифференцируемое дифференцировать, а также справедливость формы Лейбница

$$\frac{d}{dt}(A_t\circ B_t)=\left(\frac{d}{dt}A_t\right)\circ B_t+A_t\circ\left(\frac{d}{dt}B_t\right)$$

доказывается с помощью теоремы Банаха — Штейнгауса (более подробно обоснование основных операций анализа для таких семейств см. в [4], [5]). Аналогично для однопараметрических семейств линейных функционалов из $C_\infty(M)$.

Семейство A_t, $t\in\mathbf{R}$, называется абсолютно непрерывным, если оно представимо в виде $A_t=A_{t_0}+\int\limits_0^t B_\tau d\tau$. Имеем $\frac{d}{dt}A_t=B_t$ для почти всех t.

Локально суммируемые семейства $X_t\in\operatorname{Der}M$, $t\in\mathbf{R}$, называются нестационарными векторными полями на M, а абсолютно непрерывные семейства Φ_t^*, где $\Phi_t\in\operatorname{Diff}M$, $t\in\mathbf{R}$, удовлетворяющие условию $\Phi_0=\mathrm{id}$, — нестационарными потоками на M или просто потоками (символом id обозначается тождественное отображение). Нестационарное поле X_t, $t\in\mathbf{R}$, определяет обыкновенное дифференциальное уравнение $\frac{d}{dt}\mu=\mu\circ X_t$ на M. Нестационарное поле X_t называется полным, если для $\forall\mu_0\in M$ найдется абсолютно непрерывное решение этого уравнения $\mu(t)$, удовлетворяющее условию $\mu(0)=\mu_0$ и определенное при всех $t\in\mathbf{R}$. Полное поле определяет поток Φ_t^* — единственное абсолютно непрерывное решение операторного уравнения $\frac{d}{dt}A_t=A_t\circ X_t$ с начальным условием $A_0=\mathrm{id}$, здесь $\mu(t)=\mu_0\circ\Phi_t^*$. Для потока Φ_t^* используется следующее обозначение, хорошо отражающее его происхождение и удобное при вычислениях

$$\Phi_t^* = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau.$$

Имеет место асимптотическое разложение

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \approx \mathrm{id} + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{m-1}} (X_{\tau_m} \circ \ldots \circ X_{\tau_1})\, d\tau_m,$$

точный смысл которого состоит в неравенствах

$$\left\| \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau\, d\tau - \mathrm{id} - \sum_{\alpha=1}^{m} \int_0^t d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{\alpha-1}} (X_{\tau_\alpha} \circ \ldots \circ X_{\tau_1})\, d\tau_\alpha)\, \varphi \right\|_{k,K} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 e^{c_2 \int_0^t \|X_\tau\|_{k,\widetilde{K}} d\tau} \left(\int_0^t \| X_\tau \|_{k+m,\widetilde{K}} d\tau \right)^{m+1} \| \varphi \|_{k+m+1,\widetilde{K}}, \qquad (1)$$

$$\forall \varphi \in C_\infty(M), \quad k,\ m \geqslant 0, \quad K \Subset M,$$

где c_1, c_2 зависят лишь k, m (подробности, включая оценки констант и $\widetilde{K} \Subset M$ см. в [4]).

Далее, семейство операторов $\mathrm{Ad}\, \Phi_t^*$, $t \in \mathbf{R}$, действующих в пространстве $\mathrm{Der}\, M$, является единственным абсолютно непрерывным решением операторного уравнения $\frac{d}{dt} \mathscr{A}_t = \mathscr{A}_t \circ \mathrm{ad}\, X_t$ с начальным условием $\mathscr{A}_0 = \mathrm{id}$, откуда вытекает асимптотическое разложение

$$\mathrm{Ad}\, \Phi_t^* Y \approx Y + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \int_0^{\tau_{m-1}} (\mathrm{ad}\, X_{\tau_m} \circ \ldots \circ \mathrm{ad}\, X_{\tau_1} Y)\, d\tau_m,$$

$Y \in \mathrm{Der}\, M$ с оценками остаточного члена, аналогичными (1) (см. [4]). Эти факты отражены в используемом ниже обозначении

$$\mathrm{Ad}\, \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \mathrm{ad}\, X_\tau d\tau.$$

В случае, когда X_t не зависит от t, $X_t \equiv X$, $t \in \mathbf{R}$, используются традиционные обозначения

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X d\tau = e^{tX}, \quad \overrightarrow{\exp} \int_0^t \mathrm{ad}\, X d\tau = e^{t\, \mathrm{ad} X}.$$

Для полных нестационарных полей X_t, $X_t + Y_t$ нестационарное поле $\overrightarrow{\exp} \int_0^t \mathrm{ad}\, X_\tau d\tau Y_t$ также является полным, и справедлива «формула вариации постоянной»

$$\overrightarrow{\exp}\int_0^t (X_\tau+Y_\tau)\,d\tau=\overrightarrow{\exp}\int_0^t\left(\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau \operatorname{ad} X_\vartheta d\vartheta Y_\tau\right)d\tau\circ\overrightarrow{\exp}\int_0^t X_\tau d\tau, \quad (2)$$

которая проверяется прямым дифференцированием по t правой и левой частей.

2. Пусть X_t, Y_t, $t\in\mathbf{R}$ — такие нестационарные поля в M, что все нестационарные поля вида $X_t+\varepsilon Y_t$, $\varepsilon\in\mathbf{R}$ — полные. Рассмотрим однопараметрическое семейство потоков

$$\Phi_t^*(\varepsilon)=\overrightarrow{\exp}\int_0^t (X_\tau+\varepsilon Y_\tau)\,d\tau,\quad \varepsilon,\ t\in\mathbf{R}.$$

Из формулы (2) и разложения (1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\Phi_t^*(\varepsilon)=\int_0^t \operatorname{Ad}\Phi_\tau^*(\varepsilon)\,Y_\tau d\tau\circ\Phi_t^*(\varepsilon). \quad (3)$$

Положим

$$\Xi_t(\varepsilon)=\int_0^t \operatorname{Ad}\Phi_\tau^*(\varepsilon)\,Y_\tau d\tau.$$

Лемма 1. Предположим, что для данных $t\in\mathbf{R}$, $k\geqslant 1$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^i}{\partial\varepsilon^i}\bigg|_{\varepsilon=0}\Xi_t(\varepsilon)=0,\quad 0\leqslant i<k-1,\qquad \frac{\partial^{k-1}}{\partial\varepsilon^{k-1}}\bigg|_{\varepsilon=0}\Xi_t(\varepsilon)=\xi_t^k\in T_{\mu_0}M.$$

Тогда

$$\mu_0\circ\Phi_t^*(\varepsilon)=\left(\dot\mu_0+\frac{\varepsilon^k}{k}\,\xi_t^k\right)\circ\Phi_t^*(0)+O(\varepsilon^{k+1}).$$

Утверждение леммы непосредственно следует из (1) и (3). В условиях леммы 1 вектор

$$\xi_t^k\circ\Phi_t^*(0)=(\Phi_t(0)_*\,\xi_k)\in T_{\Phi_t(0)(\mu_0)}M$$

касается кривой $\varepsilon\to\Phi_t(\varepsilon)(\mu_0)$ в точке $\Phi_t(0)(\mu_0)$. Иными словами, главный член в разложении в ряд по степеням ε кривой $\varepsilon\mapsto\mu_t(\varepsilon)=\Phi_t(\varepsilon)(\mu_0)$ в M совпадает с точностью до положительного множителя с главным членом разложения в ряд по степеням ε кривой $\varepsilon\mapsto\mu_t(0)\circ\Phi_t(0)_*\Xi_t(\varepsilon)$ в $T_{\mu_t(0)}M$. В то же время, если для кривой $\mu_t(\varepsilon)$ лишь главный член разложения является касательным вектором, то все разложение кривой $\mu_t(0)\circ\Phi_t(0)_*\Xi_t(\varepsilon)$, по определению, состоит из касательных векторов. Поскольку сказанное относится к произвольным полям X_τ, Y_τ, разложение в ряд по степеням ε семейства полей $\Xi_t(\varepsilon)$ должно, в принципе, дать универсальные выражения для дифференциала, гессиана и всей инвариантной информации о высших производных произвольной управляемой системы.

Воспользовавшись формулой (3), получаем

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\Xi_t(\varepsilon)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\Phi_\tau^*(\varepsilon)Y_\tau\left(\Phi_\tau^*(\varepsilon)\right)^{-1}\right)d\tau=$$

$$=\int_0^t\left[\mathrm{Ad}\,\Phi_\vartheta^*(\varepsilon)Y_\vartheta d\vartheta,\ \mathrm{Ad}\,\Phi_\tau^*(\varepsilon)Y_\tau\right]d\tau=\int_0^t\left[\Xi_\tau(\varepsilon),\ \frac{\partial}{\partial\tau}\,\Xi_\tau(\varepsilon)\right]d\tau.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\Xi_t(\varepsilon)=\int_0^t\left[\Xi_\tau(\varepsilon),\ \frac{\partial}{\partial\tau}\,\Xi_\tau(\varepsilon)\right]d\tau,\quad \Xi_t(0)=\int_0^t\mathrm{Ad}\,\Phi_\tau^*(0)Y_\tau d\tau.$$

Для произвольных абсолютно непрерывных по τ стационарных полей $\mathscr{A}_\tau$, $\mathscr{B}_\tau$ положим

$$(\nabla_{\mathscr{A}.}\mathscr{B}.)_t=\int_0^t\left[\mathscr{A}_\tau,\ \frac{d}{d\tau}\,\mathscr{B}_\tau\right]d\tau.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,\Xi.=\nabla_\Xi\Xi..$$

Дифференцируя это соотношение по ε, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\,\Xi.=\nabla_{\nabla_\Xi\Xi}\Xi.+\nabla_\Xi\nabla_\Xi\Xi..$$

Еще раз продифференцировав, получим выражение $\frac{\partial^3}{\partial\varepsilon^3}\,\Xi$ через Ξ с помощью операции ∇ и т. д. Таким образом, можно выписать все разложение $\Xi_t(\varepsilon)$ в ряд по степеням ε через $\Xi_t(0)$, используя лишь операцию ∇. Можно, однако, действовать иначе.

Положим

$$Z_t=\mathrm{Ad}\,\Phi_t^*(0)Y_t=\overrightarrow{\exp}\int_0^t\mathrm{ad}\,X_\tau d\tau Y_\tau.$$

Из (2) следует, что

$$\Xi_t(\varepsilon)=\int_0^t\mathrm{Ad}\left(\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau X_\vartheta+\varepsilon Y_\vartheta d\vartheta\right)Y_\tau d\tau=$$

$$=\int_0^t\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau\varepsilon Z_\vartheta d\vartheta\right)\left(\mathrm{Ad}\,\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau X_\vartheta d\vartheta\right)Y_\tau d\tau=$$

$$=\int_0^t\overrightarrow{\exp}\int_0^\tau\varepsilon\,\mathrm{ad}\,Z_\vartheta d\vartheta Z_\tau d\tau.$$

Следовательно,

$$\Xi_t(\varepsilon) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \int_0^t d\tau_0 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \ldots \int_0^{\tau_{m-1}} (\operatorname{ad} Z_{\tau_m} \ldots \operatorname{ad} Z_{\tau_1} Z_{\tau_0})\, d\tau_m. \qquad (4)$$

Рассмотрим более общую ситуацию, заменив семейство полей $X_t+\varepsilon Y_t$ на произвольное гладко зависящее от $\varepsilon \in \mathbf{R}$ семейство полных нестационарных полей $X_t(\varepsilon)$. Из «формулы вариации постоянной» с учетом (1) вытекает равенство

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau(\varepsilon)\, d\tau = \int_0^t \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} X_\vartheta(\varepsilon)\, d\vartheta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon)\, d\tau \circ$$

$$\circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau(\varepsilon)\, d\tau.$$

Стало быть, утверждение леммы 1 останется верным, если положить

$$\Phi_t^*(\varepsilon) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau(\varepsilon)\, d\tau,$$

$$\Xi_t(\varepsilon) = \int_0^t \operatorname{Ad} \Phi_\tau^*(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon)\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} X_\vartheta(\varepsilon)\, d\vartheta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon)\right) d\tau.$$

Для $k=1, 2, \ldots$ положим

$$Z_t^{(k)} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} X_\tau(0)\, d\tau \left.\frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k}\right|_{\varepsilon=0} X_t(\varepsilon).$$

Нетрудно показать, что все коэффициенты разложения семейства полей $\int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} X_\vartheta(\varepsilon)\, d\vartheta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} X_\tau(\varepsilon)\right) d\tau$ в ряд по степеням ε выражаются через нестационарные поля $Z_t^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$, с помощью ∇. Мы на этом останавливаться не будем, и выпишем разложение, обобщающее (4). Имеем

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} X_\tau(\varepsilon)\, d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} X_\vartheta(0)\, d\vartheta\, (X_\tau(\varepsilon) - X_\tau(0)) \right) \circ$$

$$\circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} X_\tau(0)\, d\tau \approx \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} Z_\tau^{(k)} \right) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} X_\tau(0)\, d\tau.$$

Следовательно,

$$\int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} X_\vartheta(\varepsilon)\, d\vartheta \right) \frac{\partial}{\partial\varepsilon} X_\tau(\varepsilon)\, d\tau \approx \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^t d\tau_0 \int_0^{\tau_0} d\tau_1 \ldots$$

$$\ldots \int_0^{\tau_{m-1}} \left(\left(\sum_{k_m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k_m}}{k_m!} \operatorname{ad} Z_{\tau_m}^{(k_m)} \right) \circ \ldots \circ \left(\sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{k_1}}{k_1!} \operatorname{ad} Z_{\tau_1}^{k_1} \right) \sum_{k_0=0}^{\infty} \frac{\varepsilon R_0}{k_0!} Z_{\tau_0}^{k_0+1} \right) d\tau. \quad (5)$$

Теперь все готово для определения вариаций системы (1.2) в точке $\tilde{u}(\cdot)$. Мы приведем это определение в предположении, что U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^r$. Общий случай сводится к этому введением локальных координат в $L_\infty([0, t]; U)$ (вариации, вообще говоря, зависят от выбора локальных координат в пространстве управлений $L_\infty([0, t], U)$, но не зависят от локальных координат в фазовом пространстве M). Полной вариацией системы (1.2) называется однопараметрическое семейство отображений $\mathscr{V}_t : L_\infty([0, t]; V) \times L_\infty^r[0, t] \to T_{\mu_0}M$, $t > 0$, определяемых правилом

$$\mathscr{V}_t(u(\cdot);\ v(\cdot)) =$$

$$= \mu_0 \circ \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \operatorname{ad} f_\vartheta(\cdot, u(\vartheta))\, d\vartheta\, \frac{\partial f_\tau}{\partial u}(\cdot, u(\tau))\, v(\tau) \right) d\tau.$$

Для $k = 1, 2, \ldots$, вариацией порядка k в точке $(\tilde{u}(\cdot), 0)$ называется $(k-1)$-я производная отображения $\mathscr{V}_t$ в точке $(\tilde{u}(\cdot), 0)$. Вариация порядка k обозначается

$$\mathscr{V}_t^{(k)}(\tilde{u}(\cdot)) : L_\infty^r[0, t] \times \ldots \times L_\infty^r[0, t] \to T_{\mu_0}M$$

и представляет собой симметричное полилинейное отображение.

Мотивировку такого определения вариаций доставляет лемма 1, а способ вычисления — формула (5). Пусть

$$v(\cdot) \in L_\infty^r[0, t],$$

положив

$$Z_t^{(k)} = \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \operatorname{ad} f_\tau(\cdot, \tilde{u}(\tau))\, d\tau \right) \frac{\partial^k}{\partial u^k} f_\tau(\cdot, \tilde{u}(\tau))\, (v(\tau), \ldots, v(\tau)),$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

получим

$$\mathscr{V}_t^{(1)}(\tilde{u}(\cdot))\,v(\cdot)=\mu_0\circ\int_0^t Z_\tau^{(1)}d\tau,$$

$$\mathscr{V}_t^{(2)}(\tilde{u}(\cdot))\,(v(\cdot),\,v(\cdot))=\mu_0\circ\int_0^t \left(Z_\tau^{(2)}+\left[\int_0^\tau Z_\vartheta^{(1)}d\vartheta,\,Z_\tau^{(1)}\right]\right)d\tau$$

$$\mathscr{V}_t^{(3)}(\tilde{u}(\cdot))\,(v(\cdot),\,v(\cdot),\,v(\cdot))=\mu_0\circ\int_0^t \Big(Z_\tau^{(3)}+\int_0^\tau \Big([Z_\vartheta^{(2)},\,Z_\tau^{(1)}]+$$

$$+2[Z_\vartheta^{(1)},\,Z_\tau^{(2)}]+2\left[\int_0^\vartheta Z_{\vartheta'}^{(1)}d\vartheta',\,[Z_\vartheta^{(1)},\,Z_\tau^{(1)}]\right]\Big)d\vartheta\Big)d\tau \tag{6}$$

и т. д.

Обратимся, наконец, к отображениям F_t. Пусть $\tilde{\Phi}_t^*=\overrightarrow{\exp}\int_0^t f_\tau(\cdot,\,\tilde{u}(\tau))\,d\tau$, $t\in\mathbb{R}$, из леммы 1 вытекают следующие соотношения для дифференциала и гессиана F_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$:

$$F_t'v(\cdot)=\tilde{\Phi}_{t*}\mathscr{V}_t^{(1)}(\tilde{u}(\cdot))\,v(\cdot),$$

$$\forall v(\cdot)\in L_\infty^r[0,\,t];$$

$$F_t''(v_1(\cdot),\,v_2(\cdot))=\Phi_{t*}\mathscr{V}_t^{(2)}(\tilde{u}(\cdot))\,(v_1(\cdot),\,v_2(\cdot))+\operatorname{im}F_t',$$

$$\forall v_1(\cdot),\,v_2(\cdot)\in\ker F_t'.$$

Удобно сделать замену переменных в M, рассматривая вместо F_t отображение $G_t=\tilde{\Phi}_t^{-1}\circ F_t$, для которого выполняется равенство $G_t(\tilde{u}(\cdot))=\mu_0$. Поскольку $\tilde{\Phi}_t$ — диффеоморфизм, то, с точки зрения интересующих нас вопросов, отображения F_t и G_t полностью эквиваленты, например, $F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t)=G_t^{-1}(\mu_0)$. Пусть G_t' — дифференциал, а G_t'' — гессиан отображения G_t в точке $\tilde{u}(\cdot)$, тогда $F_t'=\tilde{\Phi}_{t*}G_t'$, $F_t''=\tilde{\Phi}_{t*}G_t''$, так что

$$G_t'v(\cdot)=\mathscr{V}_t^{(1)}(u(\cdot))\,v(\cdot)$$

$$G_t''(v_1(\cdot),\,v_2(\cdot))=\mathscr{V}_t^{(2)}(u(\cdot))\,(v_1(\cdot),\,v_2(\cdot))+\operatorname{im}G_t', \tag{7}$$

$$v(\cdot)\in L_\infty^r[0,\,t],\ v_1(\cdot),\ v_2(\cdot)\in\ker G_t'.$$

§ 3. ВТОРАЯ ВАРИАЦИЯ И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Начнем с того, что выпишем явные выражения для G_t' и G_t''. Пусть

$$Z_t=\tilde{\Phi}_{t*}^{-1}\frac{\partial}{\partial u}f_t(\cdot,\,\tilde{u}(t)),\quad H_t=\tilde{\Phi}_{t*}^{-1}\frac{\partial^2}{\partial u^2}f_t(\cdot,\,\tilde{u}(t)),\ t\geqslant 0$$

$\left(\text{напомним, что } \tilde{\Phi}_{t*}^{-1} = \overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \operatorname{ad} f_\tau(\cdot, \tilde{u}(\tau))\, d\tau, \text{ а экстремаль } \tilde{u}(\tau)\right.$ кусочно гладко зависит от τ). Тогда $Z_t: \mathbf{R}^r \to \operatorname{Der} M$ — линейное отображение, а $H_t: \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \to \operatorname{Der} M$ — симметричное билинейное отображение, кусочно гладко зависящие от $t \geqslant 0$. Из формул (26), (27) следует, что

$$G'_t v(\cdot) = \mu_0 \circ \int\limits_1^t Z_\tau v(\tau)\, d\tau, \quad \operatorname{im} G'_t = \sum_{0 < \tau \leqslant t} (Z_\tau \mathbf{R}^r)$$

$$G''_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \mu_0 \circ \int\limits_0^t (H_\tau(v_1(\tau), v_2(\tau)) +$$

$$+ \left[\int\limits_0^\tau Z_\theta v_1(\theta)\, d\theta, Z_\tau v_2(\tau)\right] d\tau + \operatorname{im} G'_t,$$

$v(\cdot) \in L^r_\infty[0, t]$, $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot) \in \ker G_t'$.

Зафиксируем момент времени $t > 0$ и положим

$$\Pi = \operatorname{im} G'_t = \sum_{0 < \tau \leqslant t} Z_\tau \mathbf{R}^r$$

Пусть $\mathscr{E}_\Pi$ — подмодуль в $\operatorname{Der} M$, состоящий из всех векторных полей, значение которых в точке μ_0 лежит в Π, и $\operatorname{norm}(\mathscr{E}_\Pi)$ — нормализатор подпространства $\mathscr{E}_\Pi$ в алгебре Ли $\operatorname{Der} M$, т. е.

$$\operatorname{norm}(\mathscr{E}_\Pi) = \{X \in \operatorname{Der} M \mid [X, \mathscr{E}_\Pi] \subset \mathscr{E}_\Pi\} \subset \mathscr{E}_\Pi.$$

Положим $E_\Pi = \mathscr{E}_\Pi / \operatorname{norm} \mathscr{E}_\Pi$. Операция коммутирования векторных полей следующим образом определяет структуру нильпотентной алгебры Ли на пространстве $E_\Pi \oplus T_{\mu_0} M / \Pi$.

Пусть $x, y \in E_\Pi$, $\xi, \eta \in T_{\mu_0} M / \Pi$, причем $x = X + \operatorname{norm} \mathscr{E}_\Pi$, $y = Y + \operatorname{norm} \mathscr{E}_\Pi$, где $X, Y \in \mathscr{E}_\Pi$, тогда

$$[x + \xi, y + \eta] \overset{\text{def}}{=} (\mu_0 \circ [X, Y] + \Pi) \in T_{\mu_0} M / \Pi.$$

Для любого $\tau \in [0, t]$ обозначим через $h_\tau(v_1, v_2)$ образ вектора $\mu_0 \circ H_\tau(v_1, v_2)$ при факторизации $T_{\mu_0} M \to T_{\mu_0} M / \Pi$ $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r$, а через $\mathfrak{z}_\tau v$ — образ векторного поля $Z_\tau v$ при факторизации $\mathscr{E}_\Pi \to \mathscr{E}_\Pi / \operatorname{norm} \mathscr{E}_\Pi = E_\Pi$. Тогда

$$G''_t(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int\limits_0^t (h_\tau(v_1(\tau), v_2(\tau)) +$$

$$+ \left[\int\limits_0^\tau \mathfrak{z}_\theta v_1(\theta)\, d\theta, \mathfrak{z}_\tau v_2(\tau)\right] d\tau. \qquad (1)$$

Перейдем к описанию пространства E_Π.

Пусть I_{μ_0} — максимальный идеал в алгебре $C_\infty(M)$, состоящий из функций, обращающихся в нуль в точке μ_0. Следующая цепочка включений проверяется непосредственно:

$$I_{\mu_0}^2 \operatorname{Der} M \subset I_{\mu_0}\mathscr{E}_\Pi \subset \operatorname{norm}\mathscr{E}_\Pi \subset I_{\mu_0} \operatorname{Der} M \subset \mathscr{E}_\Pi. \tag{2}$$

Используя предпоследнее включение в цепочке (2), получаем, что отображение $Z \to \mu_0 \cdot Z$, сопоставляющее всякому полю $Z \in \mathscr{E}_\Pi$ его значение в точке μ_0, обращается в нуль на $\operatorname{norm}\mathscr{E}_\Pi$, следовательно, индуцирует некоторое линейное отображение $\overline{\mu}_0 : E_\Pi \to \Pi$. При этом, как нетрудно видеть, $\operatorname{im}\overline{\mu}_0 = \Pi$, $\ker\overline{\mu}_0 = I_{\mu_0} \operatorname{Der} M/\operatorname{norm}\mathscr{E}_\Pi$. Далее, учитывая первые два включения в цепочке (2), получаем, что отображение $(\varphi, X) \to \varphi X$, сопоставляющее функции $\varphi \in I_{\mu_0}$ и векторному полю $X \in \operatorname{Der} M$ поле $\varphi X \in I_{\mu_0} \operatorname{Der} M$, индуцирует некоторое линейное отображение $\overline{j} : T^*_{\mu_0}M \otimes (T_{\mu_0}M/\Pi) \to E_\Pi$. Легко убедиться, что

$$\operatorname{im}\overline{j} = I_{\mu_0} \operatorname{Der} M/\operatorname{norm}\mathscr{E}_\Pi, \quad \ker\overline{j} = \Pi^\perp \oplus (T_{\mu_0}M/\Pi).$$

Поскольку $T^*_{\mu_0}M/\Pi^\perp = \Pi^*$, то мы получаем (естественную) точную последовательность

$$0 \to \Pi^* \oplus (T_{\mu_0}M/\Pi) \xrightarrow{j} E_\Pi \xrightarrow{\overline{\mu}_0} \Pi \to 0, \tag{3}$$

где вложение j индуцировано отображением $\overline{j}$.

Пусть $\operatorname{codim}\Pi = k > 0$. Из точной последовательности вытекает, что $\dim E_\Pi = (d-k)(k+1)$. Операция коммутирования в алгебре Ли $E_\Pi \oplus T_{\mu_0}M/\Pi$ следующим образом связана с точной последовательностью (3):

$$[z, j(\omega \oplus \nu)] = (\omega\overline{\mu}_0 z)\,\nu, \quad \forall z \in E_\Pi, \quad \omega \oplus \nu \in \Pi^* \oplus (T_{\mu_0}M/\Pi).$$

Задание произвольных локальных координат $q = (q_1, \ldots, q_d)^T : O \to \mathbb{R}^d$ в некоторой окрестности O точки μ_0 в M приводит к отождествлению пространства векторных полей на O с пространством гладких отображений $q \mapsto X(q)$ из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$. Оно автоматически определяет также координаты в пространстве E_Π. Пусть координаты q_α таковы, что $q_\alpha(\mu) = 0$, $\alpha = 1, \ldots, d$, и подпространство $\Pi \subset T_{\mu_0}M$ отождествляется с плоскостью $q_1 = \ldots = q_k = 0$ в $\mathbb{R}^d$. Тогда модуль $\mathscr{E}_\Pi$ отождествляется с подмодулем $\{X = (X_1, \ldots, X_d)^T \in C^d_\infty(\mathbb{R}^d) \mid X_i(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, k\}$ в $C^d_\infty(\mathbb{R}^d)$, а пространство $\operatorname{norm}\mathscr{E}_\Pi$ с подпространством

$$\Big\{X = (X_1, \ldots, X_d)^T \in C^n_\infty(\mathbb{R}^d) \mid X(0) = 0, \\ \frac{\partial X_i}{\partial q_j}(0) = 0, \; i = 1, \ldots, k; \; j = k+1, \ldots, d\Big\}.$$

Следовательно, величины $X_j(0)$; $\frac{\partial X_i}{\partial q_j}(0)$; $i = 1, \ldots, k$; $j = k + 1, \ldots, d$, задают координаты в пространстве $E_\Pi = \mathscr{E}_\Pi/\operatorname{norm}\mathscr{E}_\Pi$. Пусть $x = \left(X_{k+1}(0), \ldots, X_d(0), \frac{\partial X_1}{\partial q_{k+1}}(0), \ldots \frac{\partial X_k}{\partial q_d}(0)\right)$ — некоторый элемент пространства E_Π, выраженный в этих координатах. Ясно, что $\overline{\mu_0}x=(X_{k+1}(0), \ldots, X_d(0))^T$. Таким образом, наши координаты расщепляют точную последовательность (3). Кроме того, для любых $x, y \in E_\Pi$

$$[x, y]=\left(\sum_{j=k+1}^{d}\left(\frac{\partial Y_1}{\partial q_j}X_j-\frac{\partial X_1}{\partial q_j}Y_j\right), \ldots \sum_{j=k+1}^{d}\left(\frac{\partial Y_k}{\partial q_j}X_j-\frac{\partial X_k}{\partial q_j}Y_j\right)\right)^T.$$

Заметим, что в важном частном случае $k=\operatorname{codim}\Pi=1$ отображение $(x, y)\mapsto[x, y]$ из $E_\Pi\times E_\Pi$ в $T_{\mu_0}M/\Pi=\mathbf{R}$ является симплектической формой на E_Π, причем введенные выше координаты — канонические для этой формы. В этом случае алгебра Ли $E_\Pi\oplus T_{\mu_0}M/\Pi=E_\Pi\oplus\mathbf{R}$ изоморфна обобщенной алгебре Гейзенберга (см. [13]), а точная последовательность (3) принимает вид

$$0\to\Pi^*\xrightarrow{j}E_\Pi\xrightarrow{\overline{\mu_0}}\Pi\to 0.$$

Пусть теперь k произвольно и $\psi\in\Pi^\perp\setminus 0$. Отображение $(x, y)\mapsto\psi[x, y]$ определяет кососимметричную билинейную форму на E_Π. Из тождества $\psi[z, j(\omega\otimes\nu)]=(\omega\overline{\mu_0}z)(\psi\nu)$ вытекает, что ядро этой формы совпадает с $j(\Pi^*\oplus(\psi^\perp))$. Следовательно, форма $(x, y)\mapsto\psi[x, y]$ определяет симплектическую структуру на пространстве

$$E_{\Pi,\psi}=E_\Pi/j(\Pi^*\oplus(\psi^\perp)).$$

Поскольку, очевидно, $(T_{\mu_0}M/\Pi)/(\psi^\perp)\approx\mathbf{R}$, а j — инъективное отображение, то имеется точная последовательность

$$0\to\Pi^*\to E_{\Pi,\psi}\to\Pi\to 0, \tag{4}$$

индуцированная последовательностью (3). Как и в случае $k=1$ введение локальных координат в окрестности точки μ_0 расщепляет точную последовательность (4) и определяет канонические координаты.

Начиная с этого места и до конца настоящего параграфа вектор $\psi\in\Pi^\perp\setminus 0$ фиксирован; положим $\Sigma=E_{\Pi,\psi}$ и обозначим через σ симплектическую структуру на Σ. В соответствии с вышесказанным Σ является факторпространством $\mathscr{E}_\Pi$ по некоторому подпространству коразмерности $2\dim\Pi=2(d-k)$ в $\mathscr{E}_\Pi$. Симплектическая структура σ индуцирована кососимметрической формой $(X, Y)\mapsto\psi(\mu_0\circ[X, Y])$ на $\mathscr{E}_\Pi$. Обозначим $\Pi_0=\ker\overline{\mu_0}$ — образ в Σ подпространства $I_{\overline{\mu_0}}\mathscr{E}_\Pi$. Ясно, что Π_0 — лагранжево подпространство в Σ. В координатах $(q_1, \ldots, q_d)$ каноническая факторизация $\mathscr{E}_\Pi\to\Sigma$ имеет вид

$$X=(X_1, \ldots, X_d)\mapsto\left(X_{k+1}(0), \ldots, X_d(0),\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{k}\psi_i\frac{\partial X_i}{\partial q_{k+1}}(0), \ldots, \sum_{i=1}^{k}\psi_i\frac{\partial X_i}{\partial q_d}(0)\right),$$

где $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_k, 0, \ldots, 0)$.

Пусть $z_\tau(\psi)v$ — образ поля $Z_\tau v$ при факторизации $\mathcal{E}_\Pi \to \Sigma$, тогда

$$\psi G_t''(v_1(\cdot), v_2(\cdot)) = \int_0^t (\psi h_\tau(v_1(\tau), v_2(\tau)) +$$

$$+ \sigma\left(\int_0^\tau z_\theta(\psi) v_1(\theta)\, d\theta,\ z_\tau(\psi) v_2(\tau)\right) d\tau. \quad (5)$$

Условие $v_t(\cdot) \in \ker G_t'$ эквивалентно соотношению $\int_0^t z_\tau(\psi) v_t(\tau)\, d\tau \in \Pi_0$.

В дальнейшем, аргумент ψ в обозначении $z_\tau(\psi)$ и $z_\tau^{(i)}(\psi) = \frac{d^i}{d\tau^i} z_\tau(\psi)$, $i \geqslant 0$ мы будем, как правило, опускать. Поскольку ковектор ψ фиксирован, это не вызовет недоразумений. Положим, наконец, $m = d - k = \dim \Pi$.

2. Основной целью настоящего параграфа является получение явных и возможно более гибких выражений для индекса инерции квадратичной формы $\psi G_t''$. Задача вычисления индекса интегральной квадратичной формы имеет длинную историю; для второй вариации регулярной вариационной задачи она была решена Морсом [19] в терминах т. н. сопряженных точек. В ряде работ (см. [15], [17]) формула Морса обобщалась на некоторые вырожденные ситуации. Достаточно хорошо известна и интерпретация результата Морса в терминах симплектической геометрии (см., например, [9]). Наша задача — получить явное выражение для индекса, устойчивое практически к любым вырождениям. При этом разумно вообще отказаться от того, чтобы следить за сопряженными точками.

В первую очередь следует установить условия конечности $\operatorname{ind} \psi G_t''$ или (что очень близко) условия неотрицательности $\psi G_t''(v(\cdot), v(\cdot))$ для любых $v(\cdot)$, отличных от нуля лишь на подмножествах достаточно малого диаметра в $[0, t]$.

Лемма 1. Предположим, что для некоторого $l \geqslant 0$ и полуинтервала $(\bar\tau, \tau] \subset (0, t]$ выполняются тождества: $\sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta v_2) = 0$, $\forall \theta \in (\bar\tau, \tau]$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r$, $\forall i < l$. Тогда

1) $\sigma(z_\theta^{(l-i)} v_1, z_\theta^{(i)} v_2) = (-1)^i \sigma(z_\theta^{(l)} v_1, z_\theta v_2)$, $\bar\tau < \theta \leqslant \tau$, $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r$, $i \leqslant l$.

2) Если $l \geqslant 2m$, то $\sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta^{(j)} v_2) = 0$, $\forall i, j \geqslant 0$, $\bar\tau < \theta \leqslant \tau$, $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r$.

Доказательство. 1) Воспользуемся индукцией по величине l. При $l = 0$ доказывать нечего. Шаг индукции:

$$\sigma(z_\theta^{(l)} v_1, z_\theta v_2) = \frac{d}{d\theta} \sigma(z_\theta^{(l-1)} v_1, z_\theta, v_2) - \sigma(z_\theta^{(l-1)} v_1, z_\theta^{(1)} v_2) =$$

$$= -\sigma\left(z_\theta^{(l-1)}v_1,\ z_\theta^{(1)}v_2\right) = -\frac{d}{d\theta}\,\sigma\left(z_\theta^{(l-2)}v_1,\ z_\theta^{(1)}v_2\right) +$$
$$+\sigma\left(z_\theta^{(l-2)}v_1,\ z_\theta^{(2)}v_2\right) = \sigma\left(z_\theta^{(l-2)}v_1,\ z_\theta^{(2)}v_2\right) = \ldots$$
$$\ldots = (-1)^l\,\sigma\left(z_\theta^{(l-i)}v_1,\ z_\theta^{(i)}v_2\right).$$

2) Поскольку $\dim\Sigma = 2m$, то для всех τ из некоторого открытого всюду плотного в $[0, t]$ подмножества справедливо разложение $z_\tau^{(2m)}v = \sum\limits_{i=0}^{2m-1} \alpha_i(\tau, v)\, z_\tau^{(i)}v$, где $\alpha_i(\tau, v)$ гладко зависят от τ. Дифференцируя это тождество по τ, мы можем представить производную сколь угодно высокого порядка от $z_\tau v$ в виде линейной комбинации первых $2r-1$ производных. ■

Каждому $\tau\in(0, t]$ следующим образом сопоставим целое число $k_\tau \geqslant 0$ и квадратичную форму γ_τ на $\mathbf{R}^r$: если форма ψh_θ не равна тождественно нулю ни на каком интервале $\bar\tau < \theta < \tau$, то положим $k_\tau = 0$, $\gamma_\tau(v) = \psi h_\tau(v, v)$, в противном случае пусть k_τ — такое максимальное число k, что $\sigma\left(z_\theta^{(i)}v_1, z_\theta v_2\right) \equiv 0$ при $i < 2(k-1)$, $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r$ на некотором интервале $\bar\tau < \theta < \tau$, $\gamma_\tau(v) = \sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)}v,\ z_\tau^{(k_\tau-1)}v\right)$, $v\in\mathbf{R}^r$, если же максимального k не существует (т. е. $\sigma(z_\theta^{(i)}v_1, z_\theta v_2) \equiv 0$ при $i \leqslant 2m$), то положим $k_\tau = m+1$, $\gamma_\tau = 0$.

Предложение 1. Если $\operatorname{ind}\psi G_t'' < +\infty$, то:

а) $\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau-1)}v_1,\ z_\tau^{(k_\tau-1)}v_2\right) = 0$, $\forall v_1, v_2\in\mathbf{R}^r$, $\tau\in(0, t]$;

б) $\gamma_\tau(v) \geqslant 0$, $\tau\in(0, t]$, $v\in\mathbf{R}^r$.

Обратно, если выполняется условие а) и $\gamma_\tau(v) \geqslant \varepsilon |v|^2$ для любых $v\in\mathbf{R}^r$, $\tau\in(0, t]$ и некоторого $\varepsilon > 0$, то $\operatorname{ind}\psi G_t'' < +\infty$.

