М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, Об управляемости динамической системы акустического рассеяния в $\mathbb{R}^3$, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2024, том 539, 31–43

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 539, 2024 г.

М.И. Белишев, А.Ф. Вакуленко

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ В $\mathbb{R}^3$

§0. Введение

Цель работы. В динамической задаче рассеяния для акустического уравнения требуется найти решение (*волну*) $u = u^f(x,t)$ системы

$$u_{tt} - \Delta u + qu = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0); \tag{1}$$

$$u\,|_{|x|<-t} = 0, \qquad t < 0; \tag{2}$$

$$\lim_{s\to\infty} s\,u((s+\tau)\omega, -s) = f(\tau,\omega), \qquad (\tau,\omega) \in \Sigma := [0,\infty) \times S^2; \tag{3}$$

с вещественным *потенциалом* $q = q(x)$ и *управлением* $f \in \mathscr{F} := L_2(\Sigma)$. Пусть $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ имеет компактный носитель. Момент времени $t = 0$ считается финальным. Волны $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть зависящие от времени элементы пространства $\mathscr{H} := L_2(\mathbb{R}^3)$ [3, 8].

Для $\xi > 0$ обозначим $\Sigma^\xi := \{(\tau,\omega) \in \Sigma \mid \tau \geqslant \xi\}$ и введем подпространства

$$\mathscr{F}^\xi := \{f \in \mathscr{F} \mid \operatorname{supp} f \subseteq \Sigma^\xi\},\ \mathscr{H}^\xi := \{y \in \mathscr{H} \mid y\big|_{|x|<\xi} = 0\}, \qquad \xi > 0.$$

Для (запаздывающих) управлений $f \in \mathscr{F}^\xi$, *достижимое множество* это

$$\mathscr{U}^\xi := \{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi\}, \qquad \xi > 0.$$

Оно является подпространством: выполнено $\overline{\mathscr{U}^\xi} = \mathscr{U}^\xi$ [3, 8]. Гиперболичность системы влечет вложение $\mathscr{U}^\xi \subset \mathscr{H}^\xi$. *полное* достижимое множество есть $\mathscr{U} := \{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}\}$. *Дефектные* (недостижимые) подпространства суть

$$\mathscr{D}^\xi := \mathscr{H}^\xi \ominus \mathscr{U}^\xi, \qquad \xi > 0 \tag{4}$$

и $\mathscr{D} := \mathscr{H} \ominus \mathscr{U}$. Последнее описано в [3]. В настоящей работе мы приводим характеризацию пространств $\mathscr{D}^\xi$.

Ключевые слова: динамическая система, описываемая локально-возмущенным волновым уравнением, задача рассеяния, управляемость.

Основной результат. Мы говорим, что функция $a \in \mathscr{H}^\xi$ *q-полигармоническая* порядка n и пишем $a \in \mathscr{A}_n^\xi$, если $(-\Delta+q)^n\, a = 0$ выполнено при всех $|x| > \xi$. Подпространсво

$$\mathscr{A}^\xi := \overline{\operatorname{span}\{\mathscr{A}_n^\xi \mid n \geqslant 1\}}, \qquad \xi > 0 \tag{5}$$

(замыкание в $\mathscr{H}$) назовем q-полигармоническим. Для $q = 0$ – просто полигармоническим.

Наш основной результат о пространстве (4) состоит в следующем.

Теорема 1. *Справедливо равенство*

$$\mathscr{D}^\xi = \mathscr{A}^\xi, \quad \xi > 0. \tag{6}$$

В [2] соотношение (6) доказано для (невозмущенной) системы с $q=0$. В [3], для возмущенной системы доказано вложение $\mathscr{A}^\xi \subset \mathscr{D}^\xi$. Там же построены примеры потенциалов, для которых $\mathscr{D} \neq 0$. Теорема 1 в основном завершает исследование управляемости системы (1)–(3), эволюция которой описывается локально возмущенным волновым уравнением. Краткий обзор результатов по этой теме дан в комментариях в конце работы.

§1. Динамика

Пространства и операторы. Задачу (1)–(3) будем называть кратко *системой* α. Для $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ с компактным носителем задача поставлена корректно: она сводится к уравнению типа Вольтерра (см. (2.3), (2.9), (2.10) в [3]). Управление f будем называть *гладким* если $u^f(\,\cdot\,,t) \in C_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$ при всех $t \leqslant 0$. Несложный анализ упомянутого уравнения типа Вольтерра показывает, что управления класса $C_{\rm loc}(\Sigma)$ являются гладкими. Систему с $q = 0$ мы называем невозмущенной и обозначаем через α_0.

Следующие объекты системы α суть стандартные атрибуты теории систем и теории управления.

1. Пространство управлений $\mathscr{F}$ есть *внешнее пространство* системы α. Оно содержит расширяющееся семейство подпространств $\mathscr{F}^\xi$, $\xi > 0$, состоящее из запаздывающих управлений (ξ – запаздывание).

2. *Внутреннее пространство* состояний (волн) есть $\mathscr{H}$. Оно содержит семейства $\mathscr{H}^\xi$ и достижимые множества $\mathscr{U}^\xi$, состоящие из запаздывающих волн, причем для всех $\xi > 0$ выполнено $\mathscr{U}^\xi \subset \mathscr{H}^\xi$.

3. *Дефектные* (недостижимые) подпространства суть $\mathscr{D}^\xi$, $\xi > 0$ и $\mathscr{D}$.

4. *Оператор управления* системы α это отображение $W : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$,

$$Wf := u^f(\,\cdot\,, 0).$$

В [3] доказано, что он ограничен; его сопряженный W^* называется *оператором наблюдения* .

Невозмущенная система. Все объекты для системы с $q = 0$ помечаются индексом "0". Итак, невозмущенная система α_0 имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0); \tag{7}$$

$$u\,|_{|x|<-t} = 0, \qquad t < 0; \tag{8}$$

$$\lim_{s\to\infty} su((s+\tau)\omega, -s) = f(\tau,\omega), \qquad (\tau,\omega) \in \Sigma; \tag{9}$$

$u_0^f(x,t)$ суть волны. Приведем некоторые известные факты о системе α_0, взятые из [2, 3, 8].

Решение u_0^f представляется в явной форме.

Фиксируем $\omega \in S^2$ и определим

$$\pi_b(\omega) := \begin{cases} \left\{\theta \in S^2 \mid \omega\cdot\theta = b\right\}, & b \in [-1,1];\\ \emptyset, & |b| > 1; \end{cases}.$$

Множество $\pi_b(\omega)$ является параллелью на единичной сфере с северным полюсом ω, длина параллели – $2\pi\sqrt{1-b^2}$: $\pi_0(\omega)$ есть экватор; $\pi_{\pm1}(\omega) = \pm\omega$. Для функции g на S^2, обозначим

$$[g]_b(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-b^2}} \int\limits_{\pi_b(\omega)} g(\theta)\,d\theta, & b \in [-1,1];\\ g(-\omega), & b = -1;\\ g(\omega), & b = 1;\\ 0, & |b| > 1; \end{cases}$$

ее среднее значение на параллели. Следующий результат установлен в [3].

Лемма 1. *Пусть управление f и его производная f_τ лежат в $\mathscr{F}$. Тогда справедливо представление*

$$u_0^f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^2} f_\tau(t + r\omega\cdot\theta, \theta)\,d\theta + \frac{1}{r}[f(0,\,\cdot\,)]_{-\frac{t}{r}}(\omega), \ \ x \in \mathbb{R}^3, \ \ t \leqslant 0, \tag{10}$$

в котором $r = |x|$, $\omega = \frac{x}{|x|}$, $a \cdot b$ *– стандартное скалярное произведение в* $\mathbb{R}^3$, *а* f_τ *продолжено нулем на* $\tau < 0$.

Отметим особенность этого представления: слагаемые в (10) по-отдельности могут не быть квадратично-интегрируемыми в $\mathbb{R}^3$ однако сумма лежит в $L_2(\mathbb{R}^3)$ [3].