Доказательство. Предположим, что $\psi h_\tau = 0$ при $\tau\in(t_1, t_2)$, а z_τ — гладкая на этом интервале. Тогда для всякой функции $v(\cdot)$, отличной от нуля лишь на отрезке $[t_1, t_2]$, имеем

$$\psi G_t''(v(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} \sigma\left(\int_{t_1}^{\tau} z_\theta v(\theta)\,d\theta,\ z_\tau v(\tau)\right) d\tau.$$

Производя интегрирование по частям (при котором $v(\tau)$ интегрируется, а $\int_{t_1}^{\tau} z_\theta v(\theta)\,d\theta$ и z_τ дифференцируется) и положив $w_1(\tau) = \int_{t_1}^{\tau} v(\theta)\,d\theta$, получим

$$\psi G_t''(v(\cdot), v(\cdot)) = -\int_{t_1}^{t_2} \sigma(z_\tau v(\tau),\ z_\tau w_1(\tau))\,d\tau -$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\sigma\left(\int_{t_1}^{\tau} z_\theta v(\theta)\,d\theta,\ z_\tau^{(1)} w_1(\tau)\right)d\tau+\sigma\left(\int_{t_1}^{t_2} z_\tau v(\tau)\,d\tau,\ z_{t_2} w_1(t_2)\right)=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\sigma(z_\tau w_1(\tau),\ z_\tau v(\tau))\,d\tau+\int_{t_1}^{t_2}\sigma(z_\tau^{(1)} w_1(\tau),\ z_\tau w_1(\tau))\,d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\sigma\left(\int_{t_1}^{\tau} z_\theta^{(1)} w_1(\theta)\,d\theta,\ z_\tau^{(1)} w_1(\tau)\right)d\tau-$$

$$-\sigma\left(\int_{t_1}^{t_2} z_\tau w_1(\tau)\,d\tau,\ z_{t_2} w_1(t_2)\right).$$

Если $k_\tau>1$ при $\tau\in(t_1,\ t_2]$, то первые два слагаемых в правой части равны нулю; в этом случае третье слагаемое снова проинтегрируем по частям и т. д. Если вдобавок $k_\tau=\mathrm{const}$ при $\tau\in(t_1,\ t_2)$, то в конце концов получим

$$\psi G_t''=\int_{t_1}^{t_2}\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau-1)} w_{k_\tau}(\tau),\ z_\tau^{(k_\tau-1)} w_{k_\tau-1}(\tau)\right)d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\gamma_\tau(w_{k_\tau}(\tau))\,d\tau+\int_{t_1}^{t_2}\sigma\left(\int_{t_1}^{\tau} z^{(k_\tau)} w_{k_\tau}(\theta)\,d\theta,\ z_\tau^{(k_\tau)} w_{k_\tau}(\tau)\right)d\tau-$$

$$-\sum_{j=0}^{k_\tau-1}(-1)^{k_\tau+j}\sigma\left(\int_{t_1}^{t_2} z_\theta^{(k_\tau)} w_{k_\tau}(\theta)\,d\theta,\ z_{t_2}^{(j)} w_{j+1}(t_2)\right),\qquad(6)$$

где $w_0(\tau)=v(\tau)$, $w_i(\tau)=\int\limits_{t_1}^{\tau} w_{i-1}(\theta)\,d\theta$ при $i>0$.

Заметим, что $\|w_i(\cdot)\|_\infty\leqslant|t_2-t_1|\cdot\|w_{i-1}(\cdot)\|_\infty$. Ясно, что $(v_1, v_2)\mapsto\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau-1)}v_1,\ z_\tau^{(k_\tau-1)}v_2\right)$ — кососимметричная форма на $\mathbf{R}^r$. Предположим, что эта форма отлична от нуля для некоторого $\tau\in[t_1,\ t_2]$, не уменьшая общности, можно считать, что $\tau=t_2$. Нетрудно видеть, что на подпространстве коразмерности rk_τ в $L_\infty^r[t_1, t_2]$, определяемом условиями $w_j(t_2)=0, j=1, \ldots, k_\tau$, справедливо соотношение

$$\psi G_t''(v(\cdot),\ v(\cdot))=\int_{t_1}^{t_2}\sigma\left(z_{t_2}^{(k_\tau-1)} w_{k_\tau}(\tau),\ z_{t_2}^{(k_\tau-1)} w_{k_\tau-1}(\tau)\right)d\tau+$$

$$+O\left(|t_2-t_1|\,\|w_{k_\tau}(\cdot)\|^2\right).$$

Если форма $\psi G_t''$ имеет конечный индекс, то из неравенства $\|w_{k_\tau}(\cdot)\|_\infty\leqslant|t_2-t_1|\,\|w_{k_\tau-1}(\cdot)\|_\infty$ без труда выводим, что форма

$$\int_{t_1}^{t_2}\sigma\left(z_{t_2}^{(k_\tau-1)} w_{k_\tau}(\tau),\ z_{t_2}^{(k_\tau-1)} w_{k_\tau-1}(\tau)\right)d\tau\qquad(7)$$

также должна иметь конечный индекс. В то же время существует такая инволюция $J:\mathbf{R}^r\to\mathbf{R}^r$, $J^2=\mathrm{id}$ пространства $\mathbf{R}^r$, что

$$\sigma\left(z_{t_2}^{(k_\tau-1)}Jv_1,\ z_{t_2}^{(k_\tau-1)}Jv_2\right)=-\sigma\left(z_{t_2}^{(k_\tau-1)}v_1,\ z_{t_2}^{(k_\tau-1)}v_2\right)\ \forall v_1,\ v_2\in\mathbf{R}^r$$

(соответствующая инволюция имеется, очевидно, для каждой кососимметричной формы на $\mathbf{R}^r$). Следовательно, каждому подпространству в $L_2^r[t_1, t_2]$, на котором форма (7) положительна, соответствует подпространство такой же размерности, на котором форма (7) отрицательна. Поскольку ядро формы (7) имеет, очевидно, бесконечную коразмерность, мы пришли к противоречию.

Итак, конечность индекса формы $\psi G_t''$ влечет тождество

$$\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau-1)}v_1,\ z_\tau^{(k_\tau-1)}v_2\right)=0,\quad \forall v_1,\ v_2\in\mathbf{R}^r.$$

В этом случае из равенства (6) вытекает, что на подпространстве коразмерности rk_τ в $L_\infty^r[t_1, t_2]$, определяемом условиями $w_j(t_2)=0$, $j=1,\ldots,k_\tau$ выполняется соотношение

$$\psi G_t''(v(\cdot),\ v(\cdot))=\int_{t_1}^{t_2}\gamma_\tau(w_{k_\tau}(\tau))\,d\tau+O(|t_2-t_1|^2\,\|w_{k_\tau}(\cdot)\|_\infty^2).$$

Если индекс формы конечен, то должен быть конечен и индекс формы $\int_{t_1}^{t_2}\gamma_\tau(w_{k_\tau}(\tau))\,d\tau$, что, очевидно, возможно лишь при $\gamma_\tau\geqslant 0$.

Предположим теперь, что условие а) из формулировки предложения 1 выполнено и, кроме того, $\gamma_\tau(v)\geqslant\varepsilon|v|^2$, $\forall v\in\mathbf{R}^r$. Из определения чисел k_τ и форм γ_τ следует, что в этом случае k_τ терпит разрывы лишь в точках нарушения гладкости кривых $\tau\mapsto z_\tau$ и $\tau\mapsto\psi h_\tau$.

Пусть $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_l=t$ — некоторое разбиение отрезка $[0, t]$, причем среди точек τ_i содержатся все точки нарушения гладкости z_τ и ψh_τ.

Всякая $v(\cdot)\in L_\infty^r[0, t]$ однозначно представляется в виде $v(\cdot)=\sum_{i=1}^{l}v_i(\cdot)$, где $v_i(\tau)$ отличны от нуля лишь при $\tau_{i-1}<\tau\leqslant\tau_i$. Пусть $v(\cdot)\in L_\infty^r[0, t]$ — такова, что

$$\int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} z_\tau v(\tau)\,d\tau=0,\quad i=1,\ \ldots,\ l. \tag{8}$$

Тогда $\psi G_t''(v(\cdot),\ v(\cdot))=\sum_{i=1}^{l}\psi G_t''(v_i(\cdot),\ v_i(\cdot))$.

Условия (8) выделяют в $L^r_\infty[0, t]$ подпространство конечной коразмерности. Следовательно, для доказательства конечности индекса формы $\psi G''_t$ достаточно доказать конечность индекса каждой из форм $v(\cdot)\mapsto\psi G''_t(v_i(\cdot), v_i(\cdot))$. В частности, достаточно рассматривать лишь такие $v(\cdot)$, которые обращаются в нуль вне некоторого отрезка $(\tau_{i-1}, \tau_i]$. Поскольку $k_\tau=\mathrm{const}$ при $\tau\in(\tau_{i-1}, \tau_i]$, то справедливо представление (6), где $t_1=\tau_{i-1}$, $t_2=\tau_i$. С учетом условия а) получаем, что на подпространстве конечной коразмерности в $L^r_2[\tau_{i-1}, \tau_i]$ наша форма совпадает с формой

$$\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\gamma_\tau(w_{k_\tau}(\tau))\,d\tau+\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\sigma\Big(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau} z_\theta^{(k_\tau)}\,w_{k_\tau}(\theta)\,d\theta,\ z_\tau^{(k_\tau)}\,w_{k_\tau}(\tau)\Big)\,d\tau,$$

т. е. с сужением на некоторое подпространство формы

$$Q_i(w)=\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\gamma_\tau(w(\tau))\,d\tau+\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i}\sigma\Big(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau} z_0^{(k_\tau)}w(\theta)\,d\theta,\ z_\tau^{(k_\tau)}\,w(\tau)\Big)\,d\tau,$$

$$w(\cdot)\in L^r_2\,[\tau_{i-1}, \tau_i].$$

Однако, согласно классической теореме Гильберта — Шмидта, квадратичная форма Q_i положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $L^2_r[\tau_{i-1}, \tau_i]$.

Как мы уже отмечали, если $\gamma_\tau(v)\geqslant\varepsilon|v|^2$ $\forall\tau\in[0, t]$, $v\in\mathbf{R}^r$, то γ_τ и k_τ — кусочно гладкие непрерывные слева функции на $[0, t]$, гладкие в любой точке гладкости кривой $\tau\mapsto z_\tau$.

Мы сначала научимся вычислять индекс формы $\psi G_t''$ в случае, когда $\gamma_\tau(v)\geqslant\varepsilon|v|^2$, а затем в п. 6) отметим, что нужно изменить, если γ_τ вырождается. Таким образом, везде ниже, если не оговорено противное, предполагается, что $\gamma_\tau(v)\geqslant\varepsilon|v|^2$ $\forall\tau\in[0, t]$, $v\in\mathbf{R}^r$ и некоторого $\varepsilon>0$.

3. В этом и следующем пунктах широко используются обозначения и результаты симплектической геометрии, собранные в приложении к настоящему параграфу.

Рассмотрим семейства подпространств

$$\Gamma_\tau=\sum_{i=0}^{k_\tau-1} z_\tau^{(i)}\mathbf{R}^r,\quad \overline{\Gamma}_\tau=\sum_{j=k_\tau}^{2k_\tau-1} z_\tau^{(j)}\mathbf{R}^r.$$

Лемма 2. а) $\overline{\Gamma}_\tau\cap\Gamma_\tau^{\angle}=0$, $\Gamma_\tau\cap\overline{\Gamma}_\tau^{\angle}=0$; б) $\dim\Gamma_\tau=\dim\overline{\Gamma}_\tau=rk_\tau$; в) семейства подпространств Γ_τ, $\overline{\Gamma}_\tau$ кусочно гладко зависят от $\tau\in[0, t]$, причем эта зависимость гладкая в любой точке гладкости кривых $\tau\mapsto z_\tau$, $\tau\mapsto\psi h_\tau$.

Доказательство. а) Тождество $\sigma(z_\tau^{(i)}, z_\tau^{j})=0$, i, $j<k_\tau$, равносильное включению $\Gamma_\tau\subset\Gamma_\tau^{\angle}$, вытекает из леммы 1. Предпо-

ложим, что $\left(\sum_{j=k_\tau}^{n} z_\tau^{(j)} v_j\right) \angle \Gamma$, причем $v_n \neq 0$, $k_\tau \leqslant n \leqslant 2k_\tau - 1$. Тогда

$$0 = \sigma\left(z_\tau^{(2k_\tau - n - 1)} v_n,\ \sum_{j=k_\tau}^{n} z_\tau^{(j)} v_j\right) = \sigma\left(z_\tau^{(2k_\tau - n - 1)} v_n,\ z_\tau^{(n)} v_n\right) =$$

$$= (-1)^{n + k_\tau - 1} \gamma_\tau(v_n),$$

что противоречит положительной определенности формы γ_τ. Следовательно, $\overline{\Gamma}_\tau \cap \Gamma_\tau^{\angle} = 0$.

Аналогичные рассуждения доказывают соотношение $\overline{\Gamma}_\tau \cap \cap \Gamma_\tau^{\angle} = 0$, а также утверждение б). Утверждение в) следует из б) и постоянства k_τ вблизи любой точки гладкости кривых z_τ, $\psi h(\tau)$.

Форма γ_τ, как и всякая квадратичная форма на $\mathbf{R}^r$, определяется некоторым самосопряженным отображением $\hat{\gamma}_\tau : \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^{r*}$ так, что $\gamma_\tau(v) = (\hat{\gamma}_\tau v) v$. Обозначим через γ_τ^{-1} квадратичную форму на $\mathbf{R}^{r*}$, определяемую отображением $\hat{\gamma}_\tau^{-1}$, т. е. $\gamma_\tau^{-1}(v^*) = v^*(\hat{\gamma}_\tau^{-1} v^*)$. Далее, для всякого $x \in \Sigma$ отображение $v \mapsto \sigma(z_\tau^{(k_\tau)} v, x)$ есть линейная форма на $\mathbf{R}^r$, таким образом, $\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)} \cdot, x\right) \in \mathbf{R}^r$, а соответствие

$$x \mapsto \frac{1}{2} \gamma_\tau^{-1}\left(\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)} \cdot, x\right)\right),\ x \in \Sigma, \tag{9}$$

определяет квадратичную форму на симплектическом пространстве Σ.

Предположим, что $v_\tau^1, \ldots, v_\tau^r$ — такой базис в $\mathbf{R}^r$, что $(\hat{\gamma}_\tau v_\tau^i) v_\tau^j = 0$ при $i \neq j$, тогда

$$\frac{1}{2} \gamma_\tau^{-1}\left(\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)} \cdot, x\right)\right) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i, x\right)^2}{2\gamma_\tau\left(v_\tau^i\right)}.$$

Всякая гладкая функция на симплектическом пространстве — гамильтониан — определяет гамильтонову систему дифференциальных уравнений на этом пространстве; если гамильтониан зависит от времени τ, то система нестационарна, если гамильтониан — квадратичная форма, то гамильтонова система линейна. Нестационарному квадратичному гамильтониану (9) отвечает гамильтонова система

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i, x\right)}{\gamma_\tau\left(v_\tau^i\right)} z_\tau^{(k_\tau)} v_i;\ x \in \Sigma,\ \tau \in [0, t],$$

которая называется системой Якоби для рассматриваемой экстремали управляемой системы. Поток на Σ, определяемый системой Якоби, представляет собой однопараметрическое семейство линейных симплектических преобразований пространства Σ. Поскольку симплектические преобразования переводят лагранжевы плоскости в лагранжевы, система (10) определяет также поток на лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$. В соответствии с обозначениями, приведенными в приложении, этот поток на $L(\Sigma)$ порождается нестационарным векторным полем $\frac{1}{2}\gamma_\tau^{-1}\left(\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)}\cdot, \Lambda\right)\right)$, $\Lambda\in L(\Sigma)$. Дифференциальное уравнение

$$\dot{\Lambda}=\frac{1}{2}\gamma_\tau^{-1}\left(\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)}\cdot, \Lambda\right)\right),\quad \Lambda\in L(\Sigma),\quad \tau\in[0, t] \tag{11}$$

также назовем уравнением Якоби.

В дальнейшем, решениями уравнения (11) будем называть не только непрерывные, но и кусочно-непрерывные кривые, считая производной по τ в точке разрыва предел слева соответствующих производных. Таким образом, чтобы однозначно определить решение уравнения Якоби, нужно, кроме начального значения, задать еще скачки в точках разрыва.

Следующее понятие является для дальнейшего ключевым.

Определение. Якобиевой кривой называется кусочно-гладкая кривая Λ_τ на $L(\Sigma)$ удовлетворяющая уравнению Якоби и условиям $\Lambda_0=\Pi_0$, $\Lambda_{\tau+0}=\Lambda_\tau^{\Gamma_{\tau+0}}$, $\forall\tau\in[0, t]$.

Прямое вычисление показывает, что $\sigma(\Lambda_\tau, \Gamma_\tau)=0$, следовательно, $\Gamma_\tau\subset\Lambda_\tau\forall\tau\in[0, t]$, поэтому кривая является непрерывной в любой точке непрерывности Γ_τ.

Пусть набор точек $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_l=t$ содержит все точки нарушения гладкости кривых z_τ, ψh_τ. Более явно кривая Λ_τ описывается следующим образом:

$$\Lambda_0=\Pi_0,\quad \Lambda_{\tau_i+0}=(\Lambda_{\tau_i}+\Gamma_{\tau_i+0})^{\perp}\cap\Gamma_{\tau_i+0},\quad i=0, 1, \ldots, l-1,$$

$$\Lambda_\tau=\left\{x_\tau\in\Sigma\,|\,\dot{x}_\theta=\sum_{i=1}^{\tau}\frac{\sigma\left(z_\theta^{(k_\theta)}v_\theta^i, x_\theta\right)}{\gamma_\theta\left(v_\theta^i\right)}z_\theta^{(k_\theta)}v_\theta^i,\quad \tau_i<\theta\leqslant\tau,\quad x_{\tau_i+0}\in\Gamma_{\tau_i+0}\right\}$$

при $\tau_i<\tau\leqslant\tau_{i+1}$.

Для вычисления индекса квадратичной формы $\psi G_t''$ нам потребуется один симплектический инвариант тройки лагранжевых плоскостей. Пусть $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3\subset\Sigma$ — лагранжевы плоскости, и $\hat{\lambda}\in(\Lambda_1+\Lambda_3)\cap\Lambda_2/\bigcap_{i=1}^{3}\Lambda_i$. Тогда $\hat{\lambda}$ представляется в виде $\hat{\lambda}=\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_3$, где $\hat{\lambda}_j\in\Lambda_j/\bigcap_{i=1}^{3}\Lambda_i$, $j=1, 3$. Предположим, что $\hat{\lambda}_j=\lambda_j+\bigcap_{i=1}^{3}\Lambda_i$, $j=1, 3$ и положим $q(\hat{\lambda})=\sigma(\lambda_1, \lambda_3)$. Легко видеть, что величина $q(\hat{\lambda})$ определена корректно, т. е. выражение $\sigma(\lambda_1, \lambda_3)$ не зависит от выбора представителей соответствующих смежных классов. Таким образом, соответствие $\hat{\lambda} \mapsto q(\hat{\lambda})$ определяет квадратичную форму на $(\Lambda_1 + \Lambda_3) \cap \Lambda_2 / \bigcap_{i=1}^{3} \Lambda_i$. Введем обозначение:

$$\operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3) = \operatorname{ind} q + \frac{1}{2} \dim \ker q = \operatorname{ind} q + \frac{1}{2} (\dim (\Lambda_1 \cap \Lambda_2) + \\ + \dim (\Lambda_3 \cap \Lambda_2)) - \dim \left(\bigcap_{i=1}^{3} \Lambda_i \right),$$

где $\operatorname{ind} q$ — индекс инерции квадратичной формы $q(\hat{\lambda})$, а $\ker q$ — ядро этой формы.

Ясно, что $0 \leqslant \operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3) \leqslant m$, причем $\operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_1) = 0$,

$$\operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \operatorname{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_1, \Lambda_2) = \frac{1}{2}(m - \dim (\Lambda_1 \cap \Lambda_2)),$$

$$\operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3) + \operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_3, \Lambda_1) + \dim (\Lambda_1 \cap \Lambda_3) = m.$$

Мы рассмотрим другие формальные свойства этого индекса (и, в частности, его выражение через индекс Маслова тройки лагранжевых плоскостей) в п. 4, а пока еще одно определение.

Определение. Пусть Λ_t, $t \in [t_0, t_1]$, — некоторая кусочно гладкая кривая на многообразии лагранжевых плоскостей $L(\Sigma)$. Кривая Λ. называется простой, если существует такая лагранжева плоскость $\mathcal{P} \subset \Sigma$, что

$$\Lambda_t \cap \mathcal{P} = 0, \quad \operatorname{ind}_{\mathcal{P}}(\Lambda_t, \Lambda_{t+0}) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Лемма 3. Пусть Λ_t, $t \in [t_0, t_1]$, — кусочно-гладкая кривая на $L(\Sigma)$. Тогда для всякого $t \in [t_0, t_1]$ найдется такая окрестность O_t точки t в $[t_0, t_1]$, что кривая $\Lambda.|_{O_t}$ — простая.

Доказательство. Из предложения П 5 приложения к настоящему параграфу вытекает существование такое лагранжевой плоскости $\mathcal{P}$, что квадратичная форма $\lambda \mapsto \sigma(\lambda_t, \lambda_{t+0})$ на $(\Lambda_t + \Lambda_{t+0}) \cap \mathcal{P}$, где $\lambda = \lambda_t + \lambda_{t+0}$, $\lambda_t \in \Lambda_t$, $\lambda_{t+0} \in \Lambda_{t+0}$, неотрицательна, и $\Lambda_t \cap \mathcal{P} = \Lambda_{t+0} \cap \mathcal{P} = 0$. В этом случае $\operatorname{ind}_{\mathcal{P}}(\Lambda_t, \Lambda_{t+0}) = 0$.

Теорема 1. Пусть Λ_τ, $0 \leqslant \tau \leqslant t$ — якобиева кривая, и $\tau_{l+1} = 0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = t$ — произвольное разбиение отрезка $[0, t]$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{l} \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) \leqslant \operatorname{ind} \psi G_t'' + m. \tag{12}$$

Если же данное разбиение отрезка $[0, t]$ таково, что все куски $\Lambda.|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ якобиевой кривой простые, $0 \leqslant i < l$, то неравенство в формуле (12) обращается в равенство.

Прежде, чем доказывать теорему, опишем еще некоторые способы вычисления $\operatorname{ind} \psi G_t''$, все они тесно связаны с формулой (12).

Рассмотрим зависящее от $s\in[0, t]$ семейство квадратичных форм

$$\psi G_s''(v(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^s \psi h_\tau(v(\tau))\,d\tau +$$

$$+\int_0^s \sigma\left(\int_0^\tau z_\theta v(\theta)\,d\theta,\ z_\tau v(\tau)\right) d\tau,$$

$$v(\cdot)\in L_\infty^r[0, s], \quad \int_0^s z_\tau v(\tau)\,d\tau\in\Pi_0.$$

Нетрудно видеть, что $\operatorname{ind}\psi G_s''$ — неубывающая непрерывная слева функция параметра s. Эта функция полностью характеризуется своими скачками в точках разрыва, т. е. величинами $\operatorname{ind}\psi G_{s+0}''-\operatorname{ind}\psi G_s''$. Если в теореме 1 $\operatorname{ind}\psi G_t''$ представлен в виде «интегральной суммы», то теперь мы хотим явно вычислить «производную» этого «интеграла». Чтобы это сделать, придется ввести еще одно семейство подпространств в Σ; впрочем, для построения этого семейства не нужно даже решать дифференциальных уравнений.

Пусть $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant t$, положим

$$\Delta_\beta^\alpha = \Pi_0\cap\{z_\tau v \mid \alpha<\tau\leqslant\beta,\ v\in\mathbf{R}^r\}^{\angle}, \quad \Delta_{\beta+0}^\alpha = \bigcup_{\varepsilon>0}\Delta_{\beta+\varepsilon}^\alpha.$$

Легко видеть, что

$$\dim\Delta_\beta^\alpha = \operatorname{codim}\Big(\sum_{\alpha<\tau\leqslant\beta}\bar\mu_0 z_\tau\mathbf{R}^r\Big).$$

В самом деле, это следует из очевидных соотношений:

$$\Delta_\beta^{\alpha\angle} = \Pi_0 + \sum_{\alpha<\tau\leqslant\beta} z_\tau\mathbf{R}^r, \quad \ker\bar\mu_0 = \Pi_0.$$

В частности, $\Delta_t^0=0$, так как $\sum\limits_{0<\tau\leqslant t}\bar\mu_0 z_\tau\mathbf{R}^r=\Pi$. Заметим еще, что $\Delta_{\bar\beta}^{\bar\alpha}\subset\Delta_{\beta+0}^\alpha\subset\Delta_\beta^\alpha$, если $\bar\alpha\leqslant\alpha<\beta<\bar\beta$. Если же $\bar\mu_0 z_\tau$ аналитично зависит от $\tau\in[0, t]$, то $\Delta_{\alpha+0}^\alpha=0$ $\forall\alpha\in[0, t]$.

Теорема 2. Для любого $s\in[0, t)$ справедливо соотношение:

$$\operatorname{ind}\psi G_{s+0}''-\operatorname{ind}\psi G_s'' = \dim(\Lambda_{s+0}\cap\Pi_0/\Lambda_{s+0}\cap\Delta_{s+0}^s) - \dim(\Delta_s^0/\Delta_{s+0}^0) +$$

$$+\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+0}) + \frac{1}{2}(\dim(\Lambda_s\cap\Pi_0) - \dim(\Lambda_{s+0}\cap\Pi_0)).$$

Приведенное выражение внешне выглядит достаточно громоздко, однако последние три слагаемых дают вклад лишь в том случае, когда s — точка разрыва кривой Якоби, второе слагаемое почти тривиально.

Точка $s\in(0, t)$ называется сопряженной нулю точкой для уравнения Якоби, если $\Lambda_s\cap\Pi_0\neq 0$, а величина $\dim(\Lambda_s\cap\Pi_0)$ называется кратностью сопряженной точки s. Следующее утверждение указывает точные рамки, в которых справедлива классическая формула Морса для индекса второй вариации.

Следствие. Предположим, что $\Delta_s^0=\overset{s}{\Delta}_{s+0}$, и s — точка непрерывности якобиевой кривой Δ. Тогда

$$\operatorname{ind}\psi G''_{s+0}-\operatorname{ind}\psi G''_s=\dim(\Lambda_s\cap\Pi_0).$$

4. Доказательство теорем 1, 2 будет приведено в п. 5, а в настоящем пункте дана гомотопическая интерпретация формулы (12).

Пусть $\Lambda\in L(\Sigma)$. Ниже без специальных оговорок постоянно используется отождествление касательного пространства $T_\Lambda L(\Sigma)$ с пространством квадратичных форм на Λ, описанное в приложении к настоящему параграфу.

Определение. Кусочно гладкая кривая $\mathscr{A}_\tau$, $\tau\in[t_0, t_1]$, на $L(\Sigma)$ называется неубывающей, если скорость $\frac{d}{d\tau}\mathscr{A}_\tau\in T_{\mathscr{A}_\tau}L(\Sigma)$ есть неотрицательная квадратичная форма на $\mathscr{A}_\tau$.

Иными словами, $\mathscr{A}_\tau$ — неубывающая кривая, если $\frac{d}{d\tau}\mathscr{A}_\tau\geqslant 0$ $\forall\tau\,[t_0, t_1]$. В частности, якобиева кривая Λ_τ — неубывающая, поскольку

$$\frac{d}{d\tau}\Lambda_\tau=\frac{1}{2}\gamma_\tau^{-1}(\sigma(z_\tau^{(k_\tau)}\cdot, \Lambda_\tau))\geqslant 0.$$

Лемма 4. Любые две лагранжевы плоскости $\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_1\in L(\Sigma)$ можно соединить простой гладкой неубывающей кривой $\mathscr{A}_\tau$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$.

Доказательство. Из леммы 3 следует существование такой лагранжевой плоскости $\mathscr{B}$, что $\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_1\in\mathscr{B}^{\pitchfork}$ и $\operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}_0, \mathscr{A}_1)=0$. В предложении П1 и его следствии на множестве $\mathscr{B}^{\Psi}$ определена структура аффинного пространства. Прямолинейный отрезок, соединяющий $\mathscr{A}_0$ с $\mathscr{A}_1$ в этом аффинном пространстве, является, как нетрудно видеть, простой неубывающей кривой в $L(\Sigma)$.

В предложении П6 приведена формула, позволяющая вычислять индекс Маслова данной непрерывной замкнутой кривой через индексы Маслова подходящих троек лагранжевых плоскостей. Если кривая — неубывающая, удобнее использовать индекс, участвующий в формулировке утверждения теоремы 1. Для начала выразим один индекс через другой.

Лемма 5. Пусть $\Lambda_i\in L(\Sigma)$, $i=1, 2, 3$, тогда

$$\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)+2\operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3)+\dim(\Lambda_1\cap\Lambda_3)=m.$$

Доказательство. Напомним, что

$$\operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3) = \operatorname{ind} q + \frac{1}{2}\dim\ker q,$$

где q — квадратичная форма, заданная на пространстве $\Lambda_2 \cap (\Lambda_1 + \Lambda_3) / \bigcap_{i=1}^{3} \Lambda_i$. При этом $q(\hat{\lambda}) = \sigma(\lambda_1, \lambda_3)$, где $\lambda_j \in \Lambda_j$, $j = 1, 3$, $\hat{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_3 + \bigcap_{i=1}^{3} \Lambda_i$. В то же время $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ совпадает с сигнатурой формы q. Утверждение леммы вытекает теперь из равенства

$$\dim(\Lambda_2 \cap (\Lambda_1 + \Lambda_3) / \bigcap_{i=1}^{3} \Lambda_i) = m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3).$$

Следствие. Пусть $\Lambda_1 \cap \Lambda_3 \supset S$ — изотропное подпространство в Σ. Тогда

$$\operatorname{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3) = \operatorname{ind}_{\Lambda_2^S}(\Lambda_1, \Lambda_3).$$

В самом деле, $\Lambda_1^S = \Lambda_1$, $\Lambda_3^S = \Lambda_3$, $\mu(\Lambda_1^S, \Lambda_2^S, \Lambda_3^S) = \mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$.

Предложение 2. Пусть $\mathscr{A}_\tau$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, — непрерывная замкнутая неубывающая кривая на $L(\Sigma)$, и $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots \ldots < \tau_N < \tau_{N+1} = t_1$ — некоторое разбиение отрезка $[t_0, t_1]$, $\mathscr{B} \in L(\Sigma)$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{N} \operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}_{\tau_i}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}) \leqslant \operatorname{Ind}\mathscr{A}. \tag{13}$$

Если же разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ таково, что все кривые $\mathscr{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые, то неравенство в формуле (13) обращается в равенство.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда кривые $\mathscr{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые.

Пусть T_i — лагранжева плоскость, трансверсальная к кривой $\mathscr{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$, $i = 0, \ldots, N$. Тогда, согласно предложению П6,

$$2\operatorname{Ind}\mathscr{A} = \sum_{i=0}^{N} (\mu(T_i, \mathscr{B}, \mathscr{A}_{\tau_i}) - \mu(T_i, \mathscr{B}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}})).$$

В то же время из цепного правила для индекса Маслова следует

$$\mu(T_i, \mathscr{B}, \mathscr{A}_{\tau_i}) - \mu(T_i, \mathscr{B}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}) = \mu(\mathscr{B}, \mathscr{A}_{\tau_i}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}) - \\ - \mu(T_i, \mathscr{A}_{\tau_i}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}) = -\mu(\mathscr{A}_{\tau_i}, \mathscr{B}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}) - \mu(T_i, \mathscr{A}_{\tau_i}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}),$$

Пусть $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$, обозначим через $p_\tau : \Sigma \to \mathscr{A}_\tau$ проектор пространства Σ на $\mathscr{A}_\tau$ параллельно T_i. Тогда $-\mu(T_i, \mathscr{A}_{\tau_i}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}})$ совпадает с сигнатурой квадратичной формы $\alpha \mapsto \sigma(p_{\tau_{i+1}}\alpha, \alpha)$, заданной на пространстве $\mathscr{A}_{\tau_l}$. Поскольку $\mathscr{A}_\tau$ — неубывающая кривая, то квадратичная форма $\alpha \mapsto \sigma(\dot{p}_\tau \alpha, \alpha)$ неотрицательна на $\mathscr{A}_\tau$, $\forall \tau \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$. В то же время, из тождества $\sigma(p_\tau x, \xi) = \mho(x, \xi)$, верного для любых $\tau \in [\tau_l, \tau_{l+1}]$, $x \in \Sigma$, $\xi \in T_l$ (см. П1), вытекает, что $\sigma(\dot{p}_\tau x, \xi) = 0$, $\forall x \in \Sigma$, $\xi \in T_l$. Поэтому форма $\alpha \mapsto \sigma(\dot{p}_\tau \alpha, \alpha)$, будучи неотрицательной на подпространстве $\mathscr{A}_\tau$, являющемся прямым дополнением к T_l в Σ, неотрицательна также на всем Σ. Далее, для любого $\alpha \in \mathscr{A}_{\tau_l}$ имеем

$$\sigma(p_{\tau_{l+1}} \alpha, \alpha) = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \sigma(\dot{p}_\tau \alpha, \alpha)\, d\tau \geqslant 0.$$

Ядро формы $\alpha \mapsto \sigma(p_{\tau_{l+1}} \alpha, \alpha)$ на $\mathscr{A}_{\tau_l}$ совпадает с $\mathscr{A}_{\tau_l} \cap \mathscr{A}_{\tau_{l+1}}$. Следовательно,

$$-\mu(T_l, \mathscr{A}_{\tau_l}, \mathscr{A}_{\tau_{l+1}}) = m - \dim(\mathscr{A}_{\tau_l} \cap \mathscr{A}_{\tau_{l+1}}).$$

Согласно лемме 5,

$$-\mu(\mathscr{A}_{\tau_l}, \mathscr{B}, \mathscr{A}_{\tau_{l+1}}) = 2 \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\mathscr{A}_{\tau_l}, \mathscr{A}_{\tau_{l+1}}) - m.$$

Все складывая, получаем

$$\operatorname{Ind} \mathscr{A}_\cdot = \sum_{l=0}^{N} \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\mathscr{A}_{\tau_l}, \mathscr{A}_{\tau_{l+1}}).$$

Неравенство (13) теперь является следствием «неравенства треугольника» для ind, которое важно и само по себе.

Лемма 6. Для любых $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \mathscr{B} \in L(\Sigma)$ справедливо неравенство

$$\dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) + \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_1, \Lambda_3) \leqslant \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_1, \Lambda_2) + \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_2, \Lambda_3) + \dim\left(\bigcap_{l=1}^{3} \Lambda_l\right).$$

Доказательство. В силу следствия леммы 5, достаточно рассмотреть случай $\bigcap_{l=1}^{3} \Lambda_l \subset \mathscr{B}$. Соединим простыми непрерывными неубывающими кривыми последовательно Λ_1 с Λ_2, Λ_2 с Λ_3 и Λ_3 с Λ_1. В результате получится непрерывная неубывающая замкнутая кривая. Согласно уже доказанной части предложения 2 индекс Маслова d этой кривой можно вычислить по формуле

$$d = \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_1, \Lambda_2) + \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_2, \Lambda_3) + \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_3, \Lambda_1) = \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_1, \Lambda_2) + \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_2, \Lambda_3) + m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) - \operatorname{ind}_{\mathscr{B}} (\Lambda_1, \Lambda_3).$$

Воспользуемся тем, что это равенство справедливо при любом $\mathscr{B}$. Подставляя вместо $\mathscr{B}$ лагранжеву плоскость Λ_1, получим

$$d = \operatorname{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_1, \Lambda_2) + \operatorname{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_2, \Lambda_3) + \operatorname{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_3, \Lambda_1) =$$
$$= \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)) + \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3)) +$$
$$+ \operatorname{ind}_{\Lambda_1}(\Lambda_2, \Lambda_3) \geqslant m - \dim\left(\bigcap_{i=1}^{3} \Lambda_i\right).$$

Сравнивая два выражения для d, приходим к неравенству

$$\operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\Lambda_1, \Lambda_2) + \operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\Lambda_2, \Lambda_3) - \operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\Lambda_1, \Lambda_3) \geqslant \dim(\Lambda_1 \cap \Lambda_3) -$$
$$- \dim\left(\bigcap_{i=1}^{3} \Lambda_i\right).$$

Лемма 7. Пусть $\mathscr{A}_\tau$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$ — простая неубывающая кривая в $L(\Sigma)$. Тогда $\mathscr{A}_{t_0} \cap \mathscr{A}_{t_1} = \bigcap_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1} \mathscr{A}_\tau$.

Доказательство. Из предложения 2 вытекает равенство

$$\operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}_{t_0}, \mathscr{A}_{t_1}) = \operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}_{t_0}, \mathscr{A}_\tau) + \operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}_\tau, \mathscr{A}_{t_1}),$$

$\forall \tau \in [t_0, t_1]$, $\mathscr{B} \in L(\Sigma)$. Поэтому, согласно лемме 6,

$$\dim(\Lambda_{t_0} \cap \Lambda_{t_1}) \leqslant \dim(\Lambda_{t_0} \cap \Lambda_\tau \cap \Lambda_{t_1}).$$

Последнее возможно лишь в случае $\Lambda_{t_0} \cap \Lambda_{t_1} \subset \Lambda_\tau$.

Следствие. Пусть $\mathscr{A}_\tau$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, — непрерывная неубывающая замкнутая кривая в $L(\Sigma)$. Тогда

$$\operatorname{Ind} \mathscr{A}_. \geqslant m - \dim\left(\bigcap_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1} \mathscr{A}_\tau\right).$$

Доказательство. Обозначим $\mathscr{B} = \mathscr{A}_{t_0} = \mathscr{A}_{t_1}$ и пусть $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N < \tau_{N+1} = t_1$ — такое разбиение отрезка $[t_0, t_1]$, что все кривые $\mathscr{A}|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые. Тогда

$$\operatorname{Ind} \mathscr{A}_. = m - \frac{1}{2}(\dim(\mathscr{B} \cap \mathscr{A}_{\tau_1}) + \dim(\mathscr{B} \cap \mathscr{A}_{\tau_N})) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{N-1} \operatorname{ind}_{\mathscr{B}}(\mathscr{A}_{\tau_i}, \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}) \geqslant m + \sum_{j=2}^{N-1} \dim(\mathscr{B} \cap \mathscr{A}_{\tau_j}) -$$
$$- \sum_{i=1}^{N-1} \dim(\mathscr{A}_{\tau_i} \cap \mathscr{B} \cap \mathscr{A}_{\tau_{i+1}}) \geqslant m - \dim\left(\mathscr{B} \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{A}_{\tau_i}\right).$$

Воспользовавшись леммой 7, получаем $\mathscr{B} \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{A}_{\tau_i} = \bigcap_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1} \mathscr{A}_\tau$.

Теорема 3. Пусть Λ_τ, $\tau \in [0, t]$, — якобиева кривая, $\tau_1, \ldots, \tau_N$ — все ее точки разрыва. Соединим в указанном ниже порядке простыми непрерывными неубывающими кривыми Π_0 с Λ_{+0}, Λ_{τ_i} с Λ_{τ_i+0}, $i = 1, \ldots, N$, Λ_t с Π_0. Якобиева кривая Λ_τ

вместе с добавленными таким способом кусками образует непрерывную неубывающую замкнутую кривую в $L(\Sigma)$, которую мы обозначим $\bar{\Lambda}$. Тогда

$$\operatorname{ind}\psi G_t'' = \operatorname{Ind}\bar{\Lambda}. - m.$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 1 и предложения 3.

5. Доказательство теоремы 1. Из неравенства треугольника (Лемма 6) следует, что достаточно доказать теорему в случае, когда все кривые $\Lambda|_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}$ простые. В то же время, из предложения 2 вытекает, что для неубывающей простой кривой $\Lambda|_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}$ и произвольного $\tau\in[\tau_i, \tau_{i+1}]$ справедливо равенство

$$\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_\tau) + \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_\tau, \Lambda_{\tau_{i+1}}) = \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}),$$

т. е. неравенство треугольника в этом случае превращается в равенство.

Таким образом, теорему 1 достаточно доказать для какого-нибудь одного произвольного достаточно мелкого разбиения отрезка $[0, t]$. В частности, мы будем считать, что среди точек $\tau_1, \ldots, \tau_l$ содержатся все точки нарушения гладкости кривой Λ_τ, $\tau\in[0, t]$; когда k_τ, постоянно на полуинтервалах $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, положим $k_\tau = k_i$ при $\tau\in[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, l-1$.

В дальнейшем мы будем использовать специальные пространства распределений с носителями на заданном отрезке вещественной прямой — соболевские пространства с отрицательными номерами. Напомним определение этих пространств.

Пусть $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$ и $k \geqslant 0$ — целое. В пространстве $C^r_\infty[t_0, t_1]$ введем скалярное произведение

$$(a, b)_{k,[t_0,t_1]} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{l=0}^{k} \left(a_\tau^{(l)}, b_\tau^{(l)}\right) d\tau, \quad \forall a_\tau,\ b_\tau \in C^r_\infty\ [t_0, t_1];$$

здесь $a_\tau^{(l)} = \frac{d^l}{d\tau^l} a_\tau$, $b_\tau^{(l)} = \frac{d^l}{d\tau^l} b_\tau$, $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^r$.

Пополнение пространства $C^r_\infty[t_0, t_1]$ в норме $\|a\|_{k,[t_0,t_1]} = \sqrt{(a, a)_{k,[t_0,t_1]}}$ является, очевидно, гильбертовым пространством. Оно называется соболевским пространством порядка k и обозначается $H^r_k[t_0, t_1]$. Легко видеть, что $H^r_k[t_0, t_1]$ состоит из таких $k-1$ раз непрерывно дифференцируемых функций a_τ, что $a_\tau^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и $a_\tau^{(k)} \in L_2^r[t_0, t_1]$.

Далее, пусть $u(\tau) \in L_2^r[t_0, t_1] = H_0^r[t_0, t_1]$. Отображение $a_\tau \mapsto \int_{t_0}^{t_1} (a_\tau, u(\tau))\, d\tau$, где $a_\tau \in H^r_k[t_0, t_1]$, определяет линейный непрерывный функционал на $H_k^r[t_0, t_1]$. Положим $\|u(\cdot)\|_{k,[t_0,t_1]}=$ $=\sup\limits_{\|a\|_{k,[t_0,t_1]}=1}\int\limits_{t_0}^{t_1}(a_\tau,\ u(\tau))\,d\tau$ — обычная операторная норма. Пополнение пространства $L_2^r[t_0, t_1]$ в норме $\|\cdot\|_{-k,[t_0,t_1]}$ называется соболевским пространством порядка $(-k)$ и обозначается $H_{-k}^r[t_0, t_1]$. Пространство $H_{-k}^r[t_0, t_1]$, очевидно, изоморфно сопряженному пространству к $H_k^r[t_0, t_1]$, следовательно, оно гильбертово. Кроме того, поскольку любой функционал на $C_\infty^r[t_0, t_1]$, непрерывный в норме $\|\cdot\|_{k,[t_0,t_1]}$, тем более непрерывен в стандартной топологии пространства $C_\infty^r[t_0, t_1]$, то $H_k^r[t_0, t_1]$ содержится в пространстве всех r-мерных векторных распределений с носителем в $[t_0, t_1]$. Распределения, лежащие в $H_{-k}^r[t_0, t_1]$, могут быть охарактеризованы следующим образом: пусть $\chi^i(\tau)=\begin{cases}0, & \tau\leqslant 0\\ \tau^i, & \tau>0,\end{cases}$ $i=0, 1, 2, \ldots,$ $\chi^0(\tau)=\chi(\tau)$ (функция Хевисайда), и знак «$*$» означает операцию свертки двух распределений: векторное распределение $\tilde{u}(\tau)=(u^1(\tau), \ldots$ $\ldots, u^r(\tau))^T$ с носителем в $[t_0, t_1]$ в том и только том случае лежит в $H_{-k}^r[t_0, t_1]$, когда распределение $\chi^{k-1}(\cdot)*u(\cdot)=$ $=(\chi^{k-1})(\cdot)*u^1(\cdot), \ldots, \chi^{k-1}(\cdot)*u^r(\cdot))^T$ является локально суммируемой вектор-функцией, причем

$$\chi^{k-1}(\cdot)*u(\cdot)\,|_{[t_0,t_1]}\in L_2^r[t_0, t_1]=H_0^r[t_0, t_1].$$

Заметим, что, каково бы ни было распределение v с носителем в $[t_0, t_1]$, результат его свертки с χ^{k-1} имеет носитель в $[t_0, +\infty)$, причем на полуограниченном интервале $[t_1, +\infty)$ совпадает с некоторым полиномом степени не выше $k-1$. Коэффициенты этого полинома вместе с ограничением $\chi^{k-1}*v$ на $[t_0, t_1]$ содержат полную информацию о распределении v. В случае, когда $v\in H_{-k}^r[t_0, t_1]$, это дает возможность определить норму, эквивалентную $\|\cdot\|_{-k,[t_0,t_1]}$ при помощи нормы пространства L_2^r. Поскольку для наших целей не имеет смысла различать эквивалентные нормы, мы сохраним для новой нормы обозначение $\|\cdot\|_{-k,[t_0,t_1]}$. Точное определение таково: для всякого $u\in H_{-k,[t_0,t_1]}^r$ положим

$$\|u\|_{-k,[t_0,t_1]}=\left(\int\limits_{t_0}^{t_1}|\chi^{k-1}*u(\tau)|^2\,d\tau+\sum_{i=0}^{k-1}|\langle u, \chi^i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

(угольные скобки $\langle u, \chi^i\rangle$ означают результат применения векторного распределения u к функции τ^i, если

$$u\in L_1^r[t_0, t_1],\ \text{то}\ \langle u, \chi^i\rangle=\int\limits_{t_0}^{t_1}\tau^i u(\tau)\,d\tau\in\mathrm{R}^r.$$

Вернемся к рассмотрению разбиения $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_l<<\tau_{l+1}=t$ отрезка $[0, t]$. Поскольку любая функция из $L^r_\infty[0, t]$, будучи сужена на отрезок $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, заведомо принадлежит пространству $H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]\supset H^r_0[\tau_i, \tau_{i+1}]\supset L^r_\infty[\tau_i, \tau_{i+1}]$, то на пространстве $L^r_\infty[0, t]$ определена норма

$$\|\cdot\|_{-k.,t}=\left(\sum_{i=0}^{l-1}\|\cdot\|^2_{-k_i,[\tau_i,\tau_{i+1}]}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 8. Билинейная форма $\psi G_t''$ непрерывна в норме $\|\cdot\|_{-k.,t}$.

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать, что для всякого i, удовлетворяющего условию $k_i>0$, квадратичная форма

$$v(\cdot)\mapsto\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\sigma\left(\int_{\tau_i}^{\tau}z_\theta v(\theta),\ z_\tau v(\tau)\right)d\tau$$

непрерывна в норме $\|\cdot\|_{-k_i,[\tau_i,\tau_{i+1}]}$. Но это непосредственно следует из равенства (6), выведенного при доказательстве предложения 1, и очевидного неравенства

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|w(\tau)|^2d\tau\leqslant\|v(\cdot)\|^2_{-k_i,[\tau_i,\tau_{i+1}]},$$

где $w(\tau)=\int_0^\tau\frac{(\tau-\theta)^{k_i-1}}{(k_i-1)!}d\theta$ — k_i-кратный неопределенный интеграл от $v(\cdot)$.

Пополнением пространства $L^r_\infty[0, t]$ в норме $\|\cdot\|_{-k.,t}$ является гильбертово пространство $\bigoplus_{i=0}^{l}H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Введем обозначение $H^r_{-k.}[0, t]=\bigoplus_{i=0}^{l}H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]$; элемент

$$\left(\begin{pmatrix}u_0^1\\ \vdots\\ u_0^r\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}u_{l-1}^1\\ \vdots\\ u_{l-1}^r\end{pmatrix}\right)=(u_0,\ldots,u_{l-1})\in H^r_{-k.}[0, t]$$

будем обозначать единым символом u; заметим, что $u=(u_0,\ldots,u_{l-1})$ не является, вообще говоря, распределением на отрезке $[0, t]$, поскольку в точках τ_j, $j=1,\ldots,l$, этот элемент принимает «два значения»: например, если $u_{l-1}=\delta_{\tau_l}\in H_{-1}[\tau_{l-1}, \tau_l]$, а $u_l=\delta'_{\tau_l}\in H_{-2}[\tau_l, \tau_{l+1}]$. Пространство $H^r_{-k.}[0, t]$ является двойственным к пространству $H^r_{k.}[0, t]\overset{\text{def}}{=}\bigoplus_{i=0}^{l-1}H^r_{k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]$.

В свою очередь, любая кусочно гладкая функция на $[0, t]$, гладкая на каждом интервале (τ_i, τ_{i+1}), $i=0, 1, \ldots, l$, очевидным образом отождествляется с элементом пространства $H_{k.}[0, t]$, элементы пространства $H^r_{-k_0}[0, t]$ действуют на такие функции, как обычные векторные распределения — на гладкие: $\langle u, a \rangle = \sum_{i=0}^{l} \langle u_i, a|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]} \rangle$ (именно «раздвоенность» $u \in H^r_{-k_i}[0, t]$ в точках τ_i позволяет u действовать на функции, имеющие разрывы в этих точках, но гладкие и слева, и справа). Элементы $H^r_{-k.}[0, t]$ можно также умножать на кусочно гладкие функции, гладкие на интервалах (τ_i, τ_{i+1}), и на матрицы, элементы которых являются такими функциями. В частности, для $v \in H^r_{-k.}[0, t]$ определены $z.v$ и $\bar{\mu}_0 z.v$, которые при фиксировании базисов в пространствах Σ и Π становятся элементами из $H^{2m}_{-k.}[0, t]$ и $H^m_{-k.}[0, t]$ соответственно.

Пополнением области определения формы $\psi G''_t$ в норме $\|\cdot\|_{-k.t}$ является подпространство

$$\{v \in H^r_{-k.}[0, t] \mid \langle \bar{\mu}_0 z.v, 1 \rangle = 0\} \overset{\text{def}}{=} \{\bar{\mu}_0 z.\}^{\perp}_{-k.}$$

— гильбертово подпространство коразмерности m в $H^r_{-k.}[0, t]$.

Билинейная форма $\psi G''_t$ однозначно продолжается по непрерывности до формы Q, заданной на пространстве $\{\bar{\mu}_0 z\}^{\perp}_{-k.}$. При этом $\operatorname{ind} Q = \operatorname{ind} \psi G''_t$.

Чтобы записать форму Q в явном виде, надо придать точный смысл выражению $\chi*(z.v)$, где $v \in H^r_{-k.}[0, t]$, а χ, как и раньше, функция Хевисайда (двусмысленность может возникнуть опять-таки из-за «раздвоения» v в точках τ_i). Пусть $u=(u_0, \ldots, u_{l-1})$, $u_i \in H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]$, распределение $\chi*u_i$ имеет носитель в $[\tau_i, +\infty)$, причем на интервале $(\tau_{i+1}, +\infty)$ оно совпадает с вектором $\langle u_i, 1 \rangle \in \mathbf{R}^r$. В свою очередь, распределение $((\chi*u_i)(\tau) - \langle u_i, 1 \rangle \chi(\tau-\tau_{i+1})) \in H_{1-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset H_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Положим $\chi*u=(w_0, \ldots, w_{l-1})$, где

$$w_i(\tau) = \left(\sum_{j=0}^{i-1} \langle u_j, 1 \rangle\right)(\chi(\tau-\tau_i) - \chi(\tau-\tau_{i+1})) + (\chi*u_i)(\tau) - \langle u_i, 1 \rangle \chi(\tau-\tau_{i+1}).$$

Пусть $\bar{h}_\tau$ — симметричная $r \times r$-матрица, отвечающая квадратичной форме ψh_τ, т. е. $\psi h_\tau(v_1, v_2) = (\bar{h}_\tau v_1; v_2)$.

Лемма 9. Каково бы ни было $v \in \{\bar{\mu}_0 z.\}^{\perp}_{-k.}$, векторное распределение $\sigma(\chi*(z.v), z.\cdot)^T + \bar{h}.v$ лежит в пространстве $H^r_{k.}[0, t] \subset$

$\subset H^r_{-k.}[0, t]$, при этом

$$Q(v, v) = \langle v^T, \sigma(\chi_*(zv), z\cdot)^T + \bar{h}v \rangle .$$

Доказательство. Достаточно доказать существование такой константы c, что

$$\left\| \sigma\left(\int_0^\tau z_\theta v(\theta)\,d\theta,\ z_\tau\cdot \right)^T + \bar{h}_\tau v(\tau) \right\|_{k.,t} \leqslant c\,\|v\|_{-k.,t},\quad \forall v \in C^r_\infty[0, t],$$

из этого неравенства утверждения леммы выводятся по непрерывности. Для доказательства последнего неравенства достаточно, в свою очередь, установить неравенства

$$\left\| \sigma\left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta v(\theta)\,d\theta,\ z_\tau\cdot \right) \right\|_{k_i,[\tau_i,\tau_{i+1}]} \leqslant c_i\,\|v\|_{-k_i,[\tau_i,\tau_{i+1}]}\quad \forall v \in C^r_\infty[\tau_i\,\tau_{i+1}],$$

$$i = 0, 1, \ldots, l-1$$

при некоторых константах c_i.

Пусть $0 \leqslant n \leqslant k_i$, тогда, учитывая лемму 1, получаем

$$\frac{d^n}{d\tau^n}\,\sigma\left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta v(\theta)\,d\theta,\ z_\tau\cdot \right) = \sigma\left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta v(\theta)\,d\theta,\ z_\tau^{(n)}\cdot \right) =$$

$$= (-1)^{k_i-1}\sigma\left(z_\tau^{(k_i-1)}w(\tau),\ z_\tau^{(n)}\cdot\right) + (-1)^{k_i}\sigma\left(\int_{\tau_i}^\tau z_\theta^{(k_i)} w(\theta)\,d\theta,\ z_\tau^{(n)}\cdot \right),$$

где

$$w(\tau) = \int_{\tau_i}^\tau \frac{(\tau-\theta)^{k_i-1}}{(k_i-1)!}\,v(\theta)\,d\theta.$$

Требуемое неравенство теперь вытекает непосредственно из определения норм $\|\cdot\|_{k_i,[\tau_i,\tau_{i+1}]}$ и $\|\cdot\|_{-k_i,[\tau_i,\tau_{i+1}]}$.

Лемма 10. Квадратичная форма Q положительно определена на подпространстве конечной размерности в $\{\bar{\mu}_0 z\}^\perp_{-k.}$.

Доказательство. Для $i = 0, 1, \ldots, l-1$ имеем

$$H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset H^r_{-k.}[0, t] = \bigoplus_{i=0}^{l-1} H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}];$$

при этом

$$H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}] \cap \{\bar{\mu}_0 z\}^\perp_{-k.} =$$

$$= \{v \in H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}] \mid \langle \bar{\mu}_0 z v, 1 \rangle = 0\} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\bar{\mu}_0 z\}^\perp_{-k_i}.$$

Подпространство $\overset{l-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \{\overline{\mu}_0 z\}^{\perp}_{-k_i}$ имеет, очевидно, конечную коразмерность в $\{\overline{\mu}_0 z\}^{\perp}_{-k}$. Квадратичная форма Q, будучи сужена на подпространство $\overset{l-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \{\overline{\mu}_0 z\}^{\perp}_{-k_i}$, распадается в прямую сумму форм:

$$Q(v, v) = \sum_{i=0}^{l-1} \langle v_i^T, \sigma(\chi*(zv_i), z\cdot)^T + \bar{h}v_i \rangle,$$

если

$$v = (v_0, \ldots, v_{l-1}), \; v_i \in \{\overline{\mu}_0 z\cdot\}^{\perp}_{-k_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, l-1.$$

Поэтому для доказательства леммы 10 достаточно установить положительную определенность каждой из форм

$$Q^i(v, v) \overset{\text{def}}{=} \langle v_i^T, \sigma(\chi*(zv_i), z\cdot)^T + \bar{h}v_i \rangle$$

на подпространстве конечной коразмерности в $\{\overline{\mu}_0 z\}^{\perp}_{-k_i}$, $i = 0, 1, \ldots, l-1$. Обозначим $w_i = \frac{\chi^{k_i-1}}{(k_i-1)!} * v_i$. Если $\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} z_\tau^{(k_i)} w_i(\tau) d\tau = 0$, то

$$Q^i(v_i, v_i) = \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \gamma_\tau(w_i(\tau)) d\tau +$$

$$+ \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \sigma\left(\int_{\tau_i}^{\tau} z_\theta^{(k_i)} w_i(\theta) d\theta, z_\tau^{(k_i)} w_i(\tau)\right) d\tau. \tag{14}$$

В самом деле, в случае, когда $v_i \in L^r_\infty[\tau_i, \tau_{i+1}]$, равенство (14) вытекает из (6), а общий случай получается по непрерывности. В свою очередь, поскольку $\gamma_\tau(w) \geqslant \varepsilon |w|^2$, квадратичная форма, стоящая в правой части равенства (14), положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $H^r_{-k_i}[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Это следствие теоремы Гильберта—Шмидта о спектре компактного самосопряженного оператора. Отсюда следует, что форма Q положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $H^r_{-k_*}[0, t]$.

Замечание. Очень существенно, что форма Q, в отличие от $\psi G_t''$, не просто положительна на подпространстве конечной коразмерности, а положительно определена.

Лемма 11. Пусть p — непрерывная квадратичная форма на гильбертовом пространстве E, положительно определенная на некотором подпространстве конечной коразмерности в E. Для произвольного замкнутого подпространства V в E символ $p|V$ обозначает сужение квадратичной формы p на подпространство V, и

$$V_p^{\perp}=\{e\in E\,|\,p(e,v)=0,\quad \forall v\in V\}.$$

Тогда

$$\operatorname{ind} p=\operatorname{ind}(p\,|\,V)+\operatorname{ind}(p\,|\,V_p^{\perp})+\dim(V\cap V_p^{\perp})-\\-\dim(V\cap\ker p). \qquad (15)$$

Доказательство. Переходя, если надо к пространству $E/\ker p$ можем считать, что $\ker p=0$. Если вдобавок пространство E конечномерно, то утверждение леммы превращается в стандартный факт линейной алгебры. Доказательство общего случая дословно повторяет конечномерное, поскольку условия леммы обеспечивают конечность всех входящих в равенство (15) величин, а также (при $\ker p=0$) выполнение тождества $\dim W_p^{\perp}=\operatorname{codim} W$ для любого замкнутого подпространства W конечной коразмерности.

Пусть $V_l=\{v=(v_0,\ldots,v_{l-1})\in(\bar{\mu}_0 z)^{\perp}_{-k}\,|\,v_j=0$ при $i\leqslant j\leqslant l-1\}$. В частности, $V_0=0$, $V_l=\{\bar{\mu}_0 z\}^{\perp}_{-k}$. Введем обозначение $Q_l=Q\,|\,V_l$. Тогда, в силу леммы 1,

$$\operatorname{ind} Q_{l+1}=\operatorname{ind} Q_l+\operatorname{ind}(Q_{l+1}\,|\,V^{\perp}_{lQ_{l+1}})+\dim(V_l\cap V^{\perp}_{lQ_{l+1}})-\\-\dim(V_l\cap\ker Q_{l+1}). \qquad (16)$$

Лемма 12. Пусть

$$\mathcal{R}_l=\{(\lambda,v_l)\in\Lambda_{\tau_l}\oplus H_{-k_l}[\tau_l,\tau_{l+1}]\,|\,\lambda+\langle zv_l,1\rangle\in\Pi_0\}\subset\Lambda_{\tau_l}\oplus\\ \oplus H^r_{-k_l}[\tau_l,\tau_{l+1}]$$

и

$$R_l:(\lambda,v_l)\mapsto\langle v_l^T,\sigma(\lambda+\chi*(zv_l),z\cdot)^T+\bar{h}v_l\rangle,\quad (\lambda,v_l)\in\mathcal{R}_l$$

— квадратичная форма на $\mathcal{R}_l$. Тогда

$$1)\ \operatorname{ind}(Q_{l+1}\,|\,V^{\perp}_{lQ_{l+1}})=\operatorname{ind} R_l$$

$$2)\ \dim(V_l\cap V^{\perp}_{lQ_{l+1}})-\dim(V_l\cap\ker Q_{l+1})=\\=\dim(\Pi_0\cap\Lambda_{\tau_l}/\Pi_0\cap\Lambda_{\tau_l}\cap\Lambda_{\tau_{l+1}})-\dim\Big(\bigcap_{0<\tau<\tau_l}\Lambda_\tau/\bigcap_{0<\tau<\tau_{l+1}}\Lambda_\tau\Big).$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$V^{\perp}_{lQ_{l+1}}=\{v\in V_{l+1}\,|\,\bar{h}_\tau v(\tau)+\sigma((\chi*zv)(\tau)+\eta,z_\tau\cdot)^T=0\}$$

при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_l$ для некоторого $\eta\in\Pi_0$.

Представим $v\in V^{\perp}_{lQ_{l+1}}$ в виде $v=(u,v_l)$, где

$$u\in\bigoplus_{j=0}^{l-1}H^r_{-k_j}[\tau_j,\tau_{j+1}],\quad v_l\in H^r_{-k_l}[\tau_l,\tau_{l+1}],$$

и положим $\hat{y}=\eta+\chi*(zu)$. Пусть $\tau\in(0, \tau_l)\setminus\{\tau_1, \ldots, \tau_{l-1}\}$; дифференцируя соотношение

$$\overline{h}_\tau v(\tau)+\sigma(\hat{y}(\tau), z_\tau\cdot)^T=0$$

$2k_\tau$ раз по τ с учетом леммы 1, получим

$$\overline{\gamma}_\tau u(\tau)+(-1)^{k_\tau}\sigma\left(\hat{y}_\tau, z_\tau^{(2k_\tau)}\cdot\right)^T=0,$$

где $\overline{\gamma}_\tau$ — симметричная $r\times r$-матрица, отвечающая квадратичной форме γ_τ. Следовательно,

$$\frac{d}{d\tau}\hat{y}=(-1)^{k_\tau-1}z_\tau^{(2k_\tau)}\overline{\gamma}_\tau^{-1}\left(\sigma\left(\hat{y}_\tau, z_\tau^{(2k_\tau)}\cdot{}^T\right)\right).$$

Поэтому распределение $\hat{y}$ (а, стало быть, и u) является гладкой функцией вблизи τ, причем ее производные равномерно ограничены по τ. Таким образом, если $u=(u_0, u_1, \ldots, u_{l-1})$, то каждое из u_j представляется в виде суммы гладкой функции на $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ и распределения порядка k_j-1, сосредоточенного в точках τ_j и τ_{j+1} (напомним, что a'priori $u_j\in H^r_{-k_j}[\tau_j, \tau_{j+1}]$).

Следовательно, $\hat{y}$ также представляется в виде суммы некоторой кусочно гладкой функции y_τ и распределений, сосредоточенных в точках τ_j, $j=0, \ldots, l$. Ясно, что $(y_{\tau_j+0}-y_{\tau_j})\in\Gamma_{\tau_j}+$ $+\Gamma_{\tau_j+0}$, причем любой вектор из $\Gamma_{\tau_j}+\Gamma_{\tau_j+0}$ может быть представлен в виде $y_{\tau_j+0}-y_{\tau_j}$ за счет подходящего выбора «точечной части» распределений u_{j-1} и u_j. Кроме того, $y_0=\eta\in\Gamma_0$, $y_\tau=$ $=\langle zu, 1\rangle+\eta$ при $\tau\geqslant\tau_l$.

Для $v=(u, v_l)\in V^\perp_{lQ_{l+1}}$ имеем

$$Q_{l+1}(v, v)=\langle v^T(\tau), \sigma(y_\tau-\eta, z_\tau\cdot)^T+\overline{h}_\tau v\rangle=$$
$$=\langle v^T(\tau), \sigma(y_\tau, z_\tau\cdot)^T+\overline{h}_\tau v\rangle-\sigma(\eta, \langle zv, 1\rangle)=$$
$$=\langle v_l^T, \sigma(y_{\tau_l}+\chi*zv_l, z\cdot)^T+\overline{h}v_l\rangle-0$$

(В этой выкладке мы воспользовались условием $\langle zv, 1\rangle\in\Pi_0\forall v\in$ $\in V_{l+1}$, а также тождеством $\sigma(y_\tau, z_\tau\cdot)^T+\overline{h}_r u(\tau)=0$ при $0\leqslant\tau\leqslant\tau_l$).

Утверждение 1) леммы 12 вытекает теперь из следующего представления якобиевой кривой.

Лемма 13. Пусть

$$\Delta_\tau=\left\{y_\tau\in\Sigma\left|\begin{array}{l}0\mapsto y_\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant\tau)\text{ — кусочно-гладкая кривая,}\\ \dot{y}_\theta=z_\theta u_\theta\quad\text{при}\quad\theta\neq\tau_j;\quad\sigma(y_\theta, z_\theta)^T+\overline{h}_\theta u_\theta\equiv0,\quad y_0\in\Pi_0,\\ (y_{\tau_j+0}-y_{\tau_j})\in\Gamma_{\tau_j}+\Gamma_{\tau_j+0}.\end{array}\right.\right\}.$$

Тогда $\Lambda_\tau=\Delta_\tau\oplus\Gamma_\tau$

Доказательство. Дифференцируя соотношение $\sigma(y_\theta,$

$z_\theta \cdot)^T + h_\theta u_\theta \equiv 0$ $2k_\theta$ раз по θ в силу уравнения $\dot{y}_\theta = z_\theta u_\theta$ получаем

$$\sigma(y_\theta, z_\theta^{(i)}) \equiv 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 2k_\theta - 1, \quad u_\theta = (-1)^{k_\theta - 1} \gamma_\theta^{-1} \sigma(y_\theta, z_\theta)^T.$$

Отсюда заключаем, что $\Delta_\tau \subset (\Gamma_\tau + \overline{\Gamma}_\tau)^{\prec} = \Gamma_\tau^{\angle} \cap \overline{\Gamma}_\tau^{\prec}$ *).

Кроме того, $\dim \Delta_\tau$ локально постоянно при $\tau \neq \tau_j$.

Пусть теперь $x_\theta \in \Lambda_\theta$, причем x_θ удовлетворяет уравнению Якоби при $0 \leqslant \theta \leqslant \tau$, тогда

$$\frac{d}{d\theta} \sigma(x_\theta, y_\theta) \equiv \sigma\left(\overline{\gamma}_\theta^{-1} z_\theta^{(k_\theta)} \sigma\left(z_\theta^{(k_\theta)}, x\right)^T, y_\theta\right) + \sigma(x_\theta, z_\theta u_\theta) \equiv 0,$$

$$\sigma(x_{\tau_j}, y_{\tau_j}) = 0, \quad \tau_j < \tau.$$

Следовательно, $\Delta_\tau \subset \Lambda_\tau^{\prec} = \Lambda_\tau$. Таким образом, $\Delta_\tau \subset \Lambda_\tau \cap \overline{\Gamma}^{\angle}$.

Далее,

$$\Delta_{+0} = (\Pi_0 + \Gamma_{+0}) \cap \Gamma_{+0}^{\angle} \cap \overline{\Gamma}_{+0}^{\angle} = \Lambda_{+0} \cap \overline{\Gamma}^{\angle}.$$

Из соображений размерности получаем, что $\Delta_\tau = \Lambda_\tau \cap \overline{\Gamma}_\tau^{\angle}$ при $0 < \tau \leqslant \tau_1$. Поскольку $\overline{\Gamma}_\tau^{\angle} \cap \Gamma_\tau = 0$ и $\Gamma_\tau \subset \Lambda_\tau$, то $\Lambda_\tau = \Delta_\tau \oplus \Gamma_\tau$ при $0 < \tau \leqslant \tau_1$. Следовательно,

$$\Delta_{\tau_1+0} = (\Delta_{\tau_1} + \Gamma_{\tau_1} + \Gamma_{\tau_1+0}) \cap \Gamma_{\tau_1+0}^{\angle} \cap \overline{\Gamma}_{\tau_1+0}^{\angle} = \Lambda_{\tau_1}^{\Gamma_{\tau_1+0}} \cap \overline{\Gamma}_{\tau_1+0}^{\angle} =$$
$$= \Lambda_{\tau_1+0} \cap \overline{\Gamma}_{\tau_1+0}^{\angle},$$

$\Lambda_{\tau_1+0} = \Delta_{\tau_1+0} \oplus \Gamma_{\tau_1+0}$ и т. д. для любого τ получаем равенство $\Lambda_\tau = \Delta_\tau \oplus \Gamma_\tau$.

Перейдем к доказательству утверждения 2) леммы 12.

Элемент $(u, v_l) \in V_{lQ_{l+1}}^{\perp}$ в том и только том случае лежит в $V_l \cap \cap V_{lQ_{l+1}}^{\perp} = \ker Q_l$, когда $v_l = 0$; элемент $(u, 0) \in V_{lQ_{l+1}}^{\perp}$ тогда и только тогда лежит в V_l, когда $\eta + \langle zu, 1 \rangle \in \Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_l}$ для некоторого $\eta \in \Pi_0$. Следовательно,

$$\dim\left(V_l \cap V_{lQ_{l+1}}^{\perp}\right) = \dim\left(\Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_l} \Big/ \bigcap_{0 < \tau < \tau_l} \Lambda_\tau\right).$$

Элемент $(u, 0) \in \ker Q_l$ в том и только том случае лежит в $V_l \cap \cap \ker Q_{l+1}$, когда $\eta + \langle zu, 1 \rangle \in \Pi_0 \bigcap\limits_{\tau_l < \tau < \tau_{l+1}} \Lambda_\tau$ для некоторого $\eta \in \Pi_0$.

Поэтому

$$\dim(V_l \cap \ker Q_{l+1}) = \dim\left(\Pi_0 \bigcap_{\tau_l < \tau < \tau_{l+1}} \Lambda_\tau \Big/ \bigcap_{0 < \tau < \tau_{l+1}} \Lambda_\tau\right).$$

Напомним, что $\Lambda|_{[\tau_l, \tau_{l+1}]}$ — простая неубывающая кривая и, согласно лемме 7, $\bigcap\limits_{\tau_l < \tau < \tau_{l+1}} \Lambda_\tau = \Lambda_{\tau_l} \cap \Lambda_{\tau_{l+1}}$.

Лемма 12 окончательно доказана.

---

*) Определение и свойства пространств $\overline{\Gamma}_\tau$ см. в начале п. 3.

Итак, применение леммы 11 позволило нам все свести к вычислению индекса формы R_l, это вычисление мы проделаем также, многократно применяя лемму 11. Сначала преодолеем возможный разрыв в точке τ_l.

Пространство $H^r_{-k_l}[\tau_l, \tau_{l+1}]$ содержит rk_l-мерное пространство $H^r_{-k_l}(\tau_l+0)$, состоящее из векторных распределений, сосредоточенных в точке τ_l. Положим

$$I=\mathcal{R}\cap\{\Lambda_{\tau_l}\oplus H^r_{-k_l}(\tau_l+0)\}=$$
$$=\left\{\left(\lambda, \left.\sum_{j=0}^{k_l-1} a_j \frac{\partial^j}{\partial\tau^j}\right|_{\tau_l+0}\right)\middle|\lambda\in\Lambda_{\tau_l}, \left(\lambda+\sum_{j=0}^{k_{l-1}} z^{(j)}_{\tau_j+0}a_j\right)\in\Pi_0\right\}.$$

Элементарное вычисление показывает, что

$$R_l\left(\left(\lambda, \left.\sum_{j=0}^{k_l-1} a_j \frac{\partial^j}{\partial\tau^j}\right|_{\tau_l+0}\right)\right)=\sigma\left(\lambda, \sum_{j=0}^{k_l-1} z^{(j)}_{\tau_l+0}a_j\right), \tag{17}$$

а индекс формы $R_l\,|\,I^{\perp}_{R_l}$ совпадает с индексом формы

$$R_l^+:(\lambda, v)\mapsto \langle v^{\mathsf{T}}, \sigma(\lambda+\chi_*(zv)+\bar{h}v, z\cdot)^{\mathsf{T}}\rangle,$$

заданной на пространстве

$$\mathcal{R}_l^+=\{(\lambda, v)\in\Lambda_{\tau_l+0}\oplus H_{-k_l}[\tau_l, \tau_{l+1}]\,|\,(\lambda+\langle zv, 1\rangle)\in\Pi_0\}$$

(выражения для форм R_l и R_l^+ совпадают, а области определения несколько отличаются; напомним, что $\Lambda_{\tau_l+0}=(\Lambda_{\tau_l}+\Gamma_{\tau_l+0})\cap\cap\Gamma^{\angle}_{\tau_l+0})$. Следующее равенство — прямое следствие определений и соотношения (17):

$$\operatorname{ind}(R_l\,|\,I)=\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_l}, \Lambda_{\tau_l+0})-\frac{1}{2}(\dim(\Lambda_{\tau_l}\cap\Pi_0)+$$
$$+\dim(\Lambda_{\tau_l+0}\cap\Pi_0))+\dim(\Lambda_{\tau_l}\cap\Lambda_{\tau_l+0}\cap\Pi_0).$$

Далее, элемент $\left(\lambda, \left.\sum_j a_j\frac{\partial^j}{\partial\tau^j}\right|_{\tau_l+0}\right)$ из I в том и только том случае лежит в $\ker(R_l\,|\,I)$, когда $\left(\nu+\lambda+\sum_j z^{(j)}_{\tau_l+0}\right)\in\Lambda_{\tau_l+0}\cap\Pi_0$ для некоторого $\nu\in\Lambda_{\tau_l}\cap\Pi_0$. Этот элемент лежит в $I\cap\ker R_l$ если и только если

$$\left(\nu+\lambda+\sum_j z^{(j)}_{\tau_l}a_j\right)\in\Pi_0\bigcap_{\tau_l<\tau<\tau_{l+1}}\Lambda_\tau=\Pi_0\cap\Lambda_{\tau_l+0}\cap\Lambda_{\tau_{l+1}}.$$

Следовательно,

$\operatorname{ind}R_l=\operatorname{ind}(R_l\,|\,I)+\operatorname{ind}R_l^++\dim\ker(R_l\,|\,I)-\dim(\ker R_l\cap I)=$

$$= \operatorname{ind} R_l^+ + \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_l}, \Lambda_{\tau_l+0}) + \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_l}\cap\Pi_0) - \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_l}\cap\Pi_0) - $$
$$- \dim(\Lambda_{\tau_l}\cap\Lambda_{\tau_{l+1}}\cap\Pi_0) + \dim(\Lambda_{\tau_l}\cap\Lambda_{\tau_{l+1}}\cap\Pi_0).$$

С учетом равенства (16) и леммы 12 получаем

$$\operatorname{ind} Q_{l+1} = \operatorname{ind} Q_l + \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_l}, \Lambda_{\tau_l+0}) + \operatorname{ind} R_l^+ +$$
$$+ \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_l}\cap\Pi_0) + \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_l+0}\cap\Pi_0) -$$
$$- \dim(\Lambda_{\tau_l+0}\cap\Lambda_{\tau_{l+1}}\cap\Pi_0) - \dim\left(\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant\tau_l}\Lambda_\tau \Big/ \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant\tau_{l+1}}\Lambda_\tau\right). \qquad (18)$$

Осталось вычислить $\operatorname{ind} R_l^+$. Как видно из предыдущих рассмотрений, использование нашего основного орудия — леммы 11 сопряжено с довольно громоздкими вычислениями. Чтобы упростить эти вычисления хотя бы внешне, в дальнейшем будем предполагать, что $k_l > 0$, и следовательно, $h_\tau = 0$ при $\tau_l < \tau \leqslant \tau_{l+1}$. В действительности, случай $k_l = 0$ самый простой, но некоторые выражения являются более симметричными при $k_l > 0$.

Рассмотрим подпространство

$$W_l = \{(\lambda, v) \in \mathcal{R}_l^+ \mid \lambda + \langle zv, 1\rangle = 0\} \subset \mathcal{R}_l^+.$$

Лемма 14. Если разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = t$ достаточно мелкое, то формы $R_l^+ | W_l$ неотрицательны, т. е.

$$\operatorname{ind}(R_l | W_l) = 0, \quad i = 0, \ldots, l-1.$$

Доказательство. Подпространство $\hat{W}_l = \{(\lambda, v) \in W_l \mid v \in L_2^r[\tau_l, \tau_{l+1}]\}$ всюду плотно в W_l, поэтому достаточно доказать неотрицательность формы R_l^+ на $\hat{W}_l$. Положим $w(\tau) = \int_{\tau_l}^{\tau} \frac{(\theta-\tau)^{k_l-1}}{(k_l-1)!} v(\theta)\, d\theta$, обычная процедура интегрирования по частям приводит к включению

$$\left(\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} z_\tau v(\tau)\, d\tau + \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} z_\tau^{(k_l)} w(\tau)\, d\tau\right) \in \Gamma_{\tau_{l+1}}.$$

Поэтому для $(\lambda, v) \in \hat{W}_l$ имеем $\left(\lambda - \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} z_\theta^{(k_l)} w(\theta)\, d\theta\right) \in \Gamma_{\tau_{l+1}}$ и

$$R_l^+((\lambda, v)) = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \sigma\left(\lambda + \int_{\tau_l}^{\tau} z_\theta v(\theta)\, d\theta,\ z_\tau v(\tau)\right) d\tau =$$
$$= \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \sigma\left(\lambda - \int_{\tau_l}^{\tau} z_\theta^{(k_l)} w(\theta)\, d\theta,\ z_\tau v(\tau)\right) d\tau.$$

Многократно интегрируя последнее выражение по частям ($v(\tau)$ интегрируется, а все остальное дифференцируется), получим

$$R_l^+((\lambda, v)) = \int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \sigma\left(\int_{\tau_l}^{\tau} z_\theta^{(k_l)} w(\theta)\, d\theta - \lambda,\ z_\tau^{(k_l)} w(\tau)\right) + \gamma_\tau(w(\tau))\, d\tau.$$

Достаточно установить неотрицательность квадратичной формы от (λ, w), стоящей в правой части последнего равенства, на пространстве

$$\mathscr{L} = \left\{(\lambda, w) \in \Lambda_{\tau_l+0} \oplus L_2^r[\tau_l, \tau_{l+1}] \,\middle|\, \left(\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} z_\tau^{(k_l)} w(\tau)\, d\tau - \lambda\right) \in \Gamma_{\tau_{l+1}}\right\},$$

если $\tau_{l+1} - \tau_l$ достаточно мало.

Положим $x_\tau = \int_{\tau_l}^{\tau} z_\theta^{(k_l)} w(\theta)\, d\theta - \lambda$, $\tau_l < \tau \leqslant \tau_{l+1}$, и пусть

$$\mathscr{L}_0 = \{(\lambda, w) \in \mathscr{L} \mid x_{\tau_{l+1}} = 0\},$$

$$\mathscr{L}_1 = \left\{(\lambda, w) \in \mathscr{L} \mid \sigma\left(x_\tau, z_\tau^{(k_l)} \cdot\right)^{\mathrm{T}} + \bar{\gamma}_\tau w(\tau) \equiv 0,\ \tau_l < \tau \leqslant \tau_{l+1}\right\}$$

Пара (λ, w), очевидно, в том и только том случае лежит в $\mathscr{L}_1$, когда кривая x_τ является решением системы Якоби (10) с краевыми условиями $x_{\tau_{l+0}} \in \Lambda_{\tau_{l+0}}$, $x_{\tau_{l+1}} \in \Gamma_{\tau_{l+1}}$. Так как $\Gamma_{\tau_{l+1}} \subset \Lambda_{\tau_{l+1}}$, то, по определению якобиевой кривой Λ_τ, любое решение системы Якоби x_τ, удовлетворяющее условию $x_{\tau_{l+1}} \in \Gamma_{\tau_{l+1}}$, удовлетворяет также и условию $x_{\tau_{l+0}} \in \Lambda_{\tau_{l+0}}$. Следовательно,

$$\dim \mathscr{L}_1 = \dim \Gamma_{\tau_{l+1}}, \quad \mathscr{L} = \mathscr{L}_0 \oplus \mathscr{L}_1.$$

Кроме того, пространство $\mathscr{L}_1$ содержится, очевидно, в ядре нашей квадратичной формы, а при $(\lambda, w) \in \mathscr{L}_0$ эта форма имеет вид

$$\int_{\tau_l}^{\tau_{l+1}} \left(\int_{\tau_l}^{\tau} z^{(k_l)} w(\theta)\, d\theta,\ z_\tau^{(k_l)} w(\tau)\right) d\tau + \gamma_\tau(w(\tau))\, d\tau. \qquad (19)$$

Поскольку $\gamma_\tau(w(\tau)) \geqslant \varepsilon |w(\tau)|^2$, то форма (19) положительна при $\tau_{i+1} - \tau_i$ достаточно малом. ■

Мы вправе с самого начала выбрать сколь угодно мелкое разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_l = t$, поэтому, согласно лемме 14,

$$\operatorname{ind} R_l^+ = \operatorname{ind}\left(R_l^+ \mid W_{R_l}^\perp\right) + \dim\left(W \cap W_{R_l^+}^\perp\right) - \dim\left(W \cap \ker R_l^+\right).$$

Пара (λ, v) из R_l^+ в том и только том случае лежит в $W^{\perp}_{R_l^+}$, когда

$$\sigma(\lambda + (\chi^*(zv))(\tau), z_\tau \cdot) \equiv \sigma(\lambda_0, z_\tau \cdot), \quad \tau_l < \tau \leqslant \tau_{l+1},$$

для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda_{\tau_l+0}$.

Положим $\hat{y} = \lambda - \lambda_0 + \chi^*(zv)$. Те же аргументы, что и при доказательстве леммы 12, показывают, что распределение $\hat{y}$ представляется в виде суммы вектор-функции y_τ, гладкой на $(\tau_l, \tau_{l+1}]$, и распределения порядка $k_l - 1$, сосредоточенного в точках τ_l, τ_{l+1}. Из леммы 13 вытекает, что $y_{\tau_{l+1}} \in \Lambda_{\tau_{l+1}}$. При этом

$$R_l^+((\lambda, w)) = \langle v^{\mathrm{T}}, \sigma(\lambda + \chi^*(zv), z\cdot)^{\mathrm{T}} \rangle = \langle v^{\mathrm{T}}, \sigma(\lambda_0, z\cdot)^{\mathrm{T}} \rangle =$$
$$= \sigma(\lambda_0, \langle zv, 1 \rangle) = \sigma(\lambda_0, y_{\tau_{l+1}}).$$

Напомним, что $\lambda_0 + y_{l+1} = (\lambda + \langle zv, 1 \rangle) \in \Pi_0$.

Из приведенных соотношений следует, что индекс квадратичной формы $R_l^+ | W^{\perp}_{R_l^+}$ совпадает с индексом заданной на $(\Lambda_{\tau_l+0} + \Lambda_{\tau_{l+1}}) \cap \Pi_0$ квадратичной формы, которая сопоставляет каждому

$$\alpha = (\lambda_1 + \lambda_2) \in (\Lambda_{\tau_l+0} + \Lambda_{\tau_{l+1}}) \cap \Pi_0 \text{ (где } \lambda_1 \in \Lambda_{\tau_l+0}, \lambda_2 \in \Lambda_{\tau_{l+1}})$$

величину $\sigma(\lambda_1, \lambda_2)$. Таким образом,

$$\operatorname{ind}\left(R_l^+ | W^{\perp}_{R_l^+}\right) = \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_l+0}, \Lambda_{\tau_{l+1}}) - \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_l+0} \cap \Pi_0) -$$
$$- \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_{l+1}} \cap \Pi_0) + \dim(\Pi_0 \cap \Lambda_{\tau_l+0} \cap \Lambda_{\tau_{l+1}}).$$

Далее, пусть $(\lambda, v) \in W \cap W^{\perp}_{R_l^+}$, тогда

$$\lambda + \langle zv, 1 \rangle - \lambda_0 = -\lambda_0 \in \Lambda_{\tau_{l+1}} \cap \Lambda_{\tau_l+0} = \bigcap_{\tau_l < \tau < \tau_{l+1}} \Lambda_\tau.$$

В этом случае $y_\tau \equiv -\lambda_0$ — константа; стало быть, $v(\tau) \equiv 0$ и $\lambda = -\langle zv, 1 \rangle = 0$. Следовательно,

$$W \cap W^{\perp}_{R_l^+} = 0, \quad \operatorname{ind} R_l^+ = \operatorname{ind}\left(R_l^+ | W^{\perp}_{R_l^+}\right).$$

Подставляя выражение для $\operatorname{ind}\left(R_l^+ | W^{\perp}_{R_l^+}\right)$ в (18), получаем

$$\operatorname{ind} Q_{l+1} - \operatorname{ind} Q_l = \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_l}, \Lambda_{\tau_l+0}) + \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_l+0}, \Lambda_{\tau_{l+1}}) +$$
$$+ \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_l} \cap \Pi_0) - \frac{1}{2}\dim(\Lambda_{\tau_{l+1}} \cap \Pi_0) +$$
$$+ \dim\left(\bigcap_{0 < \tau < \tau_{l+1}} \Lambda_\tau\right) - \dim\left(\bigcap_{0 < \tau \leqslant \tau_l} \Lambda_\tau\right), \quad i = 0, 1, \ldots, l-1. \qquad (20)$$

Из предложения 2 и леммы 4 вытекает, что

$$\mathrm{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_i+0}) + \mathrm{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i+0}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) = \mathrm{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}).$$

Кроме того $Q_t = Q$ и

$$\mathrm{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_t, \Lambda_0) = \mathrm{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_t, \Pi_0) = \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_t \cap \Pi_0)).$$

Поэтому, складывая равенства (20), получаем

$$\mathrm{ind}\, Q = \sum_{i=0}^{l} \mathrm{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) + \dim\Big(\bigcap_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \Lambda_\tau\Big) - m. \qquad (21)$$

Лемма 15. Для любых $t_1, t_2 \in [0, t]$, $t_1 < t_2$, справедливо равенство

$$\bigcap_{t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2} \Lambda_\tau = \Lambda_{t_1} \cap \Big(\sum_{t_1 < \tau \leqslant t_2} z_\tau R^r\Big)^{\angle}.$$

Доказательство. 1) Если z_τ гладко на полуинтервале $t_1 < \tau \leqslant t_2$, то

$$\bigcap_{t_1 < \tau \leqslant t_2} \Lambda_\tau = \Lambda_{t_1+0} \cap \Big(\sum_{t_1 < \tau \leqslant t_2} z_\tau^{(k_\tau)} R^r\Big)^{\angle}.$$

В самом деле, если $\lambda \angle \Big(\sum\limits_{t_1 < \tau \leqslant t_2} z^{(k_\tau)} R^r\Big)$, то λ — неподвижная точка системы Якоби (10) на $[t_1, t_2]$, т. е. постоянный вектор $x_\tau \equiv \lambda$, $t_1 < \tau \leqslant t_2$, является решением системы (10). Обратно, пусть $\lambda \in \bigcap\limits_{t_1 < \tau \leqslant t_2} \Lambda_\tau$, тогда $\lambda \angle \bigcup\limits_{t_1 < \tau \leqslant t_2} \Lambda_\tau$. Следовательно, для всякого решения системы (10) x_τ, удовлетворяющего условию $x_{t_1+0} \in \Lambda_{t_1+0}$, выполняется тождество $\sigma(\lambda, x_\tau) = 0$, $t_1 < \tau \leqslant t_2$. Дифференцируя по τ, получаем

$$0 = \sigma\Big(\lambda, \sum_{i=1}^{r} \sigma(z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i, x_\tau)\, z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \sigma(z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i, x_\tau)\, \sigma(\lambda, z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i) =$$

$$= \sigma\Big(\sum_{i=1}^{n} \sigma(\lambda, z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i)\, z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i;\ x_\tau\Big).$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r} \sigma(\lambda, z^{(k_\tau)} v_\tau^i)\, z_\tau^{(k_\tau)} v_\tau^i \in \Lambda_\tau$. Поскольку λ также лежит в лагранжевой плоскости Λ_τ, то

$$0 = \sigma\Big(\lambda, \sum_{i=1}^{r} \sigma(\lambda, z_\tau^{(k_\tau)} v_i) z_\tau^{(k_\tau)} v_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} \Big(\sigma(\lambda, z_\tau^{(k_\tau)} v_i)\Big)^2.$$

Стало быть, $\lambda \in (z_\tau^{(k_\tau)} v_i)^{\angle}$, $i = 1, \ldots, r$; $t_1 < \tau \leqslant t_2$.

2) При тех же условиях

$$\Lambda_{t_1+0}\cap\Big(\sum_{t_1<\tau<t_2} z_\tau^{(k_\tau)}\mathbf{R}^r\Big)^{\angle}=\Lambda_{t_1+0}\cap\Big(\sum_{t_1<\tau<t_2} z_\tau\mathbf{R}^r\Big)^{\angle}.$$

В самом деле, из очевидного включения

$$z_\tau^j v\in\sum_{t_1<\tau<t_2} z_\tau\mathbf{R}^r \quad \forall\tau\in(t_1, t_2), \quad v\in\mathbf{R}^r$$

следует, что

$$\Big(\sum_{t_1<\tau<t_2} z_\tau\mathbf{R}^r\Big)^{\angle}\subset\Big(\sum_{t_1<\tau<t_2} z_\tau^{(k_\tau)}\mathbf{R}^r\Big)^{\angle}.$$

С другой стороны, $z_\tau v\in\Lambda_\tau=\Lambda_\tau^{\angle}$, следовательно,

$$\Big(\sum_{t_1<\tau<t_2} z_\tau\mathbf{R}\Big)^{\angle}\supset\Big(\bigcap_{t_1<\tau<t_2}\Lambda_\tau\Big)=\Lambda_{t_1+0}\cap\Big(\sum_{t_1<\tau<t_2} z^{(k_\tau)}\mathbf{R}^r\Big)^{\angle}.$$

3) Пусть $\tau\in[t_1, t_2]$, причем τ не обязана быть точкой гладкости кривой z. Имеем

$$\Lambda_\tau\cap\Lambda_{\tau+0}=\Lambda_\tau\cap\Gamma_{\tau+0}^{\angle}.$$

Поскольку

$$\Gamma_{\tau+0}=\operatorname{span}\{z_{\tau+0}^i v\mid 0\leqslant i<k_{\tau+0},\ v\in\mathbf{R}^r\}\subset$$
$$\subset\operatorname{span}\{z_\theta v\mid \tau<\theta\leqslant\tau+\varepsilon,\ v\in\mathbf{R}^r\},$$

то, в силу 1) и 2)

$$\bigcap_{\tau\leqslant\theta\leqslant\tau+\varepsilon}\Lambda_\theta\supset\Lambda_\tau\cap\Big(\sum_{\tau<\theta\leqslant\tau+\varepsilon} z_\theta\mathbf{R}^r\Big)^{\angle}. \quad \forall\varepsilon>0.$$

Обратное включение непосредственно вытекает из 1), 2).

Следствие. $\Pi_0\bigcap_{t_0<\tau<t_1}\Lambda_\tau=\Lambda_{t_0}\cap\Delta_{t_1}^{t_0}$ *). В частности,

$$\bigcap_{0\leqslant\tau<t}\Lambda_\tau=\Delta_t^0=0.$$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается воспользоваться равенством (21) и вспомнить, что

$$\operatorname{ind}\psi G_t''=\operatorname{ind} Q.$$

Доказательство теоремы 2. Применяя теорему I к формам $\psi G_s''$ и $\psi G_{s+\varepsilon}''$, получим, что при достаточно малом $\varepsilon>0$

$$\operatorname{ind}\psi G_{s+\varepsilon}''-\operatorname{ind}\psi G_s''=\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+\varepsilon})+\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+\varepsilon}, \Pi_0) -$$

*) Определение пространства $\Delta_{t_1}^{t_0}$ см. на стр. 138 (перед формулировкой теоремы 2).

$$-\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Pi_0) - \dim(\Delta_s^0/\Delta_{s+\varepsilon}^0) = \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+\varepsilon}) + \frac{1}{2}(\dim(\Lambda_s \cap \Pi_0) - \dim(\Lambda_{s+\varepsilon} \cap \Pi_0)) - \dim(\Delta_s^0/\Delta_{s+\varepsilon}^0)$$

Далее, $\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+\varepsilon}) = \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_s, \Lambda_{s+0}) + \operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+\varepsilon})$. Легко видеть, что отображение $\tau \to \Lambda_\tau \cap \Pi_0$ полунепрерывно сверху (относительно включения подпространств) в любой точке непрерывности кривой Λ_τ. Поэтому при ε, достаточно близких к нулю, подпространства $\Pi_0 \cap \Lambda_{s+\varepsilon}$ монотонно не возрастают с ростом ε. Кроме того, коль скоро Λ_τ — неубывающая кривая в $L(\Sigma)$ то $\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+\varepsilon})$ не убывает с ростом ε $\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+0}) = \Lambda$. Отсюда нетрудно заключить, что при ε достаточно близких к нулю

$$\operatorname{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{s+0}, \Lambda_{s+\varepsilon}) = \dim(\Lambda_{s+0} \cap \Pi_0) - \dim(\Lambda_{s+\varepsilon} \cap \Pi_0) = \dim(\Lambda_{s+0} \cap \Pi_0) - \dim(\Pi_0 \bigcap_{s<\tau\leqslant s+\varepsilon} \Lambda_\tau).$$

Утверждение теоремы 2 вытекает теперь из следствия леммы 15.

6. Уравнение Якоби и формула для вычисления индекса квадратичной формы $\psi G_t''$ были получены в предположении, что $\gamma_\tau(v) \geqslant \varepsilon |v|^2$. Однако, согласно предложению I, необходимым условием конечности $\operatorname{ind} \psi G_t''$ является лишь неотрицательность форм γ_τ. В настоящем пункте мы кратко опишем, как следует видоизменить уравнение Якоби, если формы γ_τ вырождаются.

Пусть $0 \leqslant k \leqslant m$, $\tau \in (0, t]$. Обозначим через V_τ^k подпространство в $\mathbf{R}^r$, состоящее из всех таких $v \in \mathbf{R}^r$, для которых найдется гладкая кривая v_θ, определенная на некотором отрезке $\bar{\tau} \leqslant \theta \leqslant \tau$ и удовлетворяющая условиям:

$$v_\tau = v, \quad h_\theta(w, v(\theta)) \equiv \sigma(z_\theta^{(i)} w, z_\theta v(\theta)) \equiv 0, \quad \bar{\tau} \leqslant \theta \leqslant \tau, \quad 0 \leqslant i < 2k,$$

для любого $w \in \mathbf{R}^r$.

Ясно, что $V_\tau^{k_2} \subset V_\tau^{k_1}$ при $k_1 < k_2$; кроме того $v_\tau^k = \mathbf{R}^r$ при $k < k_\tau$, $V_\tau^{k_\tau} = \ker \gamma_\tau$.

Для $0 < k \leqslant m$ положим

$$\gamma_\tau^k : (v + V_\tau^k) \mapsto (-1)^{k-1} \sigma(z_\tau^{2k} v, z_\tau v), \quad v \in V_\tau^{k-1}$$

— квадратичная форма на v_τ^{k-1}/V_τ^k.

Пусть, кроме того, $V_\tau^{-1} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R}^r$, $\gamma_\tau^0 \overset{\text{def}}{=} h_\tau$.

Имеем $\gamma_\tau^k = 0$ при $k < k_\tau$, $\gamma_\tau^{k_\tau} = \gamma_\tau$.

Следующее утверждение является существенным усилением предложения 1, хотя его доказательство отличается от доказательства предложения 1 лишь необходимостью использования большего количества индексов.

Предложение 3. Если $\operatorname{ind}\psi G_t'' < +\infty$, то

а) $\sigma(z_\tau^{(2k)} v_1, z_\tau v_2) = 0$ $\forall v_1, v_2 \in V_\tau^k$, $0 \leqslant k < m$, $\tau \in (0, t]$;

б) $\gamma_\tau^k \geqslant 0$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $\tau \in (0, t]$. Обратно, если выполняется условие а) и $\gamma_\tau^k(\bar{v}) \geqslant \varepsilon |\bar{v}|^2$ для любых $\bar{v} \in V_\tau^{k-1} / V_\tau^k$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $\tau \in (0, t]$ и некоторого $\varepsilon > 0$, то $\operatorname{ind}\psi G_t'' < +\infty$.

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\theta \uparrow \tau} V_\theta^k \supset V_\tau^k, \quad 0 \leqslant k \leqslant m, \quad \tau \in (0, t];$$

если же τ — точка гладкости z_θ и $\dim V_\theta^k = \text{const}$ при θ близких к τ, то V_θ^k гладко зависит от θ вблизи τ. Предположим, что выполнено достаточное условие конечности $\operatorname{ind}\psi G_t''$, приведенное в предложении 3, тогда подпространства V_τ^k, $0 \leqslant k \leqslant m$, кусочно гладко зависят от $\tau \in (0, t]$, причем гладко в любой точке гладкости z_τ, ψh_τ. Оказывается, при выполнении этого условия конечности $\operatorname{ind}\psi G_t''$ можно так определить (обобщенное) уравнение Якоби и якобиеву кривую Λ_τ, чтобы выполнялось утверждение теоремы 1 (и разумеется, все ее следствия).

Положим

$$\Gamma_\tau^k = \operatorname{span}\left\{\frac{d^i}{d\tau^i}(z_\tau v_\tau) \mid v_\theta \in V_\theta^{k-1},\ 0 \leqslant i < k\right\}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m,$$

$$\hat{\Gamma}_\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_\tau^k, \quad \tau \in (0, t]$$

— кусочно гладкие семейства изотропных подпространств в Σ.

Пусть $\tau \in (0, t]$ и $V_\theta^{k-1} \ni v_\theta$ — такая гладкая кривая, определенная при θ, близких к τ, что $v_\tau \in V_\tau^k$. Тогда, очевидно, $\frac{d^k}{d\tau^k}(z_\tau v_\tau) \in \Gamma_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1}$. Поэтому, каково бы ни было $x \angle (\Gamma_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1})$, соответствие

$$\zeta_\tau^k(x) : \bar{v} \to \sigma\left(\frac{d^k}{d_\tau^k}(z_\tau v_\tau), x\right).$$

где

$$\bar{v} = (v_\tau + V_k) \in V_\tau^{k-1} / V_\tau^R \text{ и } v_\theta \in V_\theta^{k-1}\ \forall\theta,$$

корректно определяет линейную форму $\eta_\tau^k(x)$ на V_τ^{k-1}/V_τ^k. Следовательно, отображение

$$x \mapsto \frac{1}{2}(\gamma_\tau^k)^{-1}(\eta_\tau^k(x)), \quad x \angle (\Gamma_\tau^k + \Gamma_\tau^{k+1})$$

определяет квадратичную форму на $(\Gamma_\tau^k+\Gamma_\tau^{k+1})^{\angle}$

$$x \to \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}(\gamma_\tau^k)^{-1}(\eta_\tau^k(x)),\quad x\angle(\hat{\Gamma}_\tau^k+\Gamma_\tau^{k+1}),$$

а отображение

$$x \mapsto \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m}(\gamma_\tau^k)^{-1}(\eta_\tau^k(x)),\quad x+\hat{\Gamma}_\tau, \tag{22}$$

— квадратичную форму на $\hat{\Gamma}_\tau^{\angle}\subset\Sigma$.

Продолжим форму (22) произвольным образом до некоторой квадратичной формы J_τ на всем пространстве Σ. Форма J_τ определяет векторное поле $\Lambda\mapsto J_\tau(\Lambda)$ на $L(\Sigma)$. Дифференциальное уравнение

$$\dot{\Lambda}=J_\tau(\Lambda),\quad \Lambda\in L(\Sigma),\quad \tau\in[0,t], \tag{23}$$

назовем (обобщенным) уравнением Якоби. Заметим, что уравнение (23) определено однозначно лишь для таких τ, Λ, для которых $\Lambda\supset\hat{\Gamma}_\tau$.

Как и для уравнения (11), решениями уравнения (23) называются не только непрерывные, но и кусочно-непрерывные кривые. Якобиевой кривой называется решение Λ_τ уравнения (23), удовлетворяющее условиям

$$\Lambda_0=\Pi_0,\quad \Lambda_{\tau+0}=\Lambda_\tau^{\hat{\Gamma}_{\tau+0}},\quad \forall\tau\in[0,t).$$

Нетрудно показать, что $\hat{\Gamma}_\tau\subset\Lambda_\tau$, $\forall\tau\in(0,t]$. Следовательно, якобиева кривая (в отличие от обобщенного уравнения Якоби) однозначно определяется формой (22) и не зависит от выбора продолжения этой формы на все пространство Σ. Если выполнено достаточное условие конечности $\operatorname{ind}\psi G_t''$ из предложения 1, то кривая Λ_τ, очевидно, совпадает с якобиевой кривой, определенной для этого случая в п. 3.

Предложение 4. Предположим, что выполнено достаточное условие конечности $\operatorname{ind}\psi G_t''$, сформулированное в предложении 3, и Λ_τ, $\tau\in[0,t]$, — якобиева кривая. Тогда для кривой Λ_τ справедливо утверждение теоремы 1.

Предложение 4, обобщающее теорему 1, доказывается тем же способом, что и эта теорема, только еще более громоздко из-за необходимости использования большего числа индексов.

Мы научились строить якобиеву кривую и вычислять $\operatorname{ind}\psi G_t''$ в более общей ситуации, чем в теореме 1, тем не менее, между необходимым и достаточным условиями конечности $\operatorname{ind}\psi G_t''$ остается еще некоторый зазор.

Предположим, что выполнены условия а), б) предложения 3, и пусть

$$\mathrm{T}=\bigcap_{\varepsilon>0}\overline{([0,t]\setminus\mathscr{K}_\varepsilon)},$$

где

$$\mathscr{K}_\varepsilon=\{\tau\in(0,t]\mid\gamma_\tau^k(\bar v)\geqslant\varepsilon|\bar v|^2,\ \forall\bar v\in V_\tau^{k-1}/V_\tau^k,\ 0<k\leqslant m\}.$$

Нетрудно показать, что множество T нигде не плотно на $[0,t]$, если же z_τ кусочно аналитично зависит от τ, то T состоит из конечного числа точек.

Дальнейшие рассмотрения проводятся в предположении, что T — конечное множество (кусочная аналитичность необязательна).

Для всякого $\tau\in(0,t]\setminus\mathrm{T}$ определены изотропное пространство Γ_τ и квадратичная форма (22). Уравнение Якоби (23) не определенно (имеет особенности) лишь при $\tau\in\mathrm{T}$. Пусть $\delta>0$ и $\chi_\delta(\tau)$ — кусочно постоянная функция на $[0,t]$, равная нулю на δ-окрестности $O_\delta\mathrm{T}$ множества T и единице — вне замыкания этой δ-окрестности.

Рассмотрим «урезанное» уравнение Якоби

$$\dot\Lambda=\chi_\delta(\mathrm{T})J_\tau(\Lambda),\quad \Lambda\in L(\Sigma),\tag{23б}$$

определенное уже для всех $\tau\in[0,t]$.

Обозначим через Λ_τ^δ решение уравнения (23б), локально постоянное в $O_\delta\mathrm{T}$ и удовлетворяющее условиям

$$\Lambda_0=\Pi_0,\quad \Lambda_{\tau+0}=\Lambda_\tau^{\Gamma_{\tau+0}},\quad \forall\tau\in[0,t)\setminus O_\delta\mathrm{T}.$$

Предложение 5. Пусть $\delta>0$ и $\tau_{l+1}=0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_l=t$ — такое разбиение отрезка $[0,t]$, что все куски $\Lambda^\delta_\cdot|_{]\tau_i,\tau_{i+1}]}$, $0\leqslant i<l$, кривой Λ_τ^δ — простые. Положим

$$\iota(\delta)=\sum_{i=0}^{l}\mathrm{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{\tau_i},\Lambda_{\tau_{i+1}}).$$

Тогда $\iota(\delta)\uparrow\mathrm{ind}\,\Psi G_t''+m$ при $\delta\downarrow0$.

Это предложение, по-существу, содержится в предыдущих результатах. В самом деле, обозначим Q_δ сужение формы $\psi G_t''$ на пространство функций, обращающихся в нуль на $O_\delta\mathrm{T}$. Нетрудно показать, что $\mathrm{ind}\,Q_\delta\uparrow\mathrm{ind}\,\psi G_t''$ при $\delta\downarrow0$. Перейти от $\psi G_t''$ к Q_δ — это то же самое, что «вырезать» $O_\delta\mathrm{T}$ из временной оси. После такого вырезания оказывается выполненным достаточное условие конечности индекса из предложения 3, причем Λ_τ^δ — якобиева кривая для формы Q_δ и, согласно предложению 4, $\mathrm{ind}\,Q_\delta=\iota(\delta)-m$. ■

Замечание 1. В предложение 5 $\lim\limits_{\delta\downarrow0}\iota(\delta)=\mathrm{ind}\,\psi G_t''$ может быть как конечным, так и бесконечным.

Замечание 2. Отметим, что и в том случае, когда z_τ гладко, или даже аналитично зависит от τ, кривые Λ_τ^δ оказываются, вообще говоря, разрывными. Это одна из причин, по которым мы упорно рассматриваем не только гладкие, но и кусочно гладкие кривые. Учет разрывов помогает и в гладкой ситуации: если уравнение Якоби имеет изолированную особенность, мы получаем рецепт, в соответствии с которым следует состыковывать решения, определенные слева и справа от особенности.

ДОБАВЛЕНИЕ К § 3. ЛАГРАНЖЕВ ГРАССМАНИАН

Здесь в нужной нам форме приведены сведения из симплектической геометрии, использованные в § 3. Доказательства, как правило, заменяются ссылками на литературу. Везде ниже Σ — симплектическое пространство размерности $2m$ с симплектической формой σ. Выражение $S_1 \angle S_2$ для подмножеств $S_1, S_2 \subset \Sigma$ означает, что $\sigma(s_1, s_2) = 0$, $\forall s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$. Через $S^\angle$ обозначается косоортогональное дополнение подмножества $S \subset \Sigma$, $S^\angle = \{x \in \Sigma \mid \sigma(x, s) = 0 \ \forall s \in S\}$.

Подпространство $\Gamma \subset S$ называется изотропным, если $\Gamma \subset \Gamma^\angle$, и лагранжевым (лагранжевой плоскостью), если $\Gamma = \Gamma^\angle$. Множество всех лагранжевых подпространств образует замкнутое подмногообразие в грассманиане $G_m(\Sigma)$, это подмногообразие обозначается $L(\Sigma)$ и называется лагранжевым грассманианом. Таким образом,

$$L(\Sigma) = \{\Lambda \subset \Sigma \mid \Lambda^\angle = \Lambda\}.$$

I. Естественный атлас в $L(\Sigma)$. Пусть $\Delta \in L(\Sigma)$, обозначим через $\Delta^{\pitchfork}$ совокупность всех лагранжевых плоскостей в $L(\Sigma)$, трансверсальных Δ, и для произвольного $\Lambda \in \Delta^{\pitchfork}$ пусть $P_\Lambda : \Sigma \to \Lambda$ — проектор Σ на Λ параллельно Δ.

Предложение П1. Для всякого $\Delta \in L(\Sigma)$ и $\Lambda \in \Delta^{\pitchfork}$ справедливы тождества:

i) $\delta(P_\Lambda x_1, x_2) + \sigma(x_1, P_\Lambda x_2) = \sigma(x_1, x_2) \ \forall x_1, x_2 \in \Sigma$;

ii) $P_\Lambda \Delta = \{0\}$.

Обратно, если некоторый линейный оператор $P : \Sigma \to \Sigma$ удовлетворяет условиям i), ii), то $P = P_\Lambda$ для некоторого $\Lambda \in \Delta^{\pitchfork}$. Доказательство см. в [12, стр. 136—137].

Следствие. Множество $\Delta^{\pitchfork}$ обладает структурой аффинного пространства, причем ассоциированное с ним линейное пространство естественно изоморфно пространству $\mathcal{P}(\Sigma/\Delta)$ всех симметричных билинейных форм на Σ/Δ.

В самом деле, то, что совокупность линейных операторов, удовлетворяющих условиям *i*), *ii*), образует аффинное пространство, очевидно. Из этих условий, кроме того, следует, что

$\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \Delta^{\pitchfork}$ выражение $\sigma((P_{\Lambda_1} - P_{\Lambda_2}) x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \Sigma$ определяет симметричную билинейную форму на $\mathscr{P}(\Sigma/\Delta)$. Нетрудно показать, что любая форма из $\mathscr{P}(\Sigma/\Delta)$ реализуется таким образом.

Совокупность аффинных пространств $\Delta^{\pitchfork}$ для всевозможных Δ является естественным атласом в $L(\Sigma)$, $\dim L(\Sigma) = \frac{m(m+1)}{2}$.

II. Касательное пространство $T_\Lambda L(\Sigma)$. Пусть $\Lambda \in L(\Sigma)$, и Λ_ε, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ — гладкая кривая в $L(\Sigma)$, удовлетворяющая условию $\Lambda_0 = \Lambda$. В таком случае, $\xi = \frac{d}{d\varepsilon} \Lambda_\varepsilon |_{\varepsilon=0}$ касательный вектор к $L(\Sigma)$ в точке Λ. Пусть $\lambda \in \Lambda$ и λ_ε — гладкая кривая в Σ, удовлетворяющая условиям $\lambda_\varepsilon \in \Lambda_\varepsilon$ $\forall \varepsilon$, $\lambda_0 = \lambda$. Легко видеть, что смежный класс $\frac{d}{d\varepsilon} \lambda_\varepsilon |_{\varepsilon=0} + \Lambda$ зависит лишь от $\lambda \in A$ и $\frac{d}{d\varepsilon} \Lambda_\varepsilon |_{\varepsilon=0}$, а не от выбора кривой λ_ε. Следовательно, соответствие $\lambda \to \frac{d}{d\varepsilon} \lambda_\varepsilon |_{\varepsilon=0}$ определяет линейное преобразование $D_\xi : \Lambda \to \Sigma/\Lambda$. Ясно, что отображение $\xi \to D_\xi$ линейно, причем $D_\xi = 0$ в том и только том случае, когда $\xi = 0$.

До сих пор мы нигде не воспользовались тем, что имеем дело с лагранжевыми подпространствами, все сказанное верно для любого касательного вектора к грассманову многообразию. Из лагранжевости следует, что корректно определена билинейная форма $\frac{1}{2} \sigma(D_\xi \lambda_1, \lambda_2)$, λ_1 $\lambda_2 \in \Lambda$. Более того, из тождества

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} \sigma(\lambda^1, \lambda^2_\varepsilon) |_{\varepsilon=0} = \sigma(D_\xi \lambda_1, \lambda_2) + \sigma(\lambda_1, D_\xi \lambda_2)$$

следует симметричность этой формы. Соответствующую квадратичную форму на Λ обозначим символом $\frac{1}{2} \sigma(D_\xi \Lambda, \Lambda)$. Сравнивая размерности, получаем:

Предложение П2. Соответствие $\xi \mapsto \frac{1}{2} \sigma(D_\xi \Lambda, \Lambda)$ устанавливает естественный изоморфизм пространства $T_\Lambda L(\Sigma)$, касательного к $L(\Sigma)$ в «точке» Λ, и пространства $\mathscr{P}(\Lambda)$ квадратичных форм на Λ.

Для нас особенно важно то, что изоморфизм, описанный в предложении П2, определяет отношение частичного упорядочения в пространстве $T_\Lambda L(\Sigma)$: касательный вектор $\xi \in T_\Lambda L(\Sigma)$ называется неотрицательным, если соответствующая ему квадратичная форма неотрицательна.

Пусть $h_t \in \mathscr{P}(\Sigma)$, $t \in \mathbf{R}$, — семейство квадратичных форм на Σ (нестационарный квадратичный гамильтониан). Гамильтониану h_t, $t \in \mathbf{R}$, отвечает линейная гамильтонова система в Σ, обозначим через $H_t : \Sigma \to \Sigma$, $t \in \mathbf{R}$, фундаментальную матрицу этой системы, $H_0 = \mathrm{id}$. Ясно, что H_t — линейное симплектическое преобразование. $H_t \in \mathrm{Sp}(\Sigma)$. Поскольку симплектические преобразования переводят лагранжевы плоскости в лагранжевы, то поток H_t^* в Σ определяет соответствующий поток $\mathscr{H}_t^*$, $t\in\mathbf{R}$ в $L(\Sigma)$,

$$\mathscr{H}_t(\Lambda)\overset{\mathrm{def}}{=}H_t\Lambda \quad \forall\Lambda\in L(\Sigma).$$

С другой стороны, семейство квадратичных форм h_t, $t\in\mathbf{R}$, очевидным образом порождает нестационарное векторное поле $\vec{h}_t$ на $L(\Sigma)$: Достаточно сузить квадратичную форму h_t на плоскость $\Lambda\in L(\Sigma)$, чтобы получить касательный вектор в «точке» Λ,

$$\vec{h}_t\,|\,\{\Lambda\}\overset{\mathrm{def}}{=}h_t\,|\,\Lambda \quad \forall\Lambda\in L(\Sigma),$$

или, используя введенную выше символику,

$$\vec{h}_t\,|\,\{\Lambda\}=h_t(\Lambda,\ \Lambda).$$

Следующее тождество устанавливается прямым вычислением:

$$\mathscr{H}_t^*=\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t \vec{h}_\tau d\tau, \quad t\in\mathbf{R}.$$

III. Вложения и проекции. Пусть $\Gamma\subset\Sigma$ — изотропное подпространство, т. е. $\Gamma\subset\Gamma^{\angle}$ $\dim\Gamma=k\leqslant m$. Легко видеть, что кососкалярное произведение $\sigma(\cdot,\cdot)$ индуцирует симплектическую структуру в пространстве $\Gamma^{\angle}/\Gamma$, при этом $\dim(\Gamma^{\angle}/\Gamma)=2(m-k)$. Пусть $\mathscr{A}\in L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)$, тогда полный прообраз подпространства $\mathscr{A}$ при факторизации $\Gamma^{\angle}/\Gamma$ является лагранжевым подпространством в Σ. Описанное соответствие определяет вложение многообразия $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)$ в многообразие $L(\Sigma)$. При этом вложении многообразие $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)$ переходит в подмногообразие в $L(\Sigma)$, состоящее из всех лагранжевых плоскостей, содержащих Γ (или, что эквивалентно, содержащихся в $\Gamma^{\angle}$). Отныне мы будем отождествлять многообразие $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)$ с соответствующим ему подмногообразием в $L(\Sigma)$.

Обратно, для любого $\Lambda\in L(\Sigma)$ положим $\Lambda^{\Gamma}=\Lambda\cap\Gamma^{\perp}+\Gamma$. Легко видеть, что $\Lambda^{\angle}\in L(\Gamma^{\perp}/\Gamma)$, и отображение $\Lambda\mapsto\Lambda^{\Gamma}$ определяет проектирование $L(\Sigma)$ на подмногообразие $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)$. Это проектирование разрывно на $L(\Sigma)$, но гладко и сюръективно на подмногообразиях $\{\Lambda\in L(\Sigma)\,|\,\dim(\Lambda\cap\Gamma)=\mathrm{const}\}$. Если $\Lambda\in L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)\subset\subset L(\Sigma)$, то касательное пространство $T_\Lambda L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)\subset T_\Lambda L(\Sigma)\approx\approx\mathscr{P}(\Lambda)$ состоит из таких квадратичных форм q на Λ, что $\Gamma\subset\subset\ker q$.

Предложение П3. Вложение $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)\subset L(\Sigma)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Доказательство см. в [12, стр. 152—154].

Следствие. $\pi_1(L(\Sigma))=\mathbf{Z}$. В самом деле, пусть $\dim\Gamma==n-1$, тогда $\dim(\Gamma^{\angle}/\Gamma)=2$. В то же время, $L(\mathbf{R}^2)=\mathbf{RP}^1=S^1$.

В действительности, вложение $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)\subset L(\Sigma)$ при $\dim\Gamma=$

$=n-1$ не только индуцирует изоморфизм фундаментальных групп многообразий $L(\Sigma)$ и S^1, но и канонически определяет образующую $\gamma\in\pi_1(L(\Sigma))$. В самом деле, ненулевые касательные векторы к подмногообразию $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)\subset L(\Sigma)$ представляют собой квадратичные формы ранга один. Любая такая форма либо неотрицательна, либо неположительна. Обозначим через γ ту образующую группы $\pi_1(L(\Sigma))$, которая представляется кривой в $L(\Gamma^{\angle}/\Gamma)$ с неотрицательной скоростью.

Можно показать, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора Γ. Действительно, симплектическая группа $\mathrm{Sp}(\Sigma)$ транзитивно действует на множестве изотропных подпространств фиксированной размерности. Поскольку, при этом, группа $\mathrm{Sp}(\Sigma)$ связна, то для любых изотропных Γ_1, $\Gamma_2\subset\Sigma$ одинаковой размерности существует изотропный тождественному диффеоморфизм многообразия $L(\Sigma)$ на себя, переводящий $L(\Gamma_1^{\angle}/\Gamma_1)$ в $L(\Gamma_2^{\angle}/\Gamma_2)$.

Определение. Пусть Λ_θ, $\theta\in S^1$, — непрерывная замкнутая кривая в $L(\Sigma)$. Кривая Λ_θ представляет некоторый элемент d фундаментальной группы многообразия $L(\Sigma)$, $d\in\mathbf{Z}$. Число d называется индексом Маслова кривой Λ_θ и обозначается $d=$ $=\mathrm{Ind}\,\Lambda_\theta$.

IV. Индекс Маслова.

Определение. Пусть Λ_1, Λ_2, $\Lambda_3\in L(\Sigma)$, индексом Маслова $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ называется сигнатура квадратичной формы q не векторном пространстве $\Lambda_1\oplus\Lambda_2\oplus\Lambda_3$, определенной формулой

$$q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=\sigma(\lambda_1, \lambda_2)+\sigma(\lambda_2, \lambda_3)+\sigma(\lambda_3, \lambda_1),\quad \lambda_i\in\Lambda_i,\quad i=1, 2, 3.$$

Предложение П4 (важнейшие свойства индекса Маслова).

1) Индекс $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ антисимметричен по всем аргументам.
2) Справедливо тождество (цепное правило):

$$\mu(\Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4)-\mu(\Lambda_1, \Lambda_3\Lambda_4)+\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_4)-\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)=0$$
$$\forall\Lambda_i\in L(\Sigma),\quad i=1, \ldots, 4.\,^{*)}$$

3) Для любых $\Lambda_i\in L(\Sigma)$, $i=1, 2, 3$ и любого подпространства $\Gamma\subset\Lambda_1\cap\Lambda_2+\Lambda_2\cap\Lambda_3+\Lambda_3\cap\Lambda_1$ справедливо тождество

$$\mu(\Lambda_1^\Gamma, \Lambda_2^\Gamma, \Lambda_3^\Gamma)=\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3).$$

Доказательство свойств 2), 3) см. в [13, стр. 32—34] свойство 1) очевидно.

Приведем другое определение индекса Маслова, именно оно используется в основном тексте.

Определение. Пусть $\Lambda_i\in L(\Sigma)$, $i=1$, 2, 3. Произвольный вектор $\lambda\in\Lambda_2\cap(\Lambda_1+\Lambda_3)$ можно представить в виде $\lambda=\lambda_1+\lambda_3$, где $\lambda_1\in\Lambda_1$, $\lambda_3\in\Lambda_3$. Положим $q(\lambda)=\sigma(\lambda_1, \lambda_3)$. Нетрудно видеть, что соответствие $\lambda\to q(\lambda)$ корректно определяет квадратичную форму

*) Свойства 1) означает, что μ является «2-коцепью» на $L(\Sigma)$, а свойство 2) означает, что μ — «коцикл» на $L(\Sigma)$.

на $\Lambda_2\cap(\Lambda_1+\Lambda_3)$, т. е. что выражение $\sigma(\lambda_1, \lambda_3)$ зависит лишь от суммы $\lambda_1+\lambda_3$, коль скоро λ_1 и λ_3 лежат в фиксированных лагранжевых плоскостях. Индексом Маслова $\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$ называется сигнатура квадратичной формы q на $\Lambda_2\cap(\Lambda_1+\Lambda_3)$. Заметим, что $\ker q=\Lambda_1\cap\Lambda_2+\Lambda_2\cap\Lambda_3$.

Эквивалентность двух определений индекса Маслова в случае $\Lambda_1\cap\Lambda_3=0$ доказана в [13, стр. 31]; общий случай сводится к этому при помощи утверждения 3) предложения П4.

Из второго определения индекса Маслова вытекает оценка

$$|\mu(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)|\leqslant m-\dim(\Lambda_1\cap\Lambda_2+\Lambda_2\cap\Lambda_3)\,\forall\Lambda_i\in L(\Sigma).$$

Предложение П5. Пусть Λ_1, $\Lambda_2\in L(\Sigma)$. Тогда для любого целого числа k, удовлетворяющего неравенству $|k|\leqslant\leqslant m-\dim(\Lambda_1\cap\Lambda_2)$, существует такая лагранжева плоскость Δ, трансверсальная Λ_1 и Λ_2, что $\mu(\Lambda_1, \Delta, \Lambda_2)=k$.

Доказательство использует описание множества лагранжевых плоскостей, трансверсальных данной, приведенное в пункте 1), а также антисимметричность индекса Маслова.

Предложение П6. Пусть Λ_t, $t\in[t_1, t_2]$ — непрерывная замкнутая кривая в $L(\Sigma)$, $\Lambda_{t_2}=\Lambda_{t_1}$. Пусть, кроме того, заданы такие точки $t_1=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_N<\tau_{N+1}=t_2$ и лагранжевы плоскости $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_N$, что $\Delta_i\cap\Lambda_\tau=0$ при $\tau_i\leqslant\tau\leqslant\tau_{i+1}$, $i=0,\ldots,N$.

Тогда $\forall\Pi\in\Lambda(\Sigma)$ справедливо равенство

$$2\,\mathrm{Ind}\,\Delta_{\cdot}=\sum_{i=0}^{N}\mu(\Pi, \Delta_i, \Lambda_{\tau_{i+1}})-\mu(\Pi, \Delta_i, \Lambda_{\tau_i}).$$

Доказательство следует из результатов параграфа 1.9 работы [13] (см., в особенности, предложение 1.9.5).

V. Унитарная модель. Рассмотрим пространство $\mathbf{C}^m$ с эрмитовым произведением $\langle v, w\rangle=\sum_{i=1}^{m} v_i\bar{w}_i$. Билинейная форма $\mathrm{Im}\langle v, w\rangle$ задает симплектическую структуру на $\mathbf{C}^m$, а $\mathrm{Re}\langle v, w\rangle$ — евклидову структуру. Обозначим через Λ_R совокупность всех вещественных векторов в $\mathbf{C}^m$; ясно, что Λ_R, а также $i\Lambda_R$ — лагранжевы подпространства.

Любое унитарное преобразование, сохраняя эрмитову структуру, сохраняет и симплектическую структуру, следовательно, переводит лагранжевы плоскости в лагранжевы. Таким образом, группа $U(n)$ действует на многообразии лагранжевых плоскостей $L(\mathbf{C}^m)$. В действительности, это действие транзитивно. В самом деле, пусть $\Lambda\in L(\mathbf{C}^m)$ и $e_1,\ldots,e_m$ — базис в Λ, ортонормированный в смысле евклидовой структуры $\mathrm{Re}\langle\cdot, \cdot\rangle$ т. е. $\mathrm{Re}\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$, $i, j=1,\ldots,m$.

Поскольку $\mathrm{Im}\langle e_i, e_j\rangle=0$, $i, j=1,\ldots,m$ (Λ — изотропная плоскость), то базис $e_1,\ldots,e_m$ — ортонормированный также и в смысле эрмитовой структуры ,$\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$, $i,j=1,\ldots,m$. Поэтому существует унитарное преобразование U, переводящее стандартный базис в базисе $e_1,\ldots,e_m$. Ясно, что $U\Lambda_{\mathbf{R}}=\Lambda$. Далее, унитарное преобразование $U:\mathbf{C}^m\to\mathbf{C}^m$ в том и только том случае переводит $\Lambda_{\mathbf{R}}$ в себя, когда все элементы матрицы U вещественны. Вещественные матрицы в $\mathbf{U}(m)$ образуют подгруппу $\mathbf{O}(m)$. Таким образом, мы установили изоморфизм $L(\mathbf{C}^m)\approx\mathbf{U}(m)/\mathbf{O}(m)$.

Пусть $U\in\mathbf{U}(m)$ ясно, что величина $\det^2(U)$ зависит лишь от смежного класса U в $\mathbf{U}(m)/\mathbf{O}(m)$ и, следовательно, корректно определена на $L(\mathbf{C}^m)$. При этом $\det^2(U)\in\{v\in\mathbf{C}:|v|=$ $=1\}=S^1$.

Предложение П7. Пусть Λ_ϑ, $\vartheta\in S^1$ — непрерывная замкнутая кривая в $L(\mathbf{C}^m)$, $\Lambda_\vartheta=U_\vartheta\cdot\mathbf{O}(m)$. Тогда $\operatorname{Ind}\Lambda$ равен степени отображения $\vartheta\mapsto\det(U_\vartheta)$ из S^1 в S^1.

Пусть $\Lambda\in L(\Sigma)$, $\xi\in T_\Lambda L(\Sigma)$, как и выше, касательный вектор ξ отождествляется с квадратичной формой $\frac{1}{2}\ \sigma(D_\xi\Lambda,\Lambda)$ на Λ (см. предложение П2). Наличие евклидовой структуры позволяет сопоставить квадратичной форме симметричный оператор $s(\xi):\Lambda\to\Lambda$, где

$$\operatorname{Re}\langle s(\xi)\lambda_1,\lambda_2\rangle=\frac{1}{2}\sigma(D_\xi\lambda_1,\lambda_2)\ \forall\lambda_1,\ \lambda_2\in\Lambda.$$

Из предложения П7 можно вывести

Предложение П8. Пусть $\Lambda_\theta,\theta\in S^1$ — абсолютно непрерывная замкнутая кривая в $L(\mathbf{C}^m)$. Тогда

$$\operatorname{Ind}\Lambda.=\frac{2}{\pi}\int\limits_{S^1}\operatorname{tr}s\left(\frac{d\Lambda_\theta}{d\theta}\right)d\theta.$$

Следствие. Пусть h_τ, $\tau\in[0,t]$ — нестационарный квадратичный гамильтониан на Σ и $H_\tau:\Sigma\to\Sigma$ — гамильтонов поток. Пусть $\Lambda_0\in L(\Sigma)$ — таково, что кривая $\Lambda_\tau=H_\tau\Lambda_0$, $\tau\in[0,t)$ в $L(\Sigma)$ удовлетворяет условию $\Lambda_t=\Lambda_0$. Тогда

$$\operatorname{Ind}\Lambda.=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t\operatorname{tr}s(h_\tau|\Lambda_\tau)\,d\tau.$$

§ 4. ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ

В настоящем параграфе описаны некоторые инварианты семейства кривых на лагранжевом грассманиане, и с их помощью исследуется вторая вариация управляемой системы.

1. В этом пункте используются обозначения пункта I §3. Напомним, что G_t'' есть квадратичное отображение пространства

$\ker G_t'$ в k-мерное векторное пространство $\operatorname{coker} G_t' = (\Pi^\perp)^*$. Положим $\Psi = \{\psi \in \Pi^\perp \mid \operatorname{ind} \psi G_t'' < +\infty\}$. Множество Ψ является, очевидно, выпуклым, но, вообще говоря, ни открытым, ни замкнутым конусом.

Следующее правило сопоставляет каждому $\tau \in (0, t]$ целое неотрицательное $l_\tau \leqslant m$: если квадратичное отображение $v \mapsto h_\theta(v, v)$, $v \in \mathbf{R}^r$, не равно тождественно нулю ни на каком интервале $\bar{\tau} < \theta < \tau$, то положим $l_\tau = 0$; в противном случае пусть l_τ — такое максимальное (среди чисел $1, 2, \ldots, m$) число l, что $[\mathfrak{z}_\theta^{(i)} v_1, \mathfrak{z}_\theta v_2] \equiv 0$ при $i < 2(l-1)$, v_1, $v_2 \in \mathbf{R}^r$, на некотором интервале $\bar{\tau} < \theta < \tau$.

Из предложения 3.1 непосредствено вытекает следующее

Предложение 1. Множество $\Psi \subset \Pi^\perp$ содержится в пересечении подпространства

$$\left\{\left[\mathfrak{z}_\tau^{(l_\tau - 1)} v_1, \mathfrak{z}_\tau^{(l_\tau - 1)} v_2\right] \mid 0 < \tau \leqslant t,\ v_1, v_2 \in \mathbf{R}^r\right\}^\perp \tag{1}$$

и выпуклого замкнутого конуса

$$\left\{\left[\mathfrak{z}_\tau^{(l_\tau - 1)} v, \mathfrak{z}_\tau^{(l_\tau)} v\right] \mid 0 < \tau \leqslant t,\ v \in \mathbf{R}^r\right\}^\circ. \tag{2}$$

Если, вдобавок, замыкание множества $\left\{\left[\mathfrak{z}_\tau^{(l_\tau)} v, \mathfrak{z}_\tau^{(l_\tau - 1)} v\right] \mid 0 < \tau < t, |v| = 1\right\}$ не пересекается с подпространством (1), то внутренность множества Ψ относительно пространства (1) совпадает с внутренностью пересечения (1) и (2) относительно (1).

Замечание. Предложение 3.3 позволяет существенно уточнить описание конуса Ψ, данное в предложении 1, причем можно выделить не только внутренние, но и граничные точки Ψ относительно (1). Мы, однако, на этом останавливаться не будем.

В пункте 1 § 3 каждому $\psi \in \Pi^\perp \setminus 0$ поставлено в соответствие симплектическое пространство $E_{\Pi,\psi}$ и (естественная) точная последовательность

$$0 \to \Pi^* \to E_{\Pi,\psi} \to \Pi \to 0.$$

Введение локальных координат в окрестности точки μ_0 приводит к изоморфизму $E_{\Pi,\psi}$ и пространства $\Pi \oplus \Pi^*$ со стандартной симплектической структурой $\sigma(x_1 \oplus \xi_1, x_2 \oplus \xi_2) = \langle \xi_2, x_1 \rangle - \langle \xi_1, x_2 \rangle$, $x_i \in \Pi$, $\xi_i \in \Pi^*$, причем диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & E_{\Pi,\psi} \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & \Pi^* \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Pi \arrow[r] & 0 \\
 & & \Pi \oplus \Pi^* \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна (нижние стрелки обозначают вложение Π^* в $\Pi \oplus \Pi^*$ в качестве второго слагаемого и координатную проекцию $\Pi \oplus \Pi^*$ на первое слагаемое). Этот изоморфизм не является естественным и зависит от выбора локальных координат.

Впрочем, для построения такого изоморфизма нужно много меньше, чем введение локальных координат. Следующее утверждение точно описывает ситуацию. (Напомним, что $\Pi^*=T^*_{\mu_0}M/\Pi^\perp$).

Лемма 1. Пусть $\Phi:\Pi^\perp\to\mathrm{Der}^*M$ — такое линейное отображение, что для всякого $\psi\in\Pi^\perp$ выполняются соотношения $\mu_0\circ\Phi\psi=\Psi$, $\mu_0\circ d(\Phi\psi)\perp\Pi\wedge\Pi$. Тогда для всякого $\psi\in\Pi^\perp\setminus 0$ отображение

$$X\mapsto\mu_0\circ X\oplus(\mu_0\circ L_X\Phi\psi+\Pi^\perp),\ X\in\mathscr{E}_\Pi$$

индуцирует изоморфизм симплектических пространств

$$S_\psi:E_{\Pi,\psi}\to\Pi\oplus\Pi^*.$$

Доказательство — прямое вычисление.

Зафиксируем теперь раз и навсегда отображение Φ, удовлетворяющее условиям леммы 1.

Пусть $\psi\in\Psi\setminus 0$ таково, что определена отвечающая форме $\psi G_t''$ якобиева кривая $\Lambda_\tau\in L(E_{\Pi,\psi})$, $\tau\in[0,t]$ (наиболее общие условия существования якобиевой кривой на всем отрезке $[0,t]$ приведены в предложении 3.3). Положим $\Lambda_\tau(\psi)=S_\psi\Lambda_\tau\subset\Pi\oplus\Pi^*$, $\tau\in[0,t]$. Тогда $\Lambda_\tau(\psi)$ — неубывающая кривая в $L(\Pi\oplus\Pi^*)$, $\Lambda_0(\psi)=\Pi^*\in L(\Pi\oplus\Pi^*)$. Результаты § 3 позволяют вычислить $\mathrm{ind}\,\psi G_t''$ в терминах кривой $\Lambda_\tau(\psi)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$.

2. Проведенное в [1] исследование квадратичных отображений на $\mathbf{R}^{N+1}$ опиралось на объекты, связанные с пространством квадратичных форм, а именно, индекс формы и классы γ_n. Теперь уже видно, что при исследовании интегрального квадратичного отображения G_t'' роль, аналогичную пространству квадратичных форм, играет совокупность всех неубывающих кривых на $L(\Pi\oplus\Pi^*)$, начинающихся в Π^*. В настоящем пункте дается определение индекса для этих кривых и вводятся аналоги классов γ_n. Собственно, определение индекса подсказано результатами § 3.

Определение. Пусть Λ_τ, $0\leqslant\tau\leqslant t$, — неубывающая кусочно гладкая кривая в $\Pi\oplus\Pi^*$; $\Lambda_0=\Pi^*$, и $\tau_{l+1}=0=\tau_0<\ldots<\tau_l=t$ — такое разбиение отрезка $[0,t]$, что кривые $\Lambda.|_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}$, $i=0,1,\ldots,l-1$, — простые. Положим

$$\mathrm{ind}\,\Lambda.=\sum_{i=0}^{l}\mathrm{ind}_{\Lambda_0}(\Lambda_{\tau_i},\Lambda_{\tau_{i+1}})+\dim\Big(\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Lambda_\tau\Big)-m.$$

Величина $\mathrm{ind}\,\Lambda.$ является целым неотрицательным числом и, согласно результатам § 3, не зависит от выбора разбиения отрезка $[0,t]$. Более того, если в каждой точке разрыва $\bar\tau$ кривой $\Lambda.$ вставить простую неубывающую кривую, соединяющую $\Lambda_{\bar\tau}$ с $\Lambda_{\bar\tau+0}$ и, кроме того, соединить простой неубывающей кривой Λ_t с Λ_0, то для полученной в результате неубывающей непрерывной замкнутой кривой $\bar{\Lambda}_\cdot$ справедливо тождество

$$\operatorname{ind}\Lambda_\cdot = \operatorname{ind}\bar{\Lambda}_\cdot = \operatorname{Ind}\Lambda_\cdot + \dim\Big(\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Lambda_\tau\Big) - m. \tag{3}$$

Напомним, что Ind обозначает индекс Маслова замкнутой кривой. Тождество (3) следует из предложения 3.2 (см. также теорему 3.3).

В дальнейшем будем предполагать, что в пространстве $\Pi\oplus\oplus\Pi^*$ фиксирована некоторая комплексная структура и эрмитова форма $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ так, что $\sigma(x_1\oplus\xi_1,\ x_2\oplus\xi_2) = \operatorname{Im}\langle x_1\oplus\xi_1,\ x_2\oplus\xi_2\rangle$. В приложении к § 3 описано отождествление касательного пространства $T_\Lambda L(\Pi\oplus\Pi^*)$ с пространством $\mathscr{P}(\Lambda)$ квадратичных (=симметричных билинейных) форм на Λ, ниже это отождествление используется без специальных оговорок. Каждой форме $q\in\mathscr{P}(\Lambda) = T_\Lambda L(\Pi\oplus\Pi^*)$ соответствует симметричный линейный оператор $s(q)\colon \Lambda\to\Lambda$, где $q(\lambda_1,\ \lambda_2) = \operatorname{Re}\langle s(q)\lambda_1,\ \lambda_2\rangle$ $\forall\lambda_1,\ \lambda_2\in\Lambda$. Зададим риманову структуру на $L(\Pi\oplus\Pi^*)$, определив скалярное произведение пары касательных векторов $q_1,\ q_2\in\in T_\Lambda L(\Pi\oplus\Pi^*)$ формулой $(q_1, q_2)\mapsto\operatorname{tr}(s(q_1)s(q_2))$. Длину произвольной кусочно гладкой кривой $\Lambda_\tau\in L(\Pi\oplus\Pi^*)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$, обозначим символом $\rho(\Lambda_\cdot)$,

$$\rho(\Lambda_\cdot) = \int_0^t \sqrt{\operatorname{tr}\left(s\left(\frac{d\Lambda}{d\tau}\right)^2\right)}\,d\tau$$

Предложение 2. Пусть Λ_τ, $0\leqslant\tau\leqslant t$, — неубывающая кусочно гладкая кривая в $\Pi\oplus\Pi^*$, $\Lambda_0 = \Pi^*$, имеющая не более N точек разрыва. Положим $\nu = m - \dim\Big(\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Lambda_\tau\Big)$. Тогда

$$\frac{2}{\pi}\rho(\Lambda_\cdot) - \nu \leqslant (\operatorname{ind}\Lambda_\cdot) \leqslant \frac{2}{\pi}\sqrt{\nu}\,\rho(\Lambda_\cdot) + \nu N.$$

Доказательство. Поскольку Λ_τ — неубывающая кривая, то ее скорость $\dot{\Lambda}_\tau\in T_\Lambda L(\Pi\oplus\Pi^*)$ — неотрицательная квадратичная форма, а $s(\dot{\Lambda}_\tau)$ — неотрицательный симметричный оператор, причем $\operatorname{rank} s(\dot{\Lambda}_\tau)\leqslant\nu$. Поэтому $\operatorname{tr}(s(\dot{\Lambda}_\tau)^2)\leqslant(\operatorname{tr} s(\dot{\Lambda}_\tau))^2\leqslant\leqslant\nu\operatorname{tr}(s(\dot{\Lambda}_\tau))^2$. Если $\Lambda_\cdot$ — непрерывная замкнутая кривая, то доказываемые неравенства следуют из предложения П8 приложения к § 3 и равенства (3). В общем случае нужно еще воспользоваться тем фактом, что любая пара лагранжевых плоскостей Δ_1, Δ_2 лежит на некоторой неубывающий непрерывной замкнутой кривой Δ_θ, $\theta\in S^1$, удовлетворяющий условию $\operatorname{Ind}\Delta_\theta = = m - \dim(\Delta_1\cap\Delta_2)$. Устанавливается этот факт совсем просто: то, что хоть какая-то пара лагранжевых плоскостей лежит на такой кривой, очевидно, в то же время симплектическая группа транзитивно действует на парах лагранжевых плоскостей с фиксированной размерностью пересечения.

Обозначим через $\mathfrak{L}[0,t]$ пространство всех кусочно гладких монотонных кривых $\Lambda_\tau \in L(\Pi \oplus \Pi^*)$, $\Lambda_0 = \Pi^*$, непрерывных на полуинтервале $(0,t]$ с топологией равномерной сходимости на каждом отрезке $[\varepsilon, t]$, где $0 < \varepsilon \leqslant t$. Разрыв в нулевой момент времени допускается, т. е. возможно $\Pi^* = \Lambda_0 \neq \neq \Lambda_{+0}$.

Через $\mathfrak{L}^s[0,t]$ обозначим подмножество в $\mathfrak{L}[0,t]$, состоящее из всех таких кривых $\Lambda_. \in \mathfrak{L}[0,t]$, для каждой из которых найдется разбиение $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{l+1} = t$ отрезка $[0,t]$ со следующими свойствами: а) кривые $\Lambda_.|_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}$ — простые для $i = 0, \ldots, l+1$; б) $\Lambda_{\tau_i} \cup \Pi^* = 0$, $i = 1, \ldots, l$, $\Lambda_\theta \cup \Pi^* = 0$ на некотором интервале $\tau < \theta < t$.

Замечание. Подмножество $\mathfrak{L}[0,t] \setminus \mathfrak{L}^s[0,t]$ имеет бесконечную коразмерность в $\mathfrak{L}[0,t]$, т. е. для произвольного конечномерного многообразия U и пространства $C(U, \mathfrak{L}[0,t])$ всех непрерывных отображений из U в $\mathfrak{L}[0,t]$ подпространство $C(U, \mathfrak{L}^s[0,t])$ является всюду плотным подмножеством, $\overline{C(U, \mathfrak{L}^s[0,t])} = C(U, \mathfrak{L}[0,t])$.

Разбиения отрезка $[0,t]$, удовлетворяющие условиям а), б), будем называть согласованными с данной кривой Λ.

Пусть $\Lambda_. \in \mathfrak{L}^s[0,t]$ и $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{l+1} = t$ — разбиение, согласованное с этой кривой. Обозначим $D_i = [\tau_i, \tau_{i+1}]$, $D = \{\tau_1, \ldots, \tau_l\}$, и положим

$$K_{D_i}(\Lambda) = \sum_{\tau_i < \tau < \tau_{i+1}} (\Pi^* \cap \Lambda_\tau) \subset \Pi^*, \quad i = 1, \ldots, l,$$

$$K_D(\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^{l} K_{D_i}(\Lambda).$$

Пусть, наконец, $\mathfrak{L}^s(D)$ — подмножество в $\mathfrak{L}^s[0,t]$, состоящее из всех кривых, с которыми согласовано данное разбиение D. Легко видеть, что $\mathfrak{L}^s(D)$ — открытое подмножество в $\mathfrak{L}^s[0,t]$.

Множества уровня целочисленной функции ind определяют некоторое разбиение пространства $\mathfrak{L}^s[0,t]$: положим $\mathfrak{L}^s_n[0,t] = \{\Lambda_. \in \mathfrak{L}^s[0,t] \mid \operatorname{ind} \Lambda_. = n\}$. Соответственно,

$$\mathfrak{L}^s_n(D) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{L}^s_n[0,t] \cap \mathfrak{L}^s(D).$$

Лемма 2. Пусть $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Тогда

а) $\dim K_{D_i}(\Lambda) = \operatorname{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}}) - \frac{1}{2} \dim(\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi^*)$ *),

b) подпространства $K_{D_i}(\Lambda_.)$ непрерывно зависят от $\Lambda \in \mathfrak{L}^s_n(D)$,

c) если некоторое подразбиение $\tau_i = \tau_{i0} < \tau_{i1} < \ldots < \tau_{i(l_i+1)} =$

*) Подпространство $\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi^*$ может быть отличным от нуля только при $i = l$.

$=\tau_{i+1}$ отрезка D_i таково, что $\Pi^* \cap \Lambda_{\tau_{ij}}=0$ при $j=0, 1, \ldots, l_i$, то $K_{D_i}=\bigoplus_{j=0}^{l_i} K_{D_{ij}}$, где $D_{ij}=[\tau_{ij}, \tau_{i(j+1)}]$.

Доказательство. а) Пусть T — такая лагранжева плоскость, что $T \cap \Pi^*=T \cap \Lambda_\tau=0$ при $\tau_i \leqslant \tau \leqslant \tau_{i+1}$. При доказательстве предложения 3.2 было установлено, что

$$2\,\mathrm{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}})=\mu(\Lambda_{\tau_{i+1}}, \Pi^*, T)-\mu(\Lambda_{\tau_i}, \Pi^*, T),$$

где $\mu(\cdot, \cdot, \cdot)$ — индекс Маслова тройки лагранжевых плоскостей. Пусть $p_\tau: \Pi \oplus \Pi^* \to \Lambda_\tau$ — проектор пространства $\Pi \oplus \Pi^*$ на Λ_τ параллельно T (т. е. $\ker p_\tau = T$). Тогда $\mu(\Lambda_\tau, \Pi^*, T)$ совпадает с сигнатурой квадратичной формы $\xi \mapsto \sigma(p_\tau \xi, \xi)$, $\xi \in \Pi^*$. Ядро этой квадратичной формы совпадает с $\Pi^* \cap \Lambda_\tau$. В то же время для всякого $\xi \in \Lambda_\tau \cap \Pi^*$ имеем $\frac{d}{d\tau}\sigma(p_\tau \xi, \xi) \geqslant 0$, поскольку Λ_τ — неубывающая кривая. Следовательно,

$$K_{D_i}(\Lambda)=\mathrm{span}\{\xi \in \Pi^* \mid \sigma(p_{\tau_i}\xi, \xi)<0,\ \sigma(p_{\tau_{i+1}}\xi, \xi)>0\}$$

и

$$\dim K_{D_i}(\Lambda)=\frac{1}{2}(\mu(\Lambda_{\tau_{i+1}}, \Pi^*, T)-\mu(\Lambda_{\tau_i}, \Pi^*, T)-\dim(\Lambda_{\tau_{i+1}} \cap \Pi^*))$$

(напомним, что заведомо $\Lambda_{\tau_i} \cap \Pi^*=0$).

в) Из а) следует, что $\dim K_{D_i}(\Lambda)$ локально постоянно в $\mathfrak{L}_s^n(D)$. Поскольку $K_{D_i}(\Lambda)$, очевидно, полунепрерывно сверху зависит от Λ, то из локального постоянства размерности вытекает непрерывная зависимость.

с) По определению, $K_{D_i}(\Lambda)=\sum_{j=0}^{l_i} K_{D_{ij}}(\Lambda)$, с другой стороны, из предложения 3.2 следует, что

$$\mathrm{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}})=\sum_{j=0}^{l} \mathrm{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_{ij}}, \Lambda_{\tau_{ij+1}})$$

и, согласно утверждению а), $\dim K_{D_i}(\Lambda)=\sum_{j=0}^{l_i} \dim K_{D_{ij}}(\Lambda)$. Следовательно, сумма $\sum_{j=0}^{l_i} K_{D_{ij}}$ — прямая. ■

Пусть $\Lambda \in \mathfrak{L}^s(D)$, положим $K_D(\Lambda)=\bigoplus_{i=1}^{l} K_{D_i}(\Lambda)$, согласно утверждению а) леммы 2 $\dim K_D(\Lambda)=\sum_{i=1}^{p} \mathrm{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_{\tau_i}, \Lambda_{\tau_{i+1}})$. Далее, т. к. $\Lambda_{\tau_1} \cap \Pi^*=0$, то $\mathrm{ind}_{\Pi^*}(\Pi^*, \Lambda_{\tau_1})=\frac{1}{2}m$, $\bigcap_{0<\tau<t} \Lambda_\tau=0$;

$\operatorname{ind}_{\Pi^*}(\Lambda_t, \Pi^*) = \frac{1}{2}(m - \dim(\Lambda_t \cap \Pi^*))$. Следовательно, $\dim K_D(\Lambda) = \operatorname{ind}\Lambda$.

Из утверждения в) леммы 2 вытекает, что семейство линейных пространств $K_D(\Lambda_\cdot)$, $\Lambda_\cdot \in \mathfrak{L}_n^s(D)$, образует n-мерное векторное расслоение над $\mathfrak{L}_n^s(D)$, которое мы обозначим $\mathcal{K}_n(D)$. В то же время, множества $\mathfrak{L}_n^s(D)$ при переменном D образуют открытое покрытие пространства $\mathfrak{L}_n^s[0, t]$. Для произвольных $D'_l = \{\tau'_1, \ldots, \tau'_{l'}\}$ и $D''_l = \{\tau''_1, \ldots, \tau''_{l''}\}$ имеем

$$\mathfrak{L}_n^s(D') \cap \mathfrak{L}_n^s(D''), \quad \mathfrak{L}_n^s(D' \cup D'').$$

Пусть $D'_i = [\tau'_i, \tau'_{i+1}]$, $D''_i = [\tau''_i, \tau''_{i+1}]$, а D_j — j-й отрезок разбиения $D' \cup D''$. В таком случае каждый отрезок D_j содержится в некотором отрезке $D'_{\alpha j}$ и в некотором отрезке $D''_{\beta j}$. Из утверждения с) леммы 2 следует, что вложения

$$K_{D_j}(\Lambda_\cdot) \subset K_{D'_{\alpha_j}}(\Lambda_\cdot), \quad K_{D_j}(\Lambda_\cdot) \subset K_{D''_{\beta_j}}(\Lambda_\cdot)$$

определяют канонические изоморфизмы

$$K_D(\Lambda_\cdot) \approx K_{D'}(\Lambda_\cdot), \quad K_D(\Lambda_\cdot) \approx K_{D''}(\Lambda_\cdot), \quad \forall \Lambda_\cdot \in \mathfrak{L}_n^s(D') \cap \mathfrak{L}_n^s(D'').$$

В результате, расслоения $\mathcal{K}_n(D)$ при всевозможных D оказываются склеенными в единое векторное расслоение $\mathcal{K}_n$ над $\mathfrak{L}_n^s[0, t]$.

Пусть $\varkappa_n \in \check{H}^1(\mathfrak{L}_n^s[0, t])$ — одномерный класс Штифеля — Уитни расслоения $\mathcal{K}_n$, т. е. $\varkappa_n = w_1(\mathcal{K}_n)$.

3. Возвратимся к исследованию квадратичного отображения G''_t. В пункте 1 был определен конус $\Psi \subset \Pi^\perp$. Обозначим через Ψ^s подмножество в Ψ, состоящее из всех ψ, для которых определена якобиева кривая $\Lambda_\cdot(\psi) \in \mathfrak{L}^s[0, t]$. Кроме того, положим

$$\Psi_n = \{\psi \in \Psi \setminus 0 \mid \operatorname{ind} \psi G''_t = n\}, \quad \Psi_n^s = \{\psi \in \Psi^s \mid \operatorname{ind} \Lambda_\cdot(\psi) = n\}.$$

Из теоремы 3.1 следует, что

$$\operatorname{ind} \psi G''_t = \operatorname{ind} \Lambda_\cdot(\psi), \quad \forall \psi \in \Psi^s,$$

поэтому $\Psi_n^s \subset \Psi$.

Квадратичное отображение G''_t определено на подпространстве $\ker G'_t$ банахова пространства $L_\infty^r[0, t]$. В то же время, $L_\infty^r[0, t]$ является всюду плотным линейным подпространством гильбертова пространства $L_2^r[0, t]$. Легко видеть, что G''_t непрерывно в топологии пространства $L_2^r[0, t]$ — это прямо следует из формулы (3.1). Обозначим через $\overline{\ker G'_t}$ замыкание пространства $\ker G'_t$

в $L_2^r[0, t]$,

$$\overline{\ker}\, G_t' = \left\{ v(\cdot) \in L_2^r[0, t] \mid \mu_0 \circ \int_0^t Z_\tau v(\tau)\, d\tau = 0 \right\},$$

а через $\mathfrak{g}_t$ — продолжение отображения G_t'' на $\overline{\ker}\, G_t'$ по непрерывности. Отображение $\mathfrak{g}_t$, как и G_t'', определяется формулой (3.1):

$$\mathfrak{g}_t(v(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^t \left(h_\tau(v(\tau), \dot{v}(\tau)) + \left[\int_0^\tau \mathfrak{z}_\theta v(\theta)\, d\theta,\ \mathfrak{z}_\tau v(\tau) \right] \right) d\tau,$$

$$v(\cdot) \in \overline{\ker}\, G_t'.$$

Ясно, что $\operatorname{ind} \psi\mathfrak{g} = \operatorname{ind} \psi G_t''$ $\forall \psi \in \Pi^\perp$.

Итак, $\mathfrak{g}_t$ представляет собой квадратичное отображение бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства $\overline{\ker}\, G_t'$ в k-мерное пространство $\operatorname{coker} G_t' = T_{\mu_0} M/\Pi$. Таким отображениям посвящен пункт 7 в [1], § 2. Каждому $\psi \in \Psi_n$ отвечает n-мерное векторное пространство $L_\psi \subset \overline{\ker}\, G_t'$, такое n-мерное инвариантное подпространство самосопряженного оператора, определяемого квадратичной формой $\psi\mathfrak{g}$, что $\psi G_t''|_{L_\psi} < 0$. Семейство пространств L_ψ, $\psi \in \Psi_n$, образует векторное расслоение $\mathscr{L}_n$ над Ψ_n. Через $\pi_n \in \check{H}^1(\Psi_n)$ обозначается одномерный класс Штифеля — Уитни расслоения $\mathscr{L}_n$, т. е. $\pi_n = w_1(\mathscr{L}_n)$.

Обозначим через $J: \Psi^s \to \mathfrak{L}^s[0, t]$ отображение $\psi \mapsto \Lambda_\cdot(\psi)$ $\psi \in \Psi^s$, а через $J_n: \Psi_n^s \to \mathfrak{L}_n^s[0, t]$ сужение отображения J на Ψ_n^s, т. е. $J_n = J \mid \Psi_n^s$.

Предложение 3. Отображение J_n непрерывно J на Ψ_n^s для всякого $n \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \Psi_n^s$, в соответствии с определениями из § 3 якобиева кривая $\Lambda_\tau(\psi)$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, является интегральной кривой некоторого нестационарного векторного поля на $L(\Pi \oplus \Pi^*)$. Напомним определение этого поля, при этом для простоты ограничимся случаем задачи с одним управляющим параметром ($r = 1$). В пункте 1 § 3 введены кусочно гладкая функция ψh_τ и кусочно гладкая кривая $z_\tau(\psi) \in E_{\Pi,\psi}$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Поскольку на протяжении настоящего параграфа фиксирован изоморфизм $S_\psi: E_{\Pi,\psi} \to \Pi \oplus \Pi^*$, мы будем отождествлять кривую $z_\tau(\psi)$ с образом этой кривой при отображении S_ψ.

Каждому $\tau \in (0, t)$ сопоставляется целое число $k_\tau(\psi) \geqslant 0$ и вещественное число $\gamma_\tau(\psi)$: если $\psi h_\tau \neq 0$, то $k_\tau(\psi) = 0$, $\gamma_\tau(\psi) = = \psi h_\tau$; в противном случае, $k_\tau(\psi)$ — минимальное среди чисел k, удовлетворяющих условию

$$\sigma(z_\tau^{(k)}(\psi), z_\tau^{(k-1)}(\psi)) \neq 0, \quad \gamma_\tau(\psi) = \sigma(z_\tau^{(k_\tau(\psi))}(\psi), z_\tau^{(k_\tau(\psi)-1)}(\psi)).$$

Из условия $\psi \in \Psi^s$ (гарантирующего отсутствие особенностей у уравнения Якоби) следует, что $k_\tau \leqslant m$ и $k_\tau(\psi)$ локально постоянно в любой точке гладкости функции ψh_τ и кривой $z_\tau(\psi)$, $0<\tau\leqslant t$; $\gamma_\tau \geqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$ и всех $\tau \in (0, t]$. Положим $\Gamma_\tau(\psi) = \operatorname{span}\{z_\tau^{(i)}(\psi) \mid 0 \leqslant i \leqslant k(\psi)-1\}$ — k_τ-мерное изотропное подпространство в $\Pi \oplus \Pi^*$, кусочно гладко зависящее от τ. Пусть $\Lambda \in L(\Pi \oplus \Pi^*)$, как и в § 3 (см., в особенности, приложение к этому параграфу), квадратичная форма $\lambda \mapsto \sigma(z_\tau^{(i)}(\psi), \lambda)^2$, $\lambda \in \Lambda$, а также отвечающий этой форме элемент пространства $T_\Lambda L(\Pi\oplus\Pi^*)$, обозначаются символом $\sigma(z_\tau^{(i)}(\psi), \Lambda)^2$. Якобиева кривая $\Lambda_\tau(\psi)$ является непрерывным на $(0, t]$ решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{d\tau}\Lambda = \frac{1}{2\gamma_\tau(\psi)}\sigma(z_\tau^{(k_\tau(\psi))}(\psi), \Lambda)^2$$

с начальным условием $\Lambda_{+0}(\psi) = \Pi^{*\Gamma_{+0}(\psi)}$.

Легко видеть, что $k_\tau(\psi)$ полунепрерывно сверху зависит от ψ. Если ψ таково, что $k_\tau(\psi') = k_\tau(\psi)$ для всех $\tau \in [0, t]$ и $\psi' \in \Psi^s$, достаточно близких к ψ, то непрерывность отображения J в точке ψ есть следствие стандартной теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. Если же для некоторой последовательности $\psi_i \in \Psi^s$, $i=1, 2, \ldots, \psi_i \to \psi$ $(i\to\infty)$ выполняется неравенство $k_\tau(\psi_i) < k_\tau(\psi)$, то $\gamma_\tau(\psi_i) \to 0$ $(i\to\infty)$, и вопрос о непрерывной зависимости решений от параметра становится далеко не тривиальным. Более того, отображение J может оказаться разрывным в точке ψ, непрерывны лишь отображения $J_n = J|\Psi_n^s$

Итак, пусть $\psi \in \Psi_n^s$, $\psi_i \to \psi (i\to\infty)$ и $k_\tau(\psi_i) < k_\tau(\psi)$ для некоторого $\tau \in (0, t]$. Из определения векторов $z_\tau(\psi)$ вытекает существование такого разбиения $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{N+1}=t$ отрезка $[0, t]$, что все целочисленные функции $\tau \mapsto k_\tau(\psi_i)$, $i=1, 2, \ldots$, локально постоянны на множестве $(0, t] \setminus \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$. Поскольку все рассмотрения вполне можно проводить отдельно на каждом отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j=0, 1, \ldots, N$, то, не ограничивая общности (но упрощая обозначения), можем считать, что $k_\tau(\psi_i)$ и $k_\tau(\psi)$ не зависят от τ, т. е. $k_\tau(\psi_i) = k(\psi_i)$, $0<\tau\leqslant t$, $i=1, 2, \ldots, k_\tau(\psi) = k(\psi)$. Более того, переходя, если надо, к подпоследовательности, можно добиться того, чтобы $K_\tau(\psi_i)$ не зависели также и от i, $k_\tau(\psi_i) = k$ при $i=1, 2, \ldots$.

Таким образом, мы приходим к следующей ситуации. Имеется такая последовательность ψ_i, $i=1, 2, \ldots, \psi_i \to \psi (i\to\infty)$, что

$$\frac{d}{d\tau}\Lambda_\tau(\psi_l) = \frac{1}{2\gamma_\tau(\psi_l)}\sigma\left(z_\tau^{(k)}(\psi_l), \Lambda\right)^2, \quad \Lambda_{+0}(\psi_l) = \Pi^{*\Gamma_{+0}(\psi_l)}, \tag{4}$$

$$\tau \in (0, t]; \quad \operatorname{ind}\Lambda.(\psi_l) = n; \quad k < k(\psi).$$

Требуется доказать, что $\Lambda_\tau(\psi_i)\to\Lambda_\tau(\psi)$ $(i\to\infty)$ равномерно на каждом отрезке $\tau\in[\bar\tau, t]$, $0<\bar\tau\leqslant t$. Из предложения 2 вытекает, что длины кривых $\Lambda_\tau(\psi)$, $\tau\in[0,t]$, ограничены равномерно по i. Сделаем замену параметра на кривых $\Lambda_\tau(\psi_i)$ параметризовав эти кривые длиной дуги: пусть функции $\theta\mapsto\tau_i(\theta)$, $\tau_i(0)=0$, таковы, что скорость кривой $\theta\mapsto\Lambda_{\tau(\theta)}(\psi_i)$ имеет для любого θ единичную длину, $i=1, 2, \ldots$.

Для целых α, $k\leqslant\alpha$, $\tau\in(0,t]$, положим

$$L_\tau^{(\alpha)}=\{\Lambda\in L(\Pi\oplus\Pi^*)\mid z_\tau^{(j)}(\psi)\in\Lambda,\ k\leqslant j<\alpha\}$$

— гладкое подмногообразие в $L(\Pi\oplus\Pi^*)$, диффеоморфное $L(\mathrm{R}^{2(m+k-\alpha)})$ при $k\leqslant\alpha\leqslant k(\psi)$,

$$\varnothing=L_\tau^{(k(\psi)+1)}\subset L_\tau^{(k(\psi))}\subset\ldots\subset L_\tau^{(k)}=L(\Pi\oplus\Pi^*).$$

Рассмотрим нестационарное векторное поле $\sigma(z_\tau^{(k)}(\psi),\Lambda)^2$, $\tau\in(0,t]$, $\Lambda\in L(\Pi\oplus\Pi^*)$. Для $\Lambda\in L_\tau^{(\alpha)}\setminus L^{(\alpha+1)}$ имеем

$$\frac{\partial^j}{\partial\tau^j}\sigma\left(z_\tau^{(k)}(\psi),\Lambda\right)^2=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{при } j<2(\alpha-k)\\ 2^{\alpha-k}\sigma\left(z_\tau^{(\alpha)}(\psi),\Lambda\right)^2\neq0 & \text{при } j=2(\alpha-k),\ k\leqslant\alpha.\end{cases}\qquad(5)$$

Поскольку $z_\tau^{(j)}(\psi_i)$ равномерно сходится к $z_\tau^{(j)}(\psi)$ при $i\to\infty$ для любого $j\geqslant0$, а функции $\gamma_\tau(\psi_i)$ ограничены равномерно по τ, i (в действительности, $\gamma_\tau(\psi_i)\to0$ при $i\to\infty$), то из (4), (5) следует равномерная гёльдеровость функций $\tau_i(\theta)$,

$$|\tau_i(\theta_1)-\tau_i(\theta_2)|\leqslant c\,|\theta_1-\theta_2|^{\frac{1}{(2(k(\psi)-k)+1)}},$$

где c не зависит ни от i, ни от θ_1, θ_2.

Таким образом, последовательности кривых $\theta\mapsto\Lambda_{\tau_i(\theta)}(\psi_i)$ и скалярных функций $\theta\mapsto\tau_i(\theta)$ содержат равномерно сходящиеся подпоследовательности. Не ограничивая общности, можно считать, что сами последовательности $\Lambda_{\tau_i(\theta)}(\psi_i)$ и $\tau_i(\psi)$ равномерно сходятся к некоторой кривой Λ_θ и скалярной функции $\tau(\theta)$, $0<\theta\leqslant\hat\theta$, $\tau(\hat\theta)=t$. Поскольку $\Lambda_{\tau_i(\theta)}(\psi_i)$, $\tau_i(\theta)$ — неубывающие кривая и функция, то же верно и для $\hat\Lambda_\theta$, $\tau(\theta)$; кроме того, $\operatorname{ind}\hat\Lambda_\cdot\leqslant n$. Мы покажем, что $\Lambda_{\tau(\theta)}(\psi)=\Lambda_\theta$, $0<\theta\leqslant\hat\theta$, причем существует такое $\theta_0\geqslant0$, что функция $\tau(\theta)$ непрерывно и взаимно однозначно отображает полуинтервал $[\theta_0,\hat\theta]$ на $(0,t]$.

Во-первых, из (4) и (5) можно вывести следующий факт: если на некотором интервале $(\theta_1,\theta_2)\subset(0,\hat\theta)$ выполняется соотношение $\hat\Lambda_\theta\in L_{\tau(\theta)}^{(\alpha)}\setminus L_{\tau(\theta)}^{(\alpha+1)}$, $\theta_1<\theta<\theta_2$, то $\frac{d\hat\Lambda}{d\theta}$ положительно пропорционально $\sigma\left(z^{(\alpha)}_{\tau(\theta)}(\psi), \hat{\Lambda}_\theta\right)^2$, т. е.

$$\frac{d\hat{\Lambda}_\theta}{d\theta}=u(\theta)\,\sigma\left(z^{(\alpha)}_{\tau(\theta)}(\psi), \hat{\Lambda}_\theta\right)^2,\quad u(\theta)>0,\quad \theta_1<\theta<\theta_2.$$

Соотношение $\hat{\Lambda}_\theta \in L^{(\alpha)}_{\tau(\theta)}$ эквивалентно равенству

$$\sigma\left(z^{(\alpha-1)}_{\tau(\theta)}(\psi), \lambda_\theta\right)=0,\quad \forall\lambda_\theta\in\hat{\Lambda}_\theta,\quad \theta_1<\theta<\theta_2;$$

дифференцирование этого равенства по θ (в тех точках, где производная существует) приводит к тождеству

$$\sigma\left(z^{(\alpha)}_{\tau(\theta)}(\psi), \lambda_0\right)\left(\frac{dt}{d\theta}+2u(\theta)\,\sigma\left(z^{(\alpha-1)}_{\tau(\theta)}(\psi), z^{(\alpha)}_{\tau(\theta)}(\psi)\right)\right)=0,$$

$$\lambda_\theta\in\hat{\Lambda}_\theta,\quad \theta\in(\theta_1, \theta_2),$$

а разностный аналог этого тождества (справедливый уже во всех точках) устанавливает абсолютную непрерывность функции $\tau(\theta)$ на (θ_1, θ_2). Таким образом, $\frac{d\tau}{d\theta}=0$ при $\alpha<k(\psi)$ и $\frac{dt}{d\theta}=u(\theta)\,\gamma_{\tau(\theta)}(\psi)>0$ при $\alpha=k(\psi)$.

Мы видим, что на любом интервале, удовлетворяющем условию $\hat{\Lambda}_\theta\in L^{k(\psi)}_{\tau(\theta)}$, $\theta_1<\theta<\theta_2$, функция $\tau(\theta)$ обратима и кривая $\hat{\Lambda}$ подчиняется уравнению

$$\frac{d\hat{\Lambda}}{d\tau}=\frac{1}{2\gamma_\tau(\psi)}\,\sigma\left(z_\tau^{(k(\psi))}, \hat{\Lambda}\right)^2,\quad \tau(\theta_1)<\tau<\tau(\theta_2),$$

— тому же уравнению, что и кривая $\Lambda_\tau(\psi)$.

Поэтому

$$\hat{\Lambda}_0\in L^{(k(\psi))}_{\tau(\theta)}\ (\theta_1<\theta<\theta_2)\ \&\ \Lambda_{\theta_1+0}=\Lambda_{\tau(\theta_1)}\Rightarrow\hat{\Lambda}_\theta=\Lambda_{\tau(\theta)}(\psi)\ (\theta_1<\theta\leqslant\theta_2).\quad (6)$$

В то же время на интервале $\theta\in(\theta_1, \theta_2)$, удовлетворяющем условию $\hat{\Lambda}_\theta\in L^{(\alpha)}_{\tau(\theta)}\setminus L^{(\alpha+1)}_{\tau(\theta)}$ с $\alpha<k(\psi)$, функция $\tau(\theta)$ постоянна, $\tau(\theta)\equiv\tau(\theta_1)$, а кривая $\hat{\Lambda}$ подчиняется «почти автономному» уравнению

$$\frac{d\hat{\Lambda}}{d\theta}=u(\theta)\,\sigma\left(z^{(\alpha)}_{\tau(\theta_1)}, \hat{\Lambda}\right)^2,\quad u(\theta)>0,\quad \theta_1<\theta<\theta_2.\qquad (7)$$

Пусть $\Delta^\alpha_{\theta_1}=\hat{\Lambda}_{\theta_1+0}\cap\{z^{(\alpha)}_{\tau(\theta_1)}\}^\angle$ — $(m-1)$-мерное изотропное подпространство в $L(\Pi\oplus\Pi^*)$. Уравнение (7) оставляет инвариантным подмногообразие

$$L\left(\Delta^{\alpha\angle}_{\theta_1}/\Delta^\alpha_{\theta_1}\right)\approx L(\mathbf{R}^2)=S^1.$$

Заметим, что

$$L\left(\Delta^{\alpha\angle}_{\theta_1}/\Delta^\alpha_{\theta_1}\right)\cap L^{(\alpha+1)}_{\tau(\theta_1)}=\Delta^\alpha_{\theta_1}+\operatorname{span}\{z^{(\alpha)}_{\tau(\theta_1)}\}=\hat{\Lambda}^{\operatorname{span}\{z^{(\alpha)}_{\tau(\theta_1)}\}}_{\theta_1+0}$$

— единственная неподвижная точка уравнения (7) на $L(\Delta^\angle/\Delta)$.

Доказываемое предложение теперь вытекает из (6) и следующего утверждения.

Лемма 3. Пусть $\alpha(\theta)=\max\{\alpha \mid \hat{\Lambda}_\theta \in L^{(\alpha)}_{\tau(\theta)}\}$, $0<\theta\leqslant\hat{\theta}$. Целочисленная функция $\alpha(\theta)$ не убывает с ростом θ, $0<\theta<\hat{\theta}$.

Доказательство. Пусть $\theta_1 \in (0,\hat{\theta})$, $\tau(\theta_1)<t$. Предположим, что $\underline{\alpha}=\lim\limits_{\theta\to\theta_1+0}\alpha(\theta)<\alpha(\theta_1)$. Тогда существует такое $\theta_2>\theta_1$, удовлетворяющее условиям $\tau(\theta_2)=\tau(\theta_1)$, $\hat{\Lambda}_{\theta_2}=\hat{\Lambda}_{\theta_1}$, что неубывающая кривая $\hat{\Lambda}\mid_{[\theta_1,\theta_2]}$ содержит всю окружность $L(\Delta^{\underline{\alpha}}_{\bar{\theta}_1+0}/\Delta^{\alpha}_{\bar{\theta}_1+0})$, где $\Delta^{\alpha}_{\bar{\theta}_1+0}=\lim\limits_{\theta\to\theta_1+0}\Delta^{\alpha}_{\bar{\theta}}$. В самом деле, попав на эту окружность с «положительной стороны» от неподвижной точки уравнения $\frac{d\hat{\Lambda}}{d\theta}=u(\theta)\,\sigma(z^{(\alpha)}_{\tau(\theta_1)},\hat{\Lambda})^2$, мы не можем вернуться в $L^{\alpha(\theta_1)}_{\tau}$, не пройдя ее всю (вернуться можно только по этой окружности и только с отрицательной стороны); в то же время, пока мы не вернемся, $\tau(\theta)$ не вырастет.

Из приведенного рассуждения и (6) следует, что кривая $\hat{\Lambda}_\theta$, $\theta\in(0,\hat{\theta})$, содержит всю кривую $\Lambda_\tau(\psi)$, $0<\tau\leqslant t$, да еще окружность $L(\Delta^{\underline{\alpha}}_{\bar{\theta}_1+0}/\Delta^{\alpha}_{\bar{\theta}_1+0})$ (ориентации однозначно определяются тем, что все кривые должны быть неубывающими). Остается заметить, что $\operatorname{Ind} L(\Delta^{\underline{\alpha}}_{\bar{\theta}_1+0}/\Delta^{\alpha}_{\bar{\theta}_1+0})=1>0$, поэтому $n\geqslant\operatorname{ind}\hat{\Lambda}.\geqslant\operatorname{ind}\Lambda.(\psi)+1=n+1$. Противоречие. Мы не рассмотрели еще случай $\tau(\theta_1)=t$, но этот случай сводится к уже рассмотренному, если с самого начала подходящим образом продолжить $z_\tau(\psi_i)$ и $z_\tau(\psi)$ на некоторый интервал временной оси, содержащий $(0,t]$. ■

Теорема 1. Для любого $n\geqslant 0$ имеет место изоморфизм векторных расслоений: $\mathscr{L}_n\mid\Psi^s_n\approx J^*_n\mathscr{K}_n$. В частности, $\pi_n\mid\Psi^s_n=J^*_n\varkappa_n$.

Доказательство. Пусть $\psi\in\Psi^s_n$ и $\Lambda_\tau(\psi)$, $0\leqslant\tau\leqslant t$,—соответствующая якобиева кривая. Чтобы не слишком загромождать изложение, мы снова предположим, что $r=1$, обозначения $z_\tau(\psi)$, $k_\tau(\psi)$ и $\gamma_\tau(\psi)$ имеют тот же смысл, что и при доказательстве предложения 3.

Пусть $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{l+1}=t$ — разбиение отрезка $[0,t]$ согласованное с кривой $\Lambda.(\psi)$, $D_i=[\tau_i,\tau_{i+1}]$, $D=\{\tau_1,\ldots,\tau_l\}$. Слой расслоения $J_n{}^*\mathscr{K}_n$ в точке ψ по самому определению этого расслоения отождествляется с пространством

$$K_D(\Lambda.(\psi))=\bigoplus_{i=1}^{l}K_{D_i}(\Lambda.(\psi)),$$

где

$$K_{D_i}(\Lambda.(\psi))=\sum_{\tau_i<\tau<\tau_{i+1}}(\Pi^*\cap\Lambda_\tau),\quad i=1,\ldots,l.$$

Пусть $\lambda\in K_{D_i}(\Lambda.(\psi))$, положим $D_i(\lambda)=\{\tau\in D_i \mid \lambda\in\Lambda_\tau\}$. Из утверждения с) леммы 2 следует, что $D_i(\lambda)$ связно, т. е. является подотрезком в D_i. В случае, когда этот отрезок не сводится к одной точке, дифференцирование тождества $0=\sigma(\lambda, \lambda_\tau(\psi))$, $\tau\in D_i(\lambda)$ по τ приводит к равенству $\sigma\left(\lambda, z_\tau^{(k_\tau)}(\psi)\right)=0$, $\tau\in D_i(\lambda)$.

Предположим, что $\tau_0\in D_i(\lambda)$, и обозначим через λ_τ, $0<\tau\leqslant\tau_0$ решение дифференциального уравнения

$$\frac{d\lambda_\tau}{d\tau}=\frac{\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)}(\psi), \lambda_\tau\right)}{\gamma_\tau(\psi)} z_\tau^{(k_\tau)},$$

удовлетворяющее условию $\lambda_{\tau_0}=\lambda$. Положим, наконец,

$$v_\lambda(\tau)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\left(z_\tau^{(k_\tau)}(\psi), \lambda_\tau\right)}{\gamma_\tau(\psi)}, & 0<\tau\leqslant\tau_0;\\ 0, \ \tau\notin(0, \tau_0] \end{cases}$$

— кусочно гладкая функция на $(0, t]$. Из сказанного выше вытекает, что соответствие $\lambda\to v_\lambda(\cdot)$ корректно определяет линейное инъективное отображение пространства $K_{D_i}(\Lambda.(\psi))$ в пространство кусочно гладких функций на $\mathbf{R}$. Более того, сопоставив вектору $(\lambda_1\oplus\ldots\oplus\lambda_l)\in K_D(\Lambda.(\psi))$ функцию $\sum_{i=1}^{l} v_{\lambda_i}(\cdot)$, получим, очевидно, инъективное линейное отображение $K_D(\Lambda.(\psi))$ в пространство кусочно гладких функций.

Теперь мы воспользуемся некоторыми обозначениями, введенными при доказательстве теоремы 3.1. Через $H_{-k.(\psi)}[0, t]$ (см. лемму 3.8) обозначается прямая сумма некоторых соболевских пространств отрицательного веса $H_{-k.(\psi)}[0, t]=$ $=\bigoplus_{j=1}^{N+1} H_{-k_{t_j}(\psi)}[t_{j-1}, t_j]$, где $0=t_0<t_1<\ldots<t_{N+1}=t$, причем $t_1, \ldots, t_N$ — все точки нарушения гладкости $z_\tau(\psi)$. В лемме 3.8 установлена непрерывность формы $\psi G_t''$ в норме пространства $H_{-k.(\psi)}[0, t]\supset L_2[0, t]$. Замыкание пространства $\ker G_t'$ (области определения формы $\psi G_t''$) в $H_{-k.(\psi)}[0, t]$ состоит из таких «распределений» $u=\bigoplus_{j=0}^{N} u_j$, что $\langle z.u, 1\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{N}\langle z.u_j, 1\rangle\in\Pi^*$; продолжение по непрерывности формы $\psi G_t''$ на это пространство «распределений» обозначается $Q(\psi)$.

Пусть $\lambda\in\Lambda_{\tau_0}\cap\Pi^*$ и λ_τ, $0<\tau\leqslant\tau_0$ — решение уравнения

$$\frac{d\lambda_\tau}{d\tau}=v_\lambda(\tau)\, z_\tau^{(k_\tau)},$$

удовлетворяющее условию $\lambda_{\tau_0}=\lambda$. Тогда $\lambda_{+0}\in\Lambda_{+0}$, следовательно, вектор λ_{+0} однозначно представляется в виде $\lambda_{+0}=\nu_0(\lambda)+$ $+\sum_{\iota=0}^{k_{+0}-1} a_\iota(\lambda) z_{+0}$, где $\nu_0(\lambda)\in\Pi^*\cap\Gamma_{+0}^{\perp}$, $a_\iota(\lambda)$ — скаляры. Следующая формула сопоставляет каждому $\lambda\in K_{D_l}(\Lambda.(\psi))$ элемент u_λ пространства $H_{-k.(\psi)}[0, t]$:

$$u_\lambda \overset{\text{def}}{=} \sum_{\iota=0}^{k_{+0}-1} a_\iota(\lambda)\,\partial^\iota\delta_{+0}+\sum_{j=1}^{N+1}\partial^{k_{\tau_j}}(v_\lambda|_{[t_{j-1},\, t_j]}),$$

где $\delta_{+0}\in H_{-1}[0, t]$, — δ-функция сосредоточенная в нуле, а $\partial=-\frac{\partial}{d\tau}$ оператор дифференцирования в пространстве распределений.

Сопоставляя каждому $(\lambda_1\oplus\ldots\oplus\lambda_l)\in K_D(\Lambda.(\psi))$ распределение $\sum_{i=1}^{l} u_{\lambda_i}$, получаем линейное инъективное отображение $\mathbf{u}_\psi: K_D(\Lambda.(\psi))\to H_{-k.(\psi)}[0, t]$. Заметим, что

$$\langle z.u_\lambda, 1\rangle=\sum_{\iota=0}^{k_{+0}-1} a_\iota(\lambda)\, z_{+0}^{(\iota)}+\int_0^t z_\tau^{(k_\tau)} v_\lambda(\tau)\, d\tau=(\lambda-\nu_0(\lambda))\in\Pi^*.$$

Следовательно, n-мерное пространство $\mathbf{u}_\psi(K_D(\Lambda.(\psi)))$ лежит в области определения квадратичной формы $Q(\psi)$.

Лемма 4. Сужение формы $Q(\psi)$ на подпространство $\mathbf{u}_\psi(K_D(\Lambda.(\psi)))$ равно нулю; при этом $\mathbf{u}_\psi(K_D(\Lambda.(\psi)))\cap\ker Q(\psi)=0$.

Доказательство. В самом деле, для $\lambda'\in\Lambda_{\tau'}\cap\Pi^*$, $\lambda''\in\Lambda_{\tau''}\cap\Pi^*$, $0<\tau''\leqslant\tau'<t$ имеем (для единообразия формул считаем, что $k_\tau>0\ \forall\tau$)

$$Q(u_{\tau'}, u_{\lambda''})=\int_0^t \sigma\Bigg(\Bigg(\int_0^\tau(-1)^{k_\theta} z_\theta v_{\lambda'}^{k_\theta}(\theta)\,d\theta+$$

$$+\sum_{\iota=0}^{k_{+0}-1} a_\iota(\lambda') z_{+0}^{(\iota)},\ (-1)^{k_\tau} z_\tau v_{\lambda''}^{(k_\tau)}(\tau)\Bigg)\,d\tau=\int_0^t\Bigg(\gamma_\tau v_{\lambda'}(\tau)+$$

$$+\sigma\Bigg(\int_0^t z_\theta^{(k_\theta)} v_{\lambda'}(\theta)\,d\theta+\sum_{\iota=0}^{k_{+0}-1} a_\iota(\lambda') z_{+0}^{(\iota)},\ z_\tau^{(k_\tau)}\Bigg)\Bigg) v_{\lambda''}(\tau)\,d\tau=$$

$$=-\sigma\Big(\nu_0(\lambda'),\ \int_0^t z_\tau^{(k_\tau)} v_{\lambda''}(\tau)\,d\tau=$$

$$=\sigma\Bigg(\nu_0(\lambda'),\ \nu_0(\lambda'')+\sum_{\iota=0}^{k_{+0}-1} a_\iota z_{+0}^{(\iota)}-\lambda''\Bigg)=0.$$

Ядро формы $Q(\psi)$ было описано при доказательстве теоремы 3.1 (см. лемму 3.12). Кривая $\Lambda_{.}(\psi)$ принадлежит $\mathfrak{L}^s[0, t]$, следовательно, $\Lambda_\theta(\psi) \cap \Pi^* = 0$ на некотором интервале $\tau < \theta < t$. В таком случае пространство $\ker Q$ не содержит ненулевых распределений, равных тождественно нулю на интервале (τ, t).

В предложении 3 установлена непрерывная зависимость кривой $\Lambda_{.}(\psi)$ от $\psi \in \Psi_n^s$. Анализ доказательства этого предложения показывает, что пространства $\{u_\lambda \mid \lambda \in K_{D_t}(\Lambda_{.}(\psi))\}$ непрерывно зависят от ψ как конечномерные подпространства в соболевском пространстве $H_{-N}[0, t]$ с достаточно большим $N > 0$*).

Следовательно, n-мерные пространства $\mathfrak{u}_\psi(K_D(\Lambda_{.}(\psi)))$ также непрерывно зависят от ψ, если их рассматривать как подпространства в $H_{-N}[0, t]$.

Заметим теперь, что пространство $\mathfrak{u}_\psi(K_D(\Lambda_{.}(\psi)))$ не зависит от выбора разбиения D_t и положим $U_\psi = \mathfrak{u}_\psi(K_D(\Lambda_{.}(\psi)))$. Семейство подпространств $U_\psi \subset H_{-k_{.}(\psi)}[0, t] \subset H_{-N}[0, t]$, $\psi \in \Psi_n^s$, определяет n-мерное векторное расслоение $\mathcal{U}_n$ над Ψ_n^s, а отображения $\mathfrak{u}_\psi : K_D(\Lambda_{.}(\psi)) \to U_\psi$ индуцируют изоморфизм расслоений $J_n^* \mathcal{K}_n \approx \mathcal{U}_n$. Осталось построить изоморфизм расслоения $\mathcal{U}_n$ на $\mathcal{L}_n \mid \Psi_n^s$.

Напомним, что слоем расслоения $\mathcal{L}_n$ в точке $\psi \in \Psi_n^s$ является такое n-мерное инвариантное подпространство $L_\psi \subset \overline{\ker G_t'}$ самосопряженного оператора в $\overline{\ker G_t'}$, определяемого квадратичной формой ψg_t, что $\psi g_t \mid L_\psi < 0$. В таком случае $Q(\psi) \mid L_\psi = \psi g_t \mid L_\psi < 0$. Пусть $\mathrm{Dom}\, Q(\psi)$ — замыкание подпространства $\ker G_t'$ в $H_{-k_{.}(\psi)}[0, t]$, область определения формы $Q(\psi)$.

Согласно лемме 3.10 форма $Q(\psi)$ положительно определена на некотором подпространстве конечной коразмерности в $\mathrm{Dom}\, Q(\psi)$; подпространство $(L_\psi)^{\perp}_{Q(\psi)}$ имеет коразмерность n в $\mathrm{Dom}\, Q(\psi)$ и, согласно лемме 3.11,

$$Q(\psi) \mid (L_\psi)^{\perp}_{Q(\psi)} \geqslant 0, \quad \ker (Q(\psi) \mid (L_\psi)^{\perp}_{Q(\psi)}) = \ker Q(\psi). \tag{8}$$

Из (8) и леммы 4 вытекает, что $U_\psi \cap (L_\psi)^{\perp}_{Q(\psi)} = 0$.

Пусть $\mathrm{Pr}_\psi : \mathrm{Dom}\, Q(\psi) \to L_\psi$ — проектор $\mathrm{Dom}\, Q(\psi)$ на L_ψ параллельно U_ψ, иными словами,

$$\ker \mathrm{Pr}_\psi = U_\psi, \quad \mathrm{im}\, \mathrm{Pr}_\psi = L_\psi, \quad \mathrm{Pr}_\psi \circ \mathrm{Pr}_\psi = \mathrm{Pr}_\psi.$$

Положим $I_\psi = \mathrm{Pr}_\psi \mid U_\psi$. Семейство $I_\psi : U_\psi \to L_\psi$, $\psi \in \Psi_n^s$ изоморфизмов линейных пространств осуществляет изоморфизм расслоений

$$\mathcal{U}_n \approx \mathcal{L}_n \mid \Psi_n^s. \quad \blacksquare$$

*) Допуская некоторую вольность, мы обозначили символом $H_{-N}[0, t]$ пространство $\bigoplus_{j=1}^{N+1} H_{-N}[\tau_{j-1}, \tau_j]$.

Пусть K — выпуклый многогранный конус в $\operatorname{coker} G_t'$, причем квадратичное отображение $\mathfrak{g}$ невырождено относительно K. В том случае, когда вложения

$$\left(\bigcup_{i=0}^{n} \Psi_i^s\right) \cap K^\circ \subset \left(\bigcup_{i=0}^{n} \Psi_i\right) \cap K^\circ, \quad n \geqslant 0$$

являются гомотопическими эквивалентностями, теорема 1 позволяет эффективно использовать теорему 2 из [1] для весьма точной оценки групп гомологий множества $\mathfrak{g}_t^{-1}(K) \setminus 0$. В действительности, во многих важных задачах выполняется равенство $\Psi^s = \Psi$ и, следовательно, $\Psi_n^s = \Psi_n$.

Особенно интересен случай $K = 0$: результаты работы [1], § 3, в применении к отображению G_t дают следующие ответы на вопросы I), II), поставленные в начале настоящей статьи, в терминах групп гомологий множеств $\mathfrak{g}_t^{-1}(0) \setminus 0$.

Теорема 2. Предположим, что $\mathfrak{g}_t$ невырождено, тогда

i) если $\mathfrak{g}_t^{-1}(0) \neq 0$, то $\tilde{\mu}_t \in \operatorname{int} F_t(\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)})$ для любой окрестности $\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$ точки $\tilde{u}(\cdot)$ в $L_\infty([0, t]; U)$;

ii) если $\mathfrak{g}_t^{-1}(0) = 0$ то, каково бы ни было конечномерное подмногообразие $V \subset L_\infty([0, t]; U)$, содержащее точку $\tilde{u}(\cdot)$, найдется такая окрестность $\mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)}$, что $\tilde{\mu}_t \in \partial F_t(V \cap \mathcal{O}_{\tilde{u}(\cdot)})$;

iii) для всякого $i > 0$ группа $\check{H}_{i-1}(\mathfrak{g}_t^{-1}(0) \setminus 0)$ совпадает с прямым пределом семейства групп

$$H_i(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V, \quad F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V \setminus \tilde{u}(\cdot)),$$

где V пробегает множество всех конечномерных подмногообразий в $L_\infty([0, t]; U)$, частично упорядоченное по включению, а гомоморфизмы

$$H_i(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V, F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap V \setminus \tilde{u}(\cdot)) \to$$
$$\to H_i(F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap W, F_t^{-1}(\tilde{\mu}_t) \cap W \setminus \tilde{u}(\cdot))$$

для $V \subset W$ идуцированы вложением.

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЕ К УПРАВЛЯЕМЫМ СИСТЕМАМ НА ГРУППАХ ЛИ

В настоящем параграфе развитые выше методы используются для решения некоторых специальных задач. В основном рассматривается окрестность постоянного управления для стационарной системы

$$\dot{\mu} = \mu \circ f(u), \quad \mu \in M, \; u \in U,$$

на полупростой группе Ли, т. е. фазововое многообразие M является полупростой группой Ли, а векторные поля $f(u)$, $u \in U$, левоинвариантны. Сначала исследуется поведение индексов якобиевых кривых при $t \to +\infty$ (охарактеризованы «эллиптическая» и «гиперболическая» ситуации). Затем описан класс систем на компактных группах, в которых вся информация извлекается прямо из штифелевой диаграммы группы M. Мы не стремимся к максимальной общности, а акцентируем внимание на ситуациях, в которых вычисления удается довести до конца и представить результаты в обозримом виде.

1. Первый результат относится к произвольной управляемой системе, не обязательно на группе Ли. Мы снова воспользуемся обозначениями пункта 1 § 3, при этом момент $t > 0$ предполагается настолько большим, что

$$\sum_{0<\tau<+\infty} \mu_0 \circ Z_\tau R^r = \sum_{0<\tau\leqslant t} \mu_\circ Z_\tau R^r = \Pi.$$

Вектор $\psi \in \Pi^\perp \setminus 0$ на протяжении настоящего пункта фиксирован, $\Sigma = E_{\Pi,\psi}$ — симплектическое пространство с кососкалярным произведением σ. Интегральная квадратичная форма $\psi G_t''$ определяется равенством (3.5), при этом $\operatorname{ind} \psi G_t''$ монотонно не убывает с ростом t.

Напомним определение целого числа $k_t \geqslant 0$ и квадратичной формы γ_t на R^r, введенных в п. 2 § 3: если квадратичная форма ψh_θ не равна тождественно нулю ни на каком интервале $\tau < \theta < t$, то положим $k_t = 0$, $\gamma_t = \psi h_t$; в противном случае k_t — максимальное среди таких чисел k, $1 \leqslant k \leqslant m = \dim \Pi$, что $\sigma(z_\theta^{(i)} v_1, z_\theta v_2) \equiv 0$ при $i < 2(k-1)$, $v_1, v_2 \in R^r$, на некотором интервале $\tau < \theta < t$, $\gamma_t(v) = \sigma(z^{(k_t)} v, z^{(k_t - 1)} v)$, $v \in R^r$.

В дальнейшем предполагается, что $\sigma(z^{(k_t - 1)} v_1, z^{(k_t - 1)} v_2) \equiv 0$ $\forall v_1, v_2 \in R^r$, $t > 0$ и $\gamma_t(v) \geqslant \varepsilon_t |v|^2$ $\forall v \in R^r$, $t > 0$ и некоторого $\varepsilon_t > 0$, т. е. выполнены условия конечности $\operatorname{ind} \psi G_t''$, сформулированные в предложении 3.1.

Предложение 1. Если $\lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{ind} \psi G_t'' < +\infty$, то существует такая лагранжева плоскость $\Lambda_\infty \subset \Sigma$, что для всякого $v \in R^r$ и любой окрестности $O_{\lambda_0} \subset \Sigma$ произвольной точки $\lambda_0 \in \Lambda_\infty$ выполняется соотношение

$$\int_0^\infty \frac{1}{\gamma_t(v)} \min_{\lambda \in O_{\lambda_0}} \sigma(z_t^{(k_t)} v, \lambda)^2 \, dt < +\infty.$$

Доказательство. Поскольку γ_t — неособая квадратичная форма на R^r, то определена квадратичная форма γ_t^{-1} на R^{r*}, и соответствие

$$x \mapsto \frac{1}{2} \gamma_t^{-1} (\sigma(z_t^{(k_t)} \cdot, x)), \quad x \in \Sigma,$$

определяет квадратичный гамильтониан на Σ (см. (3.9)). Если $v_t^1, \ldots, v_t^r$ — такой базис в $\mathbf{R}^r$, что

$$\gamma_t\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_t^i\right)=\sum \alpha_i^2\gamma_t(v_t^i),$$

то

$$\gamma_t^{-1}(\sigma(z_t^{(k_t)}\cdot, x))=\sum_{i=1}^{r}\frac{\sigma\left(z_t^{(k_t)}v_i, x\right)^2}{\gamma_t(v_i)}. \tag{1}$$

Сужение квадратичной формы (1) на Λ, как и в § 3, обозначим $\gamma_t^{-1}(\sigma(z_t^{(k_t)}\cdot, \Lambda))$. Пусть Λ_t, $t\geqslant 0$, — якобиева кривая, отвечающая гамильтониану (1). В таком случае, в каждой точке непрерывности $z_t^{(k_t)}$, γ_t выполняется равенство

$$\frac{d\Lambda_t}{dt}=\frac{1}{2}\gamma_t^{-1}(\sigma(z_t^{(k_t)}\cdot, \Lambda_t)). \tag{2}$$

В пункте 2 § 4 дано определение индекса произвольной неубывающей кривой в лагранжевом грассманиане $L(\Sigma)$, причем из теоремы 3.1 вытекает равенство

$$\operatorname{ind}\psi G_t''=\operatorname{ind}(\Lambda_\bullet|_{[0,t]}),\quad t>0.$$

Пусть $\lim\limits_{t>+\infty}\operatorname{ind}\psi G_t''=N<+\infty$, из предложения 5.2 вытекает, что длина кривой Λ_t, $0<t<+\infty$, не превосходит $\frac{\pi}{2}(N+m)$. Следовательно, существует предел Λ_t при $t\to+\infty$. Положим $\Lambda_\infty=\lim\limits_{t\to+\infty}\Lambda_t$. Согласно уравнению (2) длина кривой Λ_t, $0<t\leqslant\infty$, равна $\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\|\gamma_t^{-1}(\sigma(z_t^{(k_t)}\cdot,\Lambda_t))\|\,dt<+\infty$. Следовательно, для любой окрестности $\mathcal{O}_{\Lambda_\infty}$ точки Λ_∞ в $L(\Sigma)$ имеем

$$\int\limits_0^{\infty}\min_{\Lambda\in\mathcal{O}_{\Lambda_\infty}}\|\gamma_t^{-1}(\sigma(z_t^{(k_t)}\cdot, \Lambda_t)\|\,dt<+\infty,$$

откуда, с учетом равенства (1), вытекает доказываемое утверждение. ■

Предложение 1 дает довольно сильное необходимое условие конечности индекса якобиевой кривой на полупрямой. Однако, как будет ясно из дальнейшего, это условие далеко не является достаточным.

Пусть теперь M — группа Ли и $\mathfrak{M}$ — алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на M; управляемая система имеет вид

$$\dot{\mu}=\mu\circ f(u),\ u\in U,\ \mu(0)=\mu_0,\ f(u)\in\mathfrak{M}\ \forall u\in U.$$

Пусть $\tilde{u}(t) \equiv u_0$, тогда $\tilde{\mu}(t) = \mu_0 e^{tf(u_0)}$, $Z_t = e^{t\,\mathrm{ad} f(u_0)} \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u_0}$; в частности, $Zv_t \in \mathfrak{M}$ $\forall v$. Не ограничивая общности, можно считать, что μ_0 — единичный элемент группы M, $T_{\mu_0}M \approx \mathfrak{M}$. В этой ситуации индекс инерции интегральной квадратичной формы $\psi G''_t$ может быть вычислен чисто алгебраическими средствами. Мы ограничимся случаем, когда M — полупростая группа Ли, и рассмотрим только так называемые билинейные системы со скалярным управлением:

$$\dot{\mu} = \mu \circ (a + ub), \quad u \in \mathrm{R}, \quad a, b \in \mathfrak{M}, \quad u_0 = 0. \tag{3}$$

Вычисления для систем вида (3) содержат основные особенности и общего нелинейного случая с многомерным управлением, преимущество же состоит в том, что используется минимальное количество исходных данных: все определяется двумя элементами a, b алгебры Ли $\mathfrak{M}$.

Форма Киллинга полупростой алгебры Ли $\mathfrak{M}$ определяет каноническое отождествление $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$, всюду до конца настоящего параграфа угольными скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается форма Киллинга; при этом

$$S^{\perp} \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathfrak{M} \mid \langle x, S \rangle = 0\}$$

для любого подмножества $S \subset \mathfrak{M}$.

Ниже предполагаются выполненными следующие условия общности положения:

1) a — регулярный элемент полупростой алгебры Ли $\mathfrak{M}$, т. е. $\dim \ker (\mathrm{ad}\, a) = \mathrm{rank}\, \mathfrak{M}$.

2) элемент b не лежит ни в каком инвариантном подпространстве оператора $\mathrm{ad}\, a : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ коразмерности $\geqslant \mathrm{rank}\, \mathfrak{M}$.

Условия 1), 2), очевидно, эквивалентны равенству $\mathrm{codim\, span}\, \{(\mathrm{ad}^i a) b \mid i \geqslant 0\} = \mathrm{rank}\, \mathfrak{M} - 1$.

Имеем, $Z_t = e^{t\,\mathrm{ad}\, a} b$, $G_t : u(\cdot) \mapsto \mu_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\tau\,\mathrm{ad}\, a} b u(\tau)\, d\tau$,

$$G'_t u(\cdot) = \int_0^t e^{\tau\,\mathrm{ad}\, a} b u(\tau)\, d\tau,$$

$$G''_t (v_1(\cdot), v_2(\cdot)) =$$

$$= \int_0^t \left[\int_0^\tau e^{\theta\,\mathrm{ad}\, a} b v(\theta)\, d\theta,\ e^{\tau\,\mathrm{ad}\, a} b v(\tau) \right] d\tau + \mathrm{im}\, G'_t, \quad v_i(\cdot) \in \ker G'_t.$$

Обозначение начальной точки μ_0 в выражениях для G'_t и G_t можно опускать в силу отождествления $T_{\mu_0}M \approx \mathfrak{M}$: операция коммутирования, а также операторы $e^{\tau\,\mathrm{ad}\, a}$ не выводят из алгебры Ли $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathscr{H}=\ker(\operatorname{ad} a)$ — подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{M}$, содержащая a, и $b_0 \in \mathscr{H}$ — ортогональная проекция b на $\mathscr{H}$ (так что $(b-b_0)\perp\mathscr{H}$). Из условий общности положения вытекает, что

$$\Pi=\operatorname{im} G'_t=\operatorname{span}\{e^{\tau \operatorname{ad} a} b,\ 0\leqslant\tau\leqslant t\}=\mathscr{H}^{\perp}+\mathbf{R}b \quad m=\dim \mathscr{H}^{\perp}+1.$$

Таким образом, $\psi\in\Pi^{\perp}\subset\mathscr{H}$, $[a,\psi]=0$. Следовательно, величины $\langle \psi, [z_t^{(i)}, z_t^{(j)}] \rangle = \langle \psi, [\operatorname{ad}^i ab, \operatorname{ad}^j ab] \rangle$ не зависят от $t\in\mathbf{R}$, поэтому $k_t=\mathrm{const}$, $\gamma_t=\mathrm{const}$. Из условий общности положения вытекает, что $\langle \psi, [\operatorname{ad}^k ab, b] \rangle = \langle [b,\psi], \operatorname{ad}^k ab \rangle \neq 0$ для некоторого $k\leqslant m-2$, стало быть, $k_t\leqslant\frac{m-1}{2}$.

Пусть для определенности $k_t=1$ (случай $k_t>1$ ничуть не сложнее, мы просто стремимся избегать лишних параметров). Положим $\gamma_i=\langle\psi, [\operatorname{ad}^{i+1}ab, \operatorname{ad}^i ab]\rangle$, $i\geqslant 0$; в таком случае $\gamma_t=\gamma_0$.

Напомним, что через $\mathscr{E}_\Pi$ обозначается пространство всех векторных полей на M, значение которых в точке μ_0 лежит в Π. Симплектическое пространство Σ есть фактор-пространство $\mathscr{E}_\Pi$ по ядру кососимметричной формы $(x_1\wedge x_2)\mapsto\langle\psi, \mu_0\circ[x_1, x_2]\rangle$, $x_1, x_2\in\mathscr{E}_\Pi$. Отождествляя Π с множеством левоинвариантных полей, лежащих в $\mathscr{E}_\Pi$, можем считать, что $\Pi\subset\mathscr{E}_\Pi$. Образ подпространства Π при канонической факторизации $\mathscr{E}_\Pi\to\Sigma$ обозначим через $\hat{\Pi}$. Напомним, что через Π_0 обозначается образ при этой же факторизации пространства полей, обращающихся в нуль в точке μ_0. Ясно, что $\Sigma=\hat{\Pi}\oplus\Pi_0$, однако, в отличие от Π_0, подпространство $\hat{\Pi}$ не является лагранжевой плоскостью в симплектическом пространстве (Σ, σ). Имеется очевидный изоморфизм пространства $\Sigma=\hat{\Pi}\oplus\Pi_0$ на $\Pi\oplus\Pi$, при котором $\hat{\Pi}$ переходит в первое слагаемое, Π_0 — во второе, а симплектическая структура σ — в кососимметричную форму

$$\bar{\sigma}:(x_1,\xi_1)\wedge(x_2,\xi_2)\mapsto\langle\psi,[x_1,x_2]\rangle+\langle\xi_2,x_1\rangle-\langle\xi_1,x_2\rangle,$$
$$x_i,\ \xi_i\in\Pi\subset\mathfrak{M},\quad i=1,2.$$

Симплектическое пространство $(\Pi\oplus\Pi, \bar{\sigma})$ представляет собой удобную модель для пространства (Σ, σ). Гамильтониан h_τ в этой модели имеет вид:

$$h_\tau=\frac{1}{2\gamma_0}(\langle\psi,[e^{\tau \operatorname{ad} a}[a,b],x]\rangle+\langle e^{\tau \operatorname{ad} a}[a,b],\xi\rangle)^2. \tag{4}$$

Линейная гамильтонова система в $\Pi\oplus\Pi$, отвечающая гамильтониану $h_\tau(x,\xi)$, имеет вид

$$\begin{cases}\gamma_0\dot{x}=(\langle\psi,[e^{\tau \operatorname{ad} a}[a,b],x]\rangle+\langle e^{\tau \operatorname{ad} a}[a,b],\xi\rangle)e^{\tau \operatorname{ad} a}[a,b],\\ \dot{\xi}=0.\end{cases}$$

Якобиева кривая есть порожденная этой системой кривая на лагранжевом грассманиане $L(\Pi\oplus\Pi)$, гладкая при $0<\tau<+\infty$ с начальными условиями, $\Lambda_0=0\oplus\Pi$, $\Lambda_{+0}=\mathbf{R}b\oplus(\Pi\cap\{b\}^{\perp})$.

Теперь необходимо сделать небольшое отступление.

Лемма 1. Пусть g_τ — неотрицательный квадратичный гамильтониан на некотором симплектическом пространстве (Σ, σ), Γ — такое изотропное подпространство в Σ, что $\Gamma\subset\ker h_\tau$ $\forall\tau>0$, а $\Delta_\tau\in L(\Sigma)$, $\tau\in[0, t]$, — кусочно гладкая кривая, непрерывная при всех $\tau>0$ (при $\tau=0$ возможен разрыв). Тогда, если Δ_τ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta}{d\tau}=\vec{g}_\tau(\Delta), \tag{5}$$

то кривая Δ_τ^Γ также удовлетворяет этому уравнению. Если, вдобавок, $\Gamma\subset\Delta_0$, то $\operatorname{ind}\Delta.=\operatorname{ind}\Delta.^\Gamma$.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — некоторый базис изотропного пространства Γ. Рассмотрим квадратичный гамильтониан $\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{r}\sigma(\xi_j, x)^2$, $x\in\Sigma$. Этот гамильтониан порождает в Σ поток $x\mapsto x+s\sum\limits_{j=1}^{r}\sigma(\xi_j, x)\xi_j$, $s\in\mathbf{R}$. Соответствующий поток на $L(\Sigma)$ обозначим через Ξ_s, $s\in\mathbf{R}$. С другой стороны, пусть $\mathcal{G}_\tau: L(\Sigma)\to L(\Sigma)$, $\tau\in[0, t]$, — поток, порождаемый гамильтонианом $\vec{g}_\tau$. Поскольку $\xi_j\in\ker g_\tau$, $j=1, \ldots, r$, $\tau\in(0, t]$, то потоки Ξ_s и $\mathcal{G}_\tau$ коммутируют: $\Xi_s\circ\mathcal{G}_\tau=\mathcal{G}_\tau\circ\Xi_s$, $s\in\mathbf{R}$, $\tau\in(0, t]$; стало быть, для всякого $s\in\mathbf{R}$ кривая $\tau\mapsto\Xi_s(\Delta_\tau)$ удовлетворяет уравнению (5). В то же время, легко видеть, что $\Xi_s(\Lambda)\to\Lambda^\Gamma$ $(s\to+\infty)$ $\forall\Lambda\in L(\Sigma)$. Следовательно, кривая Δ_τ^Γ, $\tau\in(0, t]$, действительно удовлетворяет уравнению (5).

Заметим, что подпространство $\Delta_\tau\cap\Gamma$ не зависит от τ при $\tau\in(0, t]$. Учитывая это обстоятельство, нетрудно показать, что при условии $\Gamma\subset\Delta_0$ справедливо равенство $\operatorname{ind}\Delta=\operatorname{ind}\Delta^\Gamma$. ■

Имеется тесная связь между индексами непрерывных кривых на лагранжевом грассманиане, порожденных одной и той же гамильтоновой системой, но с разными начальными условиями.

Лемма 2. Пусть g_τ — нестационарный квадратичный гамильтониан на некотором симплектическом пространстве Σ и Δ_τ^1, Δ_τ^2, $0\leqslant\tau\leqslant t$, — две непрерывные неубывающие кривые на $L(\Sigma)$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d\Delta}{d\tau}=\vec{g}_\tau(\Delta).$$

Тогда

$$\operatorname{ind}\Delta^1_\cdot - \operatorname{ind}\Delta^2_\cdot = \operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^1, \Delta_0^1) - \operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^2, \Delta_0^2) +$$
$$+\operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^2, \Delta_t^1) - \operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_0^2, \Delta_0^1) + \dim\left(\bigcap_\tau \Delta_\tau^1\right) - \dim\left(\bigcap_\tau \Delta_\tau^2\right).$$

Доказательство. Пусть $\tau_{l+1}=0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_l=t$ — такое разбиение отрезка $[0, t]$, что кривые $\Delta_\tau^j|_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}$, $i=0, 1, \ldots, l$, $j=1, 2$, — простые. Пусть $\Lambda \in L(\Sigma)$ — произвольная лагранжева плоскость. Согласно предложению 3.2, величины

$$I^j = \sum_{i=0}^{l} \operatorname{ind}_\Lambda\left(\Delta_{\tau_i}^j, \Delta_{\tau_{i+1}}^j\right), \quad j=1, 2. \tag{6}$$

не зависят от Λ.

Определим кусочно гладкие кривые $\hat{\Delta}_\tau^j$ на $L(\Sigma)$, $j=1, 2$, правилом

$$\hat{\Delta}_\tau^1 = \begin{cases} \Delta_0^2, & 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{t}{2}, \\ \Delta_{2\tau-t}^1, & \frac{t}{2} < \tau \leqslant t. \end{cases} \qquad \hat{\Delta}_\tau^2 = \begin{cases} \Delta_{2\tau}^2, & 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{t}{2}, \\ \Delta_t^1, & \frac{t}{2} < \tau \leqslant t. \end{cases}$$

Подставляя в (6) вместо Λ сначала Λ_0^1, а затем Λ_0^2, получим

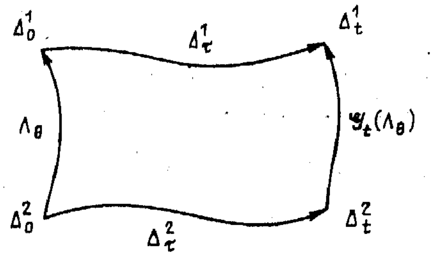
$$\operatorname{ind}\Delta^1_\cdot + \dim\left(\Delta_0^1 / \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t} \Delta_\tau^1\right) = I^1 = \operatorname{ind}\hat{\Delta}^1_\cdot + \operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^1, \Delta_0^1) -$$
$$-\operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_0^2, \Delta_0^1) - \operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^1, \Delta_0^2) + \dim\left(\Delta_0^1/\Delta_0^2 \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t} \Delta_\tau^1\right).$$

В то же время

$$\operatorname{ind}\Delta^2_\cdot + \dim\left(\Delta_0^2 / \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t} \Delta_\tau^2\right) = I^2 = \operatorname{ind}\hat{\Delta}^2_\cdot + \operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^2, \Delta_0^2) -$$
$$-\operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^2, \Delta_t^1) - \operatorname{ind}_{\Delta_0^2}(\Delta_t^1, \Delta_0^2) + \dim\left(\Delta_0^2/\Delta_t^1 \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t} \Delta_t^2\right).$$

Пусть $\mathcal{G}_\tau : L(\Sigma) \to L(\Sigma)$ — поток на $L(\Sigma)$, определяемый гамильтонианом g_τ, Λ_θ — простая неубывающая непрерывная кривая, соединяющая Δ_0^2 с Δ_0^1, т. е. $\Lambda_0 = \Delta_0^2$, $\Lambda_t = \Delta_0^1$. В таком случае $\forall \tau \in [0, t]$ простая неубывающая кривая $\theta \mapsto \mathcal{G}_\tau(\Lambda_\theta)$ соединяет Δ_τ^2 с Δ_τ^1.

Следовательно, непрерывные неубывающие кривые $\Delta^1_\cdot \circ \Lambda_\cdot$ и $\mathcal{G}_t(\Lambda_\cdot) \circ \Delta^2_\cdot$, имеющие общие концы, гомотопны



Тождество (5.3) связывает индекс неубывающей кривой с индексом Маслова подходящей замкнутой кривой. Поскольку индекс Маслова — гомотопический инвариант, а

$$\operatorname{ind}(\Delta^1_\cdot \circ \Lambda_\cdot) = \operatorname{ind}\hat{\Delta}^1_\cdot, \quad \operatorname{ind}(\mathcal{G}_t(\Lambda_\cdot)\circ\Delta^2_\cdot) = \operatorname{ind}\hat{\Delta}^2_\cdot,$$

получаем

$$\operatorname{ind}\hat{\Delta}^1_\cdot + \dim\left(\Delta^1_0/\Delta^2_0 \bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Delta^1_\tau\right) = \operatorname{ind}\hat{\Delta}^2_\cdot + \dim\left(\Delta^2_0/\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Delta^2_\tau\right).$$

Сопоставляя уже полученные равенства, получаем выражение для $\operatorname{ind}\Delta^1_\cdot - \operatorname{ind}\Delta^2_\cdot$. ■

Следствие. Пусть непрерывная кривая Δ_τ, $\tau\in[0, t]$, на $L(\Sigma)$ удовлетворяет уравнению (5) и $\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t} \ker g_\tau \supset \Gamma$ — изотропное подпространство. Тогда

$$\operatorname{ind}\Delta^\Gamma_\cdot - \operatorname{ind}\Delta_\cdot = \operatorname{ind}_{\Delta_0}(\Delta^\Gamma_t, \Delta^\Gamma_0) - \operatorname{ind}_{\Delta_0}(\Delta_t, \Delta_0) +$$

$$+ \operatorname{ind}_{\Delta_0}(\Delta_t, \Delta^\Gamma_t) - \operatorname{ind}_{\Delta_0}(\Delta_0, \Delta^\Gamma_0) + \dim\left(\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Delta^\Gamma_\tau/\bigcap_{0\leqslant\tau\leqslant t}\Delta_\tau\right).$$

В частности,

$$\left|\operatorname{ind}\Lambda^\Gamma_\cdot - \operatorname{ind}\Delta_\cdot - \dim\left(\bigcap_\tau \Delta^\Gamma_\tau/\bigcap_\tau \Delta_\tau\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\dim\Sigma.$$

Вернемся к исследуемой гамильтоновой системе. Для нестационарного гамильтониана (4), заданного на $\Pi\oplus\Pi$, получаем

$$\bigcap_{\tau>0} \ker h_\tau \supset (\ker \operatorname{ad}\psi)\cap\Pi)\oplus\mathbf{R}b.$$

Из леммы 1 следует равенство

$$\operatorname{ind}\Lambda|_{[0,t]} = \operatorname{ind}\Lambda^{0\oplus\mathbf{R}b_0}|_{[0,t]} \quad \forall t>0.$$

Заметим, что кривая $\Lambda^{0\oplus\mathbf{R}b_0}_\tau$ непрерывна на $(0, +\infty)$ (в то время как Λ_τ имеет разрыв при $\tau=0$).

Положим $\Gamma_h = (\ker(\operatorname{ad}\psi)\cap\Pi\oplus 0$ — изотропное подпространство в $(\Pi\oplus\Pi, \bar{\sigma})$. Нетрудно видеть, что $\Gamma_h^\perp/\Gamma_h \approx \operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)\oplus\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)\subset\Pi\oplus\Pi$, причем $\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi) = \ker(\operatorname{ad}\psi)^\perp$. Обозначим через $\hat{b}$ ортогональную проекцию вектора b на $\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)$, и пусть $c=[a, \hat{b}]$ (подпространство $\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)$ очевидно инвариантно как относительно $\operatorname{ad}a$, так и относительно $\operatorname{ad}\psi$).

Пусть Δ_τ, $\tau\geqslant 0$, — кривая на лагранжевом грассманиане $L(\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)\oplus\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi))$, порожденная гамильтоновой системой

$$\begin{cases} \gamma_0\dot{x} = \langle \xi - [\psi, x], e^{\tau\operatorname{ad}a}c\rangle e^{\tau\operatorname{ad}a}c \\ \dot{\xi} = 0, \qquad\qquad x, \xi\in\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi) \end{cases} \tag{7}$$

с начальным условием $\Delta_0 = \Delta_{+0} = 0\oplus\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)$.

Из леммы 1 вытекает, что Δ_τ переходит в $\Lambda^{\Gamma_h}_\tau/\Gamma_h =$

$=(\Lambda_\tau^{0\oplus\mathbf{R}b})^{\Gamma_h}/\Gamma_h$ при изоморфизме симплектических пространств $\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)\oplus\operatorname{im}(\operatorname{ad}\psi)\approx\Gamma_h^{\perp}/\Gamma_h$.

Формула, приведенная в следствии леммы 2, позволяет вычислить $\operatorname{ind}\Lambda|_{[0,t]}$ через $\operatorname{ind}\Delta|_{[0,t]}$; во всяком случае

$$|\operatorname{ind}\Delta.|_{[0,t]}-\operatorname{ind}\Lambda.|_{[0,t]}-\dim(\ker\operatorname{ad}\psi\cap\mathscr{H}^{\perp})|\leqslant\dim\mathscr{H}^{\perp}.$$

Если же ψ — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{M}$, т. е. $\ker\psi=\mathscr{H}$, то $\operatorname{ind}\Delta.|_{[0,t]}=\operatorname{ind}\Lambda.|_{[0,t]}$.

Предложение 2. Если подалгебра Картана $\mathscr{H}$ обладает таким корнем $\rho\in\mathbf{C}\otimes\mathscr{H}^*$, что $\rho(\psi)\neq0$, а $\rho(a)$ — чисто мнимое число, то $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi G_t''=+\infty$.

Прежде чем доказывать это предложение, введем некоторые обозначения, связанные с разложением Картана алгебры Ли $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\hat{R}\subset\mathbf{C}\otimes\mathscr{H}^*$ множество всех корней, не обращающихся в нуль на векторе ψ.

Множество $\hat{R}$ содержит, вообще говоря, вещественные корни, а также пары невещественных комплексно сопряженных корней. Составим подмножество $R\subset\hat{R}$, включив в него все вещественные корни, а также по одному из каждой пары $\{\rho,\bar{\rho}\}$ невещественных комплексно сопряженных корней так, чтобы для всякого $\rho\in R$ выполнялось условие $\operatorname{Re}\rho(a)\operatorname{Im}\rho(a)\geqslant0$ (из пары комплексно сопряженных чисто мнимых корней выбирается произвольный).

Пусть $R_+=\{\rho\in R\mid\operatorname{Re}\rho(a)>0\}$ $R_-=\{\rho\in R\mid\operatorname{Re}\rho(a)<0\}$ и $R_0=\{\rho\in R\mid\operatorname{Re}\rho(a)=0\}$, так что $R=R_+\cup R_-\cup R_0$.

Каждому корню $\rho\in\hat{R}$ отвечает собственный вектор $e_\rho\in\mathbf{C}\otimes\operatorname{im}\operatorname{ad}\psi$, т. ч. $\operatorname{ad}\omega e_\rho=\rho(\omega)e_\rho$, $\forall\omega\in\mathscr{H}$. Мы считаем векторы e_ρ, $\rho\in\hat{R}$, нормированными таким образом, что

$$\langle e_\rho, e_{-\rho}\rangle\begin{cases}2, & \rho\neq\bar{\rho}\\ 1, & \rho=\bar{\rho}\end{cases}$$

(напомним, что $\langle e_{\rho_1}, e_{\rho_2}\rangle=0$ при $\rho_1+\rho_2\neq0$).

Для любых $x\in\operatorname{im}\operatorname{ad}\psi$, $\rho\in\hat{R}$ положим

$$x_\rho=\frac{1}{2}\langle x, e_{-\rho}\rangle.$$

Если ρ — вещественный корень, то x_ρ — вещественное число, а если ρ невещественный корень, то x_ρ — комплексное число. Отображение $x\mapsto\{x_\rho\}_{\rho\in R}$ определяет специальные координаты в пространстве $\operatorname{im}\operatorname{ad}\psi$ (часть координат вещественные, а часть комплексные). Заметим, что $x_{\bar{\rho}}=\bar{x}_\rho$. Для любых x, $y\in\operatorname{im}\operatorname{ad}\psi$ выполняются соотношения

$$[\omega, x]_\rho=\rho(\omega)x_\rho,\quad \rho\in\hat{R};\tag{8}$$

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{Re}\left(\sum_{\rho\in R} x_\rho y_{-\rho}\right); \tag{9}$$

$$\langle \omega, [x, y] \rangle = \mathrm{Re}\left(\sum_{\rho\in R} \rho(\omega)\, x_\rho y_{-\rho}\right). \tag{10}$$

Положим, наконец,

$E_+=\{x\in \mathrm{im\,ad}\psi \mid x_\rho=0 \forall\rho\in R_-\}$, $E_-=\{x\in \mathrm{im\,ad}\psi \mid x_\rho=0$ $\forall\rho\in R_+\}$, $E_0=E_+\cap E_-$

—инвариантные подпространства, отвечающие соответственно множествам корней $R_+\cup R_0$, $R_-\cup R_0$ и R_0.

Доказательство предложения 2. Предположим, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{ind}\,\psi G_t'' < +\infty$. Требуется доказать, что $E_0=0$. Мы воспользуемся предложением 1. В силу этого предложения найдется такая лагранжева плоскость $\Lambda\in L(\mathrm{im\,ad}\,\psi\oplus\mathrm{im\,ad}\,\psi)$, что для любой окрестности O_{λ_0} произвольной точки $\lambda_0\in\Lambda$ выполняется соотношение

$$\int_0^\infty \min_{\lambda\in O_{\lambda_0}} \bar\sigma(\lambda, (e^{\tau\,\mathrm{ad}\,a}c, 0))^2 d\tau < +\infty.$$

Из равенства (8) следует, что $(e^{\tau\,\mathrm{ad}\,a}c)_\rho = e^{\tau\rho(a)}c_\rho$. Согласно условиям общности положения $c_\rho=\rho(a)b_\rho\neq 0$, $\rho(a)\neq\rho'(a)$, $\forall\rho,\rho'\in R$. Поэтому все интегралы сходятся лишь при условии $\Lambda \not\angle (E_+\oplus 0)$. Поскольку Λ — лагранжева плоскость, то последнее соотношение эквивалентно включению $(E_+\oplus 0)\subset\Lambda$. Таким образом, пространство $E_+\oplus 0$, а значит, и его подпространство $E_0\oplus 0$ изотропны. В то же время $\sigma((x, 0), (x', 0)) = \langle\psi, [x, x']\rangle$, и из (10) вытекает, что пространство $E_0\oplus 0$ изотропно лишь в том случае, когда оно нулевое.

Следствие 1. Если $\mathfrak{M}$ — компактная алгебра Ли, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi G_t'' = +\infty$.

Следствие 2. Если $\mathfrak{M}=\mathrm{sl}_{\mathbb{R}}(n)$ и матрица $a\in\mathrm{sl}_{\mathbb{R}}(n)$ имеет не более одного вещественного собственного значения, то $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi G_t'' = +\infty$.

Дальнейшее исследование проведем в предположениях, что выполнено необходимое условие конечности $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{ind}\,\psi G_t''$; иными словами, до конца настоящего пункта предполагается, что $R_0=\varnothing$. В этом случае $\mathrm{im\,ad}\,\psi = E_+\oplus E_-$,

$$\langle \omega, [x, x'] \rangle = \mathrm{Re}\left(\sum_{\rho\in R^+} \rho(\omega)(x_\rho x'_{-\rho} - x_{-\rho}x'_\rho)\right),$$

$$\forall\omega\in\mathscr{H},\quad x, x'\in\mathrm{im\,ad}\psi$$

Для всякого $x\in\mathrm{im\,ad}\,\psi$ обозначим через x^+ ортогональную проекцию x на E_+, а через x^- — ортогональную проекцию x на

E_-. Тогда

$$\langle x^+, x^+ \rangle = \langle x^-, x^- \rangle = 0, \quad \langle x^+, x^- \rangle = \operatorname{Re}\left(\sum_{\rho\in R^+} x_\rho x_{-\rho}\right).$$

Сделаем замену переменных в уравнении Якоби (7), положив $\xi=[\eta, \psi]$, $x=y-\eta$. В переменных (y, η) система (7) принимает вид:

$$\gamma_0\dot{y} = \langle [y, \eta], e^{\tau \operatorname{ad} a} c \rangle e^{\tau \operatorname{ad} a} c$$

$$\dot{\eta}=0, \quad y, \eta\in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi. \tag{11}$$

Симплектическая структура $\bar{\sigma}$ на $\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \oplus \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$ в этих переменных выглядит так:

$$\bar{\sigma}((y, \eta), (y', \eta')) = \langle \psi, [y, y'] - [\eta, \eta'] \rangle.$$

Гамильтониан $h_\tau(y, \eta) = \frac{1}{2\gamma_0} \langle y, [\psi, e^{\tau \operatorname{ad} a} c] \rangle^2$. Кривая Δ_τ, $\tau \geqslant 0$, на лагранжевом грассманиане $L(\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \oplus \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi)$ порождается системой (10) с начальным условием $\Delta_0 = \{(y, y) \mid y\in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi\}$.

Заметим, что изотропное подпространство $0\in E_+$ лежит в $\ker h_\tau$ $\forall \tau\in \mathbb{R}$. При этом $(0 \oplus E_+)^{\angle} = \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi \oplus E_+$, а симплектическое пространство $(0 \oplus E_+)^{\angle}/(0 \oplus E_+)$ естественно изоморфно пространству $\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$ с симплектической структурой $\tilde{\sigma}(y, y') = \langle \psi, [y, y'] \rangle$, $y, y'\in \operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$.

Гамильтонину $\tilde{h}_\tau(y) = \frac{1}{2\gamma_0} \langle y, [\psi, e^{\tau \operatorname{ad} a} c] \rangle^2$ на $\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi$ отвечает гамильтонова система

$$\gamma_0\dot{y} = \langle [y, \psi], e^{\tau \operatorname{ad} a} c \rangle e^{\tau \operatorname{ad} a} c \tag{12}$$

Пусть $\tilde{\Delta}_\tau$ — кривая на лагранжевом грассманиане $L(\operatorname{im} \operatorname{ad} \psi)$, порожденная системой (12) с начальным условием $\tilde{\Delta}_0 = E_+$. Следствие леммы 2 позволяет выразить $\operatorname{ind} \Delta|_{[0,t]}$ через $\operatorname{ind} \tilde{\Delta}_{[0,t]}$. Анализ этого выражения позволяет несколько уточнить общую оценку, данную в том же следствии. Имеем

$$-\frac{1}{4} \operatorname{rank} \operatorname{ad} \psi \leqslant \operatorname{ind} \tilde{\Delta}|_{[0,t]} - \operatorname{ind} \Delta|_{[0,t]} \leqslant \operatorname{rank} \operatorname{ad} \psi \quad \forall t > 0.$$

Напомним, что точка $t>0$ называется сопряженной нулю для кривой $\tilde{\Delta}_\tau$, если $\tilde{\Delta}_0 \cap \tilde{\Delta}_t \neq 0$. Согласно следствию теоремы 3.2

$$\operatorname{ind} \tilde{\Delta}|_{[0,t]} = \sum_{0<\tau<t} \dim(\tilde{\Delta}_\tau \cap \tilde{\Delta}_0) \quad \forall t > 0;$$

в частности, на каждом отрезке $[0, t]$ содержится лишь конечное число сопряженных нулю точек.

Пусть x_τ — произвольное решение системы (12), положив $x_\tau = e^{\tau \quad a} u_\tau$, получим

$$\gamma_0\dot{u} = -(\gamma_0 \operatorname{ad} a + \langle \psi, [c, u] \rangle) c\cdot \tag{13}$$

Линейное преобразование $u \mapsto \frac{1}{\gamma_0} \langle \psi, [c, u] \rangle c = \frac{1}{\gamma_0} \langle [\psi, c], u \rangle c$ пространства $\operatorname{im}\operatorname{ad}\psi$ обозначим символом $[\psi, c/\gamma_0] \otimes c$. Тогда

$$\tilde{\Delta}_t = e^{t\,\mathrm{ad}\,a} e^{t([\psi, c/\gamma_0]\otimes c - \mathrm{ad}\,a)} E_+ \quad \forall t \geqslant 0.$$

Поскольку $e^{t\,\mathrm{ad}\,a} E_+ = E_+$, то

$$\dim(\tilde{\Delta}_t \cap \tilde{\Delta}_0) = \dim(\tilde{\Delta}_t \cap E_+) = \dim(E_+ \cap e^{t([\psi, c/\gamma_0]\otimes c - \mathrm{ad}\,a)} E_+).$$

Следовательно,

$$\operatorname{ind} \tilde{\Delta}|_{[0,t]} = \sum_{0<\tau<t} \dim(E_+ \cap e^{\tau([\psi, c/\gamma_0]\otimes c - \mathrm{ad}} E_+). \tag{14}$$

Лемма 3. Пусть h — квадратичный стационарный гамильтониан на некотором симплектическом пространстве Σ,

$$\dot{x} = Hx, \quad x \in \Sigma,$$

— соответствующая гамильтонова система.

Тогда существует такая лагранжева плоскость $\Lambda_0 \in L(\Sigma)$, что

1) Подпространство $\Lambda_0 \cap H\Lambda_0$ инвариантно относительно H.

2) Для любого $t > 0$

$$\sum_{0<\tau<t} \dim(\Lambda_0 \cap e^{\tau H}\Lambda_0 / \Lambda_0 \cap H\Lambda_0) = \sum_{j=1}^{l} [t\nu_j],$$

где $\pm i\pi\nu_1, \ldots, \pm i\pi\nu_l$ — все чисто мнимые собственные значения матрицы H, причем каждое взято столько раз, какова его кратность; квадратные скобки [ ] означают целую часть стоящего в них числа.

3) Если для некоторого $\Lambda \in L(\Sigma)$ квадратичная форма $h|\Lambda$ неотрицательна, $h|\Lambda \geqslant 0$, то и $h|\Lambda_0 \geqslant 0$.

Мы опустим доказательство этой леммы, плоскость Λ_0 явно вычисляется через канонические формы Вильямсона линейных гамильтоновых систем (описание этих форм имеется, например, в [9]).

Автономная гамильтонова система (13) отвечает гамильтониану

$$h = \frac{1}{2\gamma_0} \langle [\psi, c], u \rangle^2 + \frac{1}{2} \langle [\psi, u], [a, u] \rangle, \quad u \in \operatorname{im}\operatorname{ad}\psi.$$

Поскольку $[\omega, E_+] \subset E_+ \ \forall \omega \in \mathscr{H}$ и $\langle E_+, E_+ \rangle = 0$, то $h|_{E_+} \geqslant 0$.

Пусть $H = [\psi, c/\gamma_0] \otimes c - \mathrm{ad}\,a$ и $L(\operatorname{im}\operatorname{ad}\psi) \ni \Lambda_0$ — лагранжева плоскость, существование которой гарантируется леммой 3. Так как $h|_{E_+} \geqslant 0$, $h|_{\Lambda_0} \geqslant 0$, и гамильтониан h является первым интегралом собственной гамильтоновой системы, то $e^{\tau H}\Lambda_0$, $e^{\tau H}E_+$, $\tau \geqslant 0$, — неубывающие кривые на $L(\operatorname{im}\operatorname{ad}\psi)$. Лемма 2 позволяет выразить $\operatorname{ind}(e^{\tau H}E_+|_{[0,t]})$ через $\operatorname{ind}(e^{\tau H}\Lambda_0|_{[0,t]})$.

Во всяком случае,

$$|\operatorname{ind}(e^{\tau H}E_+|_{[0,t]}) - \operatorname{ind}(e^{\tau H}\Lambda_0|_{[0,t]}) + \dim(\Lambda_0 \cap H\Lambda_0)| \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{rank}\operatorname{ad}\psi,$$

$\forall t > 0$.

С другой стороны, из теорем 3.1, 3.2 следует, что

$$\operatorname{ind}(e^{\tau H}E_+|_{[0,t]}),=\sum_{0<\tau>t}\dim(E_+\cap e^{\tau H}E_+),$$

$$\operatorname{ind}(e^{\tau H}\Lambda_0|_{[0,t]})=\sum_{0<\tau<t}\dim(\Lambda_0\cap e^{\tau H}\Lambda_0\Lambda_0\cap H\Lambda_0).$$

Из формулы (14) выводим тождество

$$\operatorname{ind}\tilde{\Delta}|_{[0,t]}=\operatorname{ind}(e^{\tau H}E_+|_{[0,t]})\ \forall t>0.$$

Утверждение 2) леммы 3 сводит теперь вычисление $\operatorname{ind}\tilde{\Delta}|_{[0,t]}$ к вычислению чисто мнимых собственных чисел матрицы $H=[\psi, c/\gamma_0]\otimes c-\operatorname{ad}a$. Во всяком случае, $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{ind}\tilde{\Delta}|_{[0,t]}<+\infty$ тогда и только тогда, когда матрица H не имеет ненулевых чисто мнимых собственных значений. Собирая вместе установленные выше неравенства, получаем

Предложение 3. Если $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{ind}\psi G_t''<+\infty$, то

$$\operatorname{ind}\psi G_t''\leqslant\frac{1}{4}\min\{5\operatorname{rank}\operatorname{ad}\psi, \operatorname{codim}\mathscr{H}\}\quad\forall t>0.$$

Замечание. Неравенство $\operatorname{ind}\psi G_t''\leqslant\frac{1}{4}\operatorname{codim}\mathscr{H}=\frac{1}{4}(\dim\mathfrak{M}-\operatorname{rank}\mathfrak{M})$ непосредственно вытекает из приведенных выше оценок лишь для регулярных $\psi\in\mathscr{H}\cap b^{\perp}$, на нерегулярные ψ оно распространяется по непрерывности.

Ситуацию, когда $\operatorname{ind}\psi G_t''\to+\infty$ $(t\to\infty)$ естественно называть эллиптической (якобиева кривая «колеблется»), а когда $\operatorname{ind}\psi G_t''$ ограничен на полупрямой $(0, +\infty)$ — гиперболической (якобиева кривая «не колеблется»). Для того, чтобы отделять одну ситуацию от другой, нужно уметь выяснять, имеет ли матрица $[\psi, c/\gamma_0]\otimes c-\operatorname{ad}a$ чисто мнимые собственные значения. Знание же самих чисто мнимых собственных значений сразу дает (см. утверждение 2 леммы 3) значение $\operatorname{ind}\psi G_t''$ с точностью до величины «порядка $\operatorname{rank}\operatorname{ad}\psi$».

Скоро мы выразим характеристический полином матрицы $([\psi, c/\gamma_0]\otimes c-\operatorname{ad}a)$ через числа γ_i, $i=0, 1,\ldots$ (см. стр. 186) и коэффициенты характеристического полинома матрицы $\operatorname{ad}a$.

Согласно равенствам (8), (10), координатная запись системы (13) имеет вид

$$\gamma_0\dot{u}_\rho=-\gamma_0\rho(a)u_\rho+\operatorname{Re}\Bigl(\sum_{\rho\in R}\rho(\psi)c_\rho u_{-\rho}\Bigr)c_\rho,\quad\rho\in R.$$

Для любого $\rho \in R_+$ положим

$$v_\rho = \frac{\rho(\psi)}{2}(c_\rho u_{-\rho} - c_{-\rho} u_\rho)$$

$$v'_\rho = \frac{\rho(\psi)}{2}(c_\rho u_{-\rho} + c_{-\rho} u_\rho).$$

Тогда

$$\dot{v}_\rho = \rho(a)\, v'_\rho$$

$$\gamma_0 \dot{v}'_\rho = \gamma_0 \rho(a)\, v_\rho + \operatorname{Re}\left(\sum_{\rho \in R_+} v_\rho\right) \rho(\psi)\, c_\rho c_{-\rho}, \quad \rho \in R_+.$$

Следовательно,

$$\gamma_0 \ddot{v}_\rho = \gamma_0 \rho(a)^2 v_\rho + \rho(a)\ \rho(\psi)\, c_\rho c_{-\rho} \operatorname{Re}\left(\sum_{\rho \in R^+} v_\rho\right), \quad \rho \in R_+. \quad (15)$$

Пусть $N = \dim E_+$, напомним, что

$$\gamma_k = \langle \psi, [\mathrm{ad}^{k+1} ab, \mathrm{ad}^k ab] \rangle = (-1)^{k-1} 2 \operatorname{Re}\left(\sum_{\rho \in R^+} \rho(\psi)\, \rho(a)^{2k-1} c_\rho c_{-\rho}\right)$$

Сделаем линейную замену переменных в системе (15), положив

$$w_k = \operatorname{Re} \sum_{\rho \in R_+} \rho(a)^{2k} v_\rho, \quad k = 0, 1, \ldots, N.$$

Имеем

$$\gamma_0 \ddot{w}_k = \gamma_0 w_{k+1} + (-1)^k \gamma_{k+1} w_0, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Еще одно недостающее уравнение получается из условия, что числа $\pm\rho(a)$, $\rho \in R_+$, являются корнями характеристического полинома оператора $\mathrm{ad}\, a$. Пусть

$$\det(\mathrm{ad}\, a - sI) = s^{\operatorname{rank} \mathfrak{M}} \sum_{j=1}^{N} (-1)^j \alpha_j s^{2j},$$

тогда

$$\sum_{j=0}^{N} (-1)^j \alpha_j w_j = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \gamma_j = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \alpha_k \gamma_j w_0^{(2k-2j)} = 0.$$

Пусть $\varphi(s)$ — характеристический полином последнего уравнения, $\varphi(s) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k+j} \alpha_k \gamma_j s^{2(k-j)}$. Корни этого полинома есть характеристические корни системы (13). После элементарных преобразований получаем

$$\frac{1}{s}\varphi(\sqrt{-s})=\sum_{j=1}^{N}s^{j-1}\sum_{k=j}^{N}\alpha_k\gamma_{k-j}.$$

Теперь подытожим основные результаты, полученные в настоящем пункте. Все формулируется в терминах набора чисел α_k, γ_k, $k=0,\ldots,N-1$, где $N=\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{M}-\operatorname{rank}\mathfrak{M})$. Напомним, что числа α_k зависят лишь от $a\in\mathfrak{M}$, а числа γ_k зависят также от $b\in\mathfrak{M}$ и (линейно) от $\psi\in\mathscr{H}\cap b^{\perp}$, где $\mathscr{H}$ — подалгебра Картана, содержащая a. Предполагается выполненным условие общности положения:

$$\operatorname{codim}\operatorname{span}\{\operatorname{ad}^j ab\,|\,0\leqslant j\leqslant 2N\}=\operatorname{rank}\mathfrak{M}-1.$$

В процессе вычислений мы предполагали также, что $\gamma_0>0$, однако от этого условия легко избавиться.

Теорема 1. I) Пусть $t>0$. Тогда $\operatorname{ind}\psi G''_t<+\infty\Leftrightarrow$первое отличное от нуля число в последовательности $\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{N-1}$ положительно.

II) Пусть $\operatorname{ind}\psi G''_t<+\infty$ для некоторого (а значит, любого) $t>0$. Тогда $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{ind}\psi G''_t<+\infty\Leftrightarrow$многочлены $\sum\limits_{j=0}^{N}\alpha_j s^j$ и $\sum\limits_{j=1}^{N}s^{j-1}\sum\limits_{k=j}^{N}\alpha_k\gamma_{k-j}$ от переменной $s\in\mathbf{R}$ не имеют положительных вещественных корней.

III) Если $\lim\limits_{t\to+\infty}\operatorname{ind}\psi G''_t<+\infty$, то $\operatorname{ind}\psi G''_t\leqslant\frac{N}{2}$ $\forall t>0$.

В заключение применим теорему 1 к некоторым алгебрам Ли ранга 2. В этом случае $\dim(\mathscr{H}\cap b^{\perp})=1$, а вектор ψ определен однозначно с точностью до скалярного множителя. Условие общности положения обеспечивает отличие от нуля хотя бы одного из чисел γ_k, $k=0,1,\ldots,N-1$.

1) $\mathfrak{M}=\mathrm{so}(1,3)$ — алгебра Ли группы Лоренца. Здесь $N=2$, $\alpha_1^2\leqslant4\alpha_0$. Если $2\sqrt{\alpha_0}+\alpha_1\neq0$, $\gamma_0\geqslant0$, $\alpha_1\gamma_0+\gamma_1\geqslant0$, то $\operatorname{ind}\psi G''_t\leqslant1$ $\forall t>0$.

В противном случае $\operatorname{ind}\psi G''_t\to+\infty$ $(t\to+\infty)$.

2) $\mathfrak{M}=\mathrm{so}(2,2)$. Снова $N=2$, однако $4\alpha_0\leqslant\alpha_1^2$. Если $\alpha_0>0$, $\alpha_1>0$, $\gamma_0\geqslant0$, $\alpha_1\gamma_0+\gamma_1\geqslant0$, то $\operatorname{ind}\psi G''_t\leqslant1$ $\forall t>0$.

В противном случае $\operatorname{ind}\psi G''_t\to+\infty$ $(t\to+\infty)$.

3) $\mathfrak{M}=\mathrm{so}(4)$. Это компактная алгебра Ли, поэтому всегда $\operatorname{ind}\psi G''_t\to+\infty$ $(t\to+\infty)$.

4) $\mathfrak{M}=\mathrm{sl}_{\mathbf{R}}(3)$. Здесь $N=3$. Если $\alpha_j>0$, $j=0,1,2$, $\gamma_0\geqslant0$ и,

либо $(\alpha_2\gamma_0+\gamma_1)^2<4\gamma_0(\alpha_1\gamma_0+\alpha_2\gamma_1+\gamma_2)$, либо $(\alpha_2\gamma_0+\gamma_1\geqslant 0)\&\alpha_1\gamma_0+$ $+\alpha_2\gamma_1+\gamma_2\geqslant 0)$, то $\operatorname{ind}\psi G_t''\leqslant 1\ \forall t>0$.

В противном случае $\operatorname{ind}\psi G_t''\to+\infty\ (t\to+\infty)$.

2. Если в предыдущем пункте мы рассматривали системы с одним управляющим параметром, то здесь, напротив, займемся одним классом систем, в которых управляющих параметров достаточно много. Для этих систем $\operatorname{ind}\psi G_t''$ для фиксированного $\psi\perp\operatorname{im}G_t'$ вычисляется совсем просто, поэтому появляется возможность явно описать разбиение $(\operatorname{im}G_t')^\perp$ на области, отвечающие различным значениям индекса, и найти группы гомологий множества $\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0$.

Пусть M — компактная полупростая групп Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{M}$. Угольные скобки $\langle .,.\rangle$, как и выше, обозначают форму Киллинга на $\mathfrak{M}$, эта форма отрицательно определена. Пусть a — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{M}$, $\langle a, a\rangle=-1$, и $\mathscr{H}$ — подалгебра Картана в $\mathfrak{M}$, содержащая элемент a. Обозначим через U пересечение сферы $\{x\in\mathfrak{M}\,|\,\langle x,x\rangle=-1\}$ с подпространством $\mathbb{R}a+\mathscr{H}^\perp$,

$$U=\{\alpha a+v\,|\,\alpha\in\mathbb{R},\ v\perp\mathscr{H},\ \langle v,v\rangle=\alpha^2-1\},$$

и рассмотрим управляемую систему

$$\dot\mu=\mu\circ u,\quad u\in U,\quad \mu(0)=\mu_0$$

на M в окрестности управления $\tilde u(\tau)\equiv a$.

Имеем $G_t: u(\cdot)\mapsto\mu_0\circ\overrightarrow{\exp}\int\limits_0^t(e^{\tau\,\mathrm{ad}\,a}u(\tau)-a)\,d\tau$,

$$G_t'v(\cdot)=\int\limits_0^t e^{\tau\,\mathrm{ad}\,a}v(\tau)\,d\tau,\quad v(\tau)\in\mathscr{H}^\perp,\quad \operatorname{im}G_t'=\mathscr{H}^\perp.$$

$$\mathfrak{g}_t(v_1(\cdot),v_2(\cdot))=\int\limits_0^t\Big(\langle v_1(\tau),v_2(\tau)\rangle a+$$
$$+\left[\int\limits_0^\tau e^{\theta\,\mathrm{ad}\,a}v_1(\theta)\,d\theta,\ e^{\tau\,\mathrm{ad}\,a}v_2(\tau)\right]d\tau+\mathscr{H}^\perp, \tag{16}$$

$$G_t''=\mathfrak{g}_t\big|_{\ker G_t'\times\ker G_t'}.$$

Обозначение начальной точки μ_0 в выражениях для G_t' и G_t'' можно опускать, пользуясь отождествлением $T_{\mu_0}M\approx\mathfrak{M}$. Также без особых оговорок ниже используется отождествление $\mathfrak{M}^*\approx\mathfrak{M}$, определяемое формой Киллинга.

Предложение 4. Пусть $\psi\in\mathscr{H}\setminus 0$, $t>0$. Тогда

$$\operatorname{ind}\psi G_t''<+\infty\Leftrightarrow\langle\psi,a\rangle<0.$$

Доказательство. Поскольку $\langle v, v\rangle < 0$ $\forall v \neq 0$, то из (16) и предложения 3.1 следует, что неравенство $\langle \psi, a\rangle \leqslant 0$ является необходимым, а неравенство $\langle \psi, a\rangle < 0$ достаточным условиями конечности $\operatorname{ind} \psi G_t''$. Остается еще случай $\langle \psi, a\rangle = 0$. В этом случае, согласно предложению 3.1, для конечности $\operatorname{ind} \psi G_t''$ необходимо выполнение тождества

$$\langle \psi, [e^{\tau \operatorname{ad} a} v_1, e^{\tau \operatorname{ad} a} v_2]\rangle = 0 \quad \forall v_1, v_2 \perp \mathscr{H}, \quad \forall \tau \in [0, t].$$

Это тождество однако не выполняется, т. к.

$$\langle \psi, [e^{\tau \operatorname{ad} a} v_1, e^{\tau \operatorname{ad} a} v_2]\rangle = \langle \psi, e^{\tau \operatorname{ad} a}[v_1, v_2]\rangle = \langle \psi, [v_1, v_2]\rangle$$

и

$$[\mathscr{H}^\perp, \mathscr{H}^\perp] \supset \mathscr{H}. \blacksquare$$

Итак, при вычислении $\operatorname{ind} \psi G_t''$ нужно рассмотреть лишь случай $\langle \psi, a\rangle < 0$. Ниже предполагается выполненным условие нормировки $\langle \psi, a\rangle = -1$.

Перейдем к описанию уравнения Якоби. В пункте 1 § 3 произвольному подпространству $\Pi \subset T_{\mu_0} M$ и ковектору $\psi \perp \Pi$ сопоставлено симплектическое пространство $E_{\Pi, \psi}$, а в пункте 1 настоящего параграфа (см. стр. 186) описана естественная модель этого пространства в случае, когда M — полупростая группа Ли. В нашей ситуации $\Pi = \mathscr{H}^\perp$, а $E_{\Pi,\psi}$ естественно изоморфно пространству $\mathscr{H}^\perp \oplus \mathscr{H}^\perp$ с кососкалярным произведением

$$\bar{\sigma}: (x_1, \xi_1) \wedge (x_2, \xi_2) \mapsto \langle \psi, [x_1, x_2]\rangle + \langle \xi_2, x_1\rangle - \langle \xi_1, x_2\rangle,$$
$$x_i, \xi_i \in \mathscr{H}^\perp, \quad i = 1, 2.$$

Уравнению Якоби соответствует гамильтонова система на этом пространстве, определяемая гамильтонианом

$$h(x, \xi) = -\frac{1}{2}\langle [x, \psi] + \xi, [x, \psi] + \xi\rangle \quad x, \xi \in \mathscr{H}^\perp.$$

Как видим, гамильтониан оказался автономным. Гамильтонова система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = [\psi, x] - \xi \\ \dot{\xi} = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Якобиева кривая Λ_τ, $\tau \geqslant 0$, есть гладкая кривая на лагранжевом грассманиане $L(\mathscr{H}^\perp \oplus \mathscr{H}^\perp)$, определяемая системой (17) с начальным условием

$$\Lambda_0 = 0 \oplus \mathscr{H}^\perp = \{(x, \xi) \mid x = 0, \ \xi \in \mathscr{H}^\perp\}.$$

Стало быть,

$$\Lambda_t = \left\{ \left(\int_0^t e^{(t-\tau)\operatorname{ad}\psi} d\tau \xi, \ \xi \right) \middle| \ \xi \in \mathscr{H}^\perp \right\}.$$

Согласно следствию из теоремы 3.2

$$\operatorname{ind}\psi G_t^\circ = \operatorname{ind}\Lambda|_{[0,t]} = \sum_{0<\tau<t} \dim(\Lambda_0 \cap \Lambda_\tau).$$

Поскольку $\mathfrak{M}$ — компактная алгебра Ли, то все ее корни чисто мнимые. Пусть $\dim \mathscr{H}^\perp = 2N$, и $\rho_1, \ldots, \rho_N \in \mathscr{H}$ таковы, что линейные формы на $\mathscr{H}$ вида $\omega \mapsto \pm 2\pi i\langle\rho_j, \omega\rangle$, $j=1,\ldots,N$, составляют полный набор корней подалгебры Картана $\mathscr{H}$. Получаем

Предложение 5. Если $t>0$ таково, что числа $t\langle\rho_j, \psi\rangle$, $j=1,\ldots,N$, не являются целыми, то

$$\operatorname{ind}\psi G_t'' = 2\sum_{j=1}^{N} [t|\langle \rho_j, \psi\rangle|],$$

где [ ] — «целая часть».

Напомним, что ψ имеет нормировку: $\langle \psi, a\rangle = -1$. Положим $\Omega(t) = \{\omega \in \mathscr{H} \mid \langle \omega, a\rangle = -t\}$,

$$\Omega_k(t) = \{\omega \in \Omega(t) \mid \operatorname{ind}\omega G_t'' \leqslant k\}, \quad k=0, 1, \ldots.$$

Из предложения 5 следует, что

$$\Omega_{2k}(t) = \left\{\omega \in \Omega(t) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{N} [|\langle \rho_j, \omega\rangle|] \leqslant k\right\}, \quad \Omega_{2k+1}(t) = \Omega_{2k}(t),$$
$$k=0, 1, \ldots.$$

Не ограничивая общности, можем (и будем) считать, что все формы ρ_j отрицательны на векторе a, т. е. $\langle\rho_j, a\rangle < 0$, $j=1,\ldots,N$.

Пусть

$$\Omega^-(t) = \{\omega \in \Omega(t) \mid \langle\rho_j, \omega\rangle \leqslant 0,\ j=1,\ldots,N\}$$

и

$$\Omega_k^-(t) = \Omega_k(t) \cap \Omega^-(t),\ k=0, 1, \ldots.$$

Множество $\Omega^-(t)$ — пересечение гиперплоскости $\Omega(t)$ с замыканием камеры Вейля, содержащей вектор a, — представляет собой симплекс размерности $\dim \mathscr{H} - 1$. Оказывается, фильтрации $\Omega_0(t) \subset \Omega_2(t) \subset \ldots \subset \Omega(t)$ и $\Omega_0^-(t) \subset \Omega_2^-(t) \subset \subset \ldots \subset \Omega^-(t)$ гомотопически эквивалентны. Именно, справедлива

Лемма 3. Имеется гомотопическая ретракция $\Omega(t)$ на $\Omega^-(t)$, сохраняющая фильтрацию $\Omega_k(t)$, $k=0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Пусть $\dim \mathscr{H} = r$. Среди корней $2\pi i\rho_1, \ldots, 2\pi i\rho_N$ имеется ровно r простых, не ограничивая общности, можно считать, что это $2\pi i\rho_1, \ldots, 2\pi i\rho_r$. Векторы $\rho_1, \ldots, \rho_r$ образуют базис линейного пространства $\mathscr{H}$. Любой вектор ρ_j, $j=1,\ldots,N$, является линейной комбинацией векторов $\rho_1, \ldots, \rho_r$ с целыми **неотрицательными** коэффициентами. Для всякого $\omega \in \mathscr{H}$ обозначим через ω_- элемент пространства $\mathscr{H}$, однозначно определяемый условиями

$$\rho_j(\omega_-)=\begin{cases}\langle \rho_j, \omega\rangle, & \text{если } \langle \rho_j, \omega\rangle \leqslant 0,\\ 0, & \text{если } \langle \rho_j, \omega\rangle > 0, \quad j=1, \ldots, r.\end{cases}$$

Искомая гомотопическая ретракция гиперплоскости $\Omega(t)$ на $\Omega^-(t)$ имеет вид:

$$\varphi_s : \omega \mapsto (1-s)\,\omega - \frac{st}{\langle a, \omega_-\rangle}\,\omega_-, \quad \omega \in \Omega(t), \quad s \in [0, 1]. \blacksquare$$

Пусть $\mathbf{Z}$ — кольцо целых чисел, множество $\mathscr{R} = \bigcup_{j=1}^{N} \{\omega \mid \langle \rho_j, \omega\rangle \in \mathbf{Z}\}$ обычно называют диаграммой Штифеля.

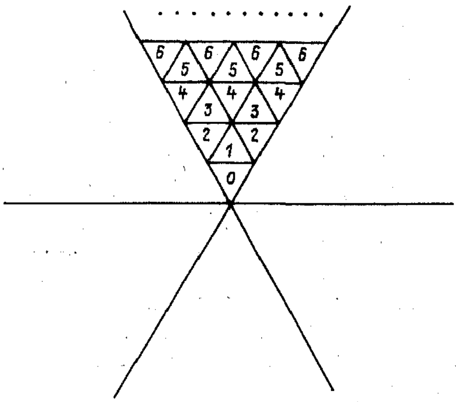
Целочисленная функция $I(\omega) = \sum_{j=1}^{N} [|\langle \rho_j, \omega\rangle|]$ локально постоянна на $\mathscr{H}\setminus\mathscr{R}$. Замыкание каждой компоненты множества $\mathscr{H}\setminus\mathscr{R}$ является выпуклым многогранником, значения функции $I(\omega)$ на паре соседних компонент, смежных по $(r-1)$-мерной грани, и лежащих в одной камере Вейля, отличаются на единицу. Нас интересует лишь сужение этой функции на замыкание камеры Вейля $\{\omega \in \mathscr{H} \mid \langle \rho_j, \omega\rangle < 0, j=1, \ldots, N\}$, на которой наша целочисленная функция принимает вид:

$$I(\omega) = \sum_{j=1}^{N} [-\langle \rho_j, \omega\rangle].$$

Например, для алгебры Ли $\mathrm{su}(r+1)$ число корней $2N = r(r+1)$, на выделенной камере Вейля функция $I(\omega)$ имеет вид:

$$I(\omega) = \sum_{1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant r} \left[-\sum_{j=\alpha}^{\beta} \langle \rho_j, \omega\rangle\right].$$

Случай $r=2$ можно изобразить на рисунке



Из предложения 5 вытекает равенство $\operatorname{ind} \omega G_t'' = 2I(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega(t) \setminus \mathscr{R}$.

Мы уже отмечали, что замыкание любой компоненты связности множества $\mathscr{H} \setminus \mathscr{R}$ является выпуклым многогранником, вершины этих многогранников назовем узлами диаграммы $\mathscr{R}$. Это такие точки $\omega \in \mathscr{R}$, что $\langle \rho_{j_1}, \omega \rangle \in \mathbf{Z}, \ldots, \langle \rho_{j_r}, \omega \rangle \in \mathbf{Z}$ для некоторых линейно независимых векторов $\rho_{j_1}, \ldots, \rho_{j_r}$ из множества $\{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$.

Предложение 6. Предположим, что a не лежит в линейной оболочке никаких $r-1$ векторов из множества $\{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$. Если для данного $t > 0$ квадратичное отображение $\mathfrak{g}_t$ вырождено, то гиперплоскость $\Omega(t)$ содержит узел диаграммы $\mathscr{R}$.

Доказательство. Сделав в формуле (16) замену переменных $\omega(\tau) = e^{\tau \operatorname{ad} a} v(\tau)$, получим квадратичное отображение

$$Q_t(w(\cdot), w(\cdot)) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{g}_t(v(\cdot), v(\cdot)) =$$

$$= \int_0^t \left(\langle w(\tau), w(\tau) \rangle a + \left[\int_0^\tau w(\theta)\, d\theta, w(\tau) \right] \right) d\tau + \mathscr{H}^\perp, \tag{18}$$

$$w(\tau) \in \mathscr{H}^\perp \text{ при } 0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad \int_0^t w(\tau)\, d\tau = 0.$$

Вектор-функция $w(\cdot)$ в том и только том случае является критической точкой отображения Q_t, когда для некоторых $\omega \in \mathscr{H}^\perp \setminus 0$, $b \in \mathscr{H}^\perp$ выполняется тождество

$$\langle \omega, a \rangle w(\tau) + \left[\omega, \int_0^\tau w(\theta)\, d\theta \right] \equiv b, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t. \tag{19}$$

Вырожденность квадратичного отображения Q_t эквивалентна тому, что $Q_t(w(\cdot), w(\cdot)) = 0$ для некоторой ненулевой критической точки $w(\cdot)$. Рассмотрим отдельно два случая

1) $\langle \omega, a \rangle = 0$. Дифференцируя тождество $\left[\omega, \int_0^\tau w(\theta)\, d\theta \right] = b$ по τ, получим $[\omega, w(\tau)] \equiv 0$.

Из тождества $[\omega, w(\tau)] \equiv 0$ следует, что

$$[w(\tau_1), w(\tau_2)] \in \operatorname{span}\{\rho_j \mid \langle \rho_j, \omega \rangle = 0\} + \mathscr{H}^\perp \quad \forall \tau_1, \tau_2 \in [0, t].$$

Среди векторов ρ_j, ортогональных ω, имеется не более $r-1$ линейно независимых, и ортогональная проекция вектора $\int_0^t \left[\int_0^\tau w(\theta)\, d\theta, w(\tau) \right] d\tau$ на $\mathscr{H}$ содержится в их линейной оболочке. В то же время согласно условию, вектор a не содержится в этой линейной оболочке.

2) $\langle\omega, a\rangle\neq 0$. Не ограничивая общности, можем считать, что $\langle\omega, a\rangle=-t$, т. е. $\omega\in\Omega(t)$.

Дифференцируя уравнения (19) по τ, получим $t\dot{w}=[\omega, w]$. Следовательно, $w(\tau)=e^{\frac{\tau}{t}\mathrm{ad}\,\omega}b$.

Равенство $\int_0^t w(\tau)\,d\tau=0$ эквивалентно соотношению $e^{\mathrm{ad}\,\omega}b=b$.

Пусть b_j — ортогональная проекция вектора b на двумерное инвариантное подпространство оператора $\mathrm{ad}\,\omega$, отвечающее собственным значениям $\pm 2\pi i\langle\rho_j, \omega\rangle$, $j=1, \ldots, N$.

Мы видим, что b_j может быть отлично от нуля лишь для тех j, для которых $\langle\rho_j, \omega\rangle\in\mathbf{Z}$. Следовательно,

$$[w(\tau_1), w(\tau_2)]\in\operatorname{span}\{\rho_j \mid \langle\rho_j, \omega\rangle\in\mathbf{Z}\}+\mathscr{H}^{\perp}, \quad \forall\tau_1, \tau_2\in[0, t].$$

Если среди векторов ρ_j, удовлетворяющих условию $\langle\rho_j, \omega\rangle\in\mathbf{Z}$, имеется r линейно независимых, то ω — узел диаграммы $\mathscr{R}$. В противном случае

$$a\notin\operatorname{span}\{[w(\tau_1), w(\tau_2)], \ \tau_1, \tau_2\in[0, t]\}+\mathscr{H}^{\perp}. \ \blacksquare$$

Следствие. Если a не лежит в линейной оболочке никаких $r-1$ векторов из множества $\{\rho_1, \ldots, \rho_N\}$, то на полупрямой $[0, +\infty)$ имеется не более чем счетное число таких точек t, что квадратичное отображение $\mathfrak{g}_t$ вырождено.

В случае, когда $\mathfrak{g}_t$ невырождено, теорема 2 из [1] позволяет весьма точно оценить группы гомологий множества $\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0$ в терминах фильтрации $\Omega_k^-(t)$, $k=0, 1, 2 \ldots$. В частности,

$$\operatorname{rank}\tilde{H}_n\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)\leqslant\sum_{j=0}^{r-1}\operatorname{rank}H^j\left(\Omega_{n+j+1}^-(t), \Omega_{n+j}^-(t)\right), \ n=0, 1, 2, \ldots;$$

при этом, если $r\leqslant 3$ (а также во многих других случаях), неравенство обращается в равенство*). В свою очередь, теорема 4.2 связывает группы гомологий $\tilde{H}_n\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)\approx H_{n+1}\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0), \mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)$ с локальной структурой множества уровня $G_t^{-1}(\mu_0)$.

В заключение настоящего параграфа разберем до конца случай $\mathfrak{M}=\mathrm{su}(3)$.

Подалгебра Картана $\mathscr{H}$ двумерна, $N=3$. Введем в $\mathscr{H}$ координаты $\omega=(\omega_1, \omega_2)$, положив $\omega_1=\langle\rho_1, \omega\rangle$, $\omega_2=\langle\rho_2, \omega\rangle$, тогда $\langle\rho_3, \omega\rangle=\omega_1+\omega_2$.

---

*) Напомним, что $\tilde{H}_n(\cdot)$ означает n-мерную приведенную группу сингулярных гомологий.

Форма Киллинга имеет вид:

$$\langle \omega, \omega \rangle = -2\left(\omega_1^2+\omega_2^2+(\omega_1'+\omega_2)^2\right);$$

$$\rho_1=\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right), \quad \rho_2=\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right), \quad \rho_3=\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right).$$

Пусть $a_1=\langle\rho_1, a\rangle$, $a_2=\langle\rho_2, a\rangle$, по условию $a_1<0$, $a_2<0$. Мы предполагаем выполненными условия общности положения, сформулированные в предложении 6, в данном случае они сводятся к соотношению $a_1\neq a_2$.

Прямая $\Omega(t)$ определяется уравнением

$$(2a_1+a_2)\,\omega_1+(a_1+2a_2)\,\omega_2=\frac{t}{2}.$$

Положим

$$\alpha=\frac{2a_1+a_2}{a_1+2a_2}, \quad \tau=\frac{-t}{2(a_1+2a_2)}.$$

По условию $\alpha>0$, $\tau>0$, $\alpha\neq 1$. При перемене местами корней ρ_1 и ρ_2 число α меняется на $\frac{1}{\alpha}$, поэтому без ограничения общности можно считать, что $0<\alpha<1$.

Пусть $\nu=-\omega_1$, отрезок $\Omega^-(t)$ имеет вид

$$\Omega^-(t)=\left\{(-\nu, \alpha\nu-\tau)\,|\,0\leqslant\nu\leqslant\frac{\tau}{\alpha}\right\}.$$

Отождествим $\Omega^-(t)$ с отрезком $0\leqslant\nu\leqslant\frac{\tau}{\alpha}$.

Имеем

$$I(\nu)=[\nu]+[\tau-\alpha\nu]+[\tau+(1-\alpha)\,\nu],$$

$$\Omega_{2k}^-(t)=\mathrm{cl}\left\{\nu\in\left[0, \frac{\tau}{\alpha}\right]\,\Big|\,[\nu]+[\tau-\alpha\nu]+[\tau+(1-\alpha)\,\nu]\leqslant k\right\},$$

$$\Omega_{2k+1}^-(t)=\Omega_{2k}^-(t), \quad k=0, 1, \ldots.$$

Предположим, что ни одно из чисел вида $\tau-\alpha j$, $j=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ не является целым. Тогда, согласно предложению 6, квадратичное отображение $\mathfrak{g}_t$ невырождено.

Далее $\mathfrak{g}_t^{-1}(0)=0$ в том и только том случае, когда $\Omega_0^-(t)=\varnothing$. Следовательно,

$$\hat{\mathfrak{g}}_t^{-1}(0)=0\Leftrightarrow\tau<\alpha.$$

Ниже предполагается, что $\tau>\alpha$.

Напомним, что

$$\tilde{H}_n\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)\approx H^0\left(\Omega_{n+1}^-(t), \Omega_n^-(t)\right)\oplus H^1\left(\Omega_{n+2}^-(t), \Omega_{n+1}^-(t)\right),$$

$$n=0, 1, 2\ldots$$

(здесь действительно имеется изоморфизм, а не только равенство рангов, поскольку группы, стоящие в правой части, не имеют кручения).

Там, где это удобно, вместо групп гомологий $\tilde{H}_n(\cdot)$ отдельно для каждой размерности n, мы будем рассматривать градуированные группы $\tilde{H}(\cdot)=\bigoplus_{n=0}^{+\infty}\tilde{H}^n(\cdot)$.

Введем обозначения: $\varepsilon=[\tau-[\tau]-\alpha]$; $\iota(n)=4n+4\left[\frac{\tau-n}{\alpha}\right]-2$ для $n=0, 1, \ldots, [\tau]$.

Тогда

$$\tilde{H}\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)\approx\tilde{H}\left(S^{4[\tau]-2+\varepsilon}\right)\bigoplus_{n=1}^{[\tau]+\varepsilon}\left(\tilde{H}\left(S^{\iota(n)-1}\vee S^{\iota(n)}\setminus 0\right)\right).$$

В частности,

$$\operatorname{rank}\tilde{H}\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\right)=2([\tau]+\varepsilon)=1.$$

Следовательно, ранг группы $\tilde{H}\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)$ стремится к бесконечности при $t\to+\infty$ (в то время как для скалярной квадратичной формы этот ранг не превосходит единицы!). Интересно рассмотреть асимптотические свойства этой градуированной группы при $t\to+\infty$ (при фиксированном a). Напомним, что τ является линейной функцией от t. Положив $d(t)=\min\left\{n \mid \tilde{H}_n\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)\neq 0\right\}$, $D(t)=\max\left\{n \mid \tilde{H}_n\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)\neq 0\right\}$, получим

$$\operatorname{rank}\tilde{H}\left(\mathfrak{g}_t^{-1}(0)\setminus 0\right)\approx 2\tau \quad (t\to+\infty)$$

$$d(t)\approx 4\tau \quad (t\to+\infty)$$

$$D(t)\approx\frac{4\tau}{\alpha} \quad (t\to+\infty).$$

Таким образом,

$$\frac{d(t)}{D(t)}\to\alpha \quad (t\to+\infty).$$

Интересно, что при больших t группы гомологий ведут себя как непрерывные объекты: параметр α, определяемый положением вектора a в подалгебре Картана, можно восстановить по этим группам. Семейства квадратичных отображений $\mathfrak{g}_t$, $t>0$, оказываются топологически совершенно различными при различных значениях α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А.*, Топология квадратичных отображений и гессианы гладких отображений. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия, 1988, *26*, 85—124
2. —, *Вахрамеев С. А., Гамкрелидзе Р. В.*, Дифференциально-геометрические и теоретико-групповые методы в теории оптимального управления. Ито-

ги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1983, *14*, 3—56 РЖМат, 1983, 5Б609)
3. —, *Гамкрелидзе Р. В.*, Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия. Мат. сб., 1976, *100(142)*, 610—643 (РЖМат, 1977, 10Б540)
4. —, —, Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление. Мат. сб., 1978, *107(149)*, 467—532 (РЖМат, 1979, 4Б583)
5. —, —, Хронологические алгебры и нестационарные векторные поля. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1980, 11, 135—176 (РЖМат, 1980, 4Б541)
6. —, —, Индекс экстремальности и квазиэкстремальные управления. Докл. АН СССР, 1985, *284*, № 4, 777—781 (РЖМат, 1986, 2Б958)
7. —, —, Индексы Морса и Маслова для гладких управляемых систем. Докл. АН СССР, 1986, *287*, № 3, 521—524 (РЖМат, 1986, 8Б696)
8. —, —, *Сарычев А. В.*, Локальные инварианты гладких управляемых систем. ВИНИТИ, 1986. 32 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 4.10.86 г. № 7020-В) (РЖМат, 1987, 1Б641)
9. *Арнольд В. И.*, Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 431 с. (РЖМат, 1975, 6Б433К)
10. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.*, Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973
11. *Гамкрелидзе Р. В.*, Необходимые условия первого порядка и аксиоматика экстремальных задач. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1971, *112*, ч. I, 152—180 (РЖМат, 1971, 12Б677)
12. *Гийемин В., Стернберг С.*, Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981, 500 с. (РЖМат, 1982, 3Б706К)
13. *Лион Ж., Вернь М.*, Представления Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды. М.: Мир, 1983, 217 с. (РЖМат, 1984, 2Б1085К)
14. *Понтрягин Л. С., Болтянский Б. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.*, Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961, 391 с. (РЖМат, 1963, 8В280К)
15. *Сарычев А. В.*, Индекс второй вариации управляемой системы. Мат. сб., 1980, *113(155)*, 464—486 (РЖМат, 1981, 2Б553)
16. *Gamkrelidze R. V.*, Exponential representations of solutions of ordinary differential equations. «Proc. Equadif. IV. Lect. Notes Math., Springer, 1979, *703*, 118—129 (РЖМат, 1979, 9Б123)
17. *Hestenes M. R.*, Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations. «Pacif. J. Math., 1951, *1*, № 4, 525—582
18. *Krener A. J.*, The high order maximal principale and its applications to singular extremals. SIAM J. Control. Optim., 1977, *15*, № 2, 256—293 (РЖМат, 1977, 8Б537)
19. *Morse M.*, The calculus of variations in the large. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1934