Важный для дальнейшего факт состоит в том, что гиперболическая задача (7)–(9) корректна для *любого* управления при условии $f, f_\tau \in L_2^{\rm loc}(\Sigma)$, независимо от его поведения при $\tau \to \infty$, а соответствующее решение $u_0^f(\,\cdot\,, t) \in L_2^{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$, $t \leqslant 0$ дается той же формулой (10). В частности, решение u_0^f корректно определено для любого 'полиномиального' управления

$$\mathscr{P} :=$$
$$\left\{ p^l_{jm}(\tau,\omega) = \tau^{l-2j} Y_l^m(\omega) \,\middle|\, l = 0, 1, \dots;\ 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{l}{2}\right];\ -l \leqslant m \leqslant l \right\}, \qquad (11)$$

где Y_l^m– стандартные сферические гармоники, скобки $[\dots]$ означают целую часть. В отличие от них, управления из $\mathscr{F}$ будем называть *обычными.* В дальнейшем мы будем работать с управлениями класса $\mathscr{F} \dotplus \mathscr{P}$.

Два свойства выделяют класс $\mathscr{P}$. Во-первых, для $p \in \mathscr{P}$ волны u_0^p явным образом выражаются через управления p [2, 4]. Во-вторых, эти волны исчезают в финальный момент:

$$u_0^p(\,\cdot\,, 0) \;=\; 0 \quad \text{в } \mathscr{H},\ \ p \in \mathscr{P}. \qquad (12)$$

см. [2]. Отметим, что оператор управления невозмущенной системы $W_0 : \mathscr{F} \to \mathscr{H}$, $W_0 f = u_0^f(\,\cdot\,, 0)$ унитарен [2, 8], так что для обычных управлений f равенство (12) невозможно.

Выберем $R > 0$ и положим $B_R := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < R\}$, $S_R^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$. Возьмем гладкое управление f с условием $f|_{0 \leqslant \tau < \xi} = 0$ и пусть $\xi < R$. Волна u^f, распространяясь из бесконечности с единичной скоростью, достигает сферы S_R^2 в момент $t = -R + \xi$ и проникает в шар B_R. В интервале времени $[-R + \xi, 0]$ она оставляет след на границе шара S_R^2. В следующей лемме показано, что эти следы образуют полную систему в соответствующем пространстве. Отметим, что в ее формулировке нет необходимости уточнять является ли управление f обычным или полиномиальным, так как "голова волны" $u_0^f|_{B_R \times [-R+\xi, 0]}$ зависит только от "головы управления" $f\big|_{[\xi,R]\times S^2}$ (не зависит от $f\big|_{\tau>R}$). Поэтому можно ограничиться использованием только гладких обычных управлений.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\overline{\{u_0^f\,|_{S^2_R\times[-R+\xi,0]}\ \mid f\ \text{гладкое}\}} = L_2(S^2_R\times[-R+\xi,0]) \tag{13}$$

(замыкание в $L_2(S^2_R\times[-R+\xi,0])$).

Доказательство. **1**. Пусть $f\in\mathscr{F}$. Используя разложения

$$\begin{aligned} f(\tau,\theta) &= \sum_{l\geqslant 0}\ \sum_{-l\leqslant m\leqslant l} f_{lm}(\tau)\,Y^l_m(\theta),\\ u_0^f(x,t) &= \sum_{l\geqslant 0}\ \sum_{-l\leqslant m\leqslant l}\frac{1}{r}\,u_{lm}(r,t)\,Y^l_m(\omega), \end{aligned} \tag{14}$$

где $r=|x|$, $\omega=\frac{x}{|x|}$, находим

$$u_{lm}(r,t)=f_{lm}(r+t)-\frac{1}{r+t}\int\limits_0^{r+t}P_l'\left(\frac{s}{r+t}\right)f_{lm}(s)\,ds,\quad r+t>0, \tag{15}$$

где P_l и P_l' – полином Лежандра порядка l и его производная (см., например, [4]).

2. Фиксируем $r=R>0$, $0<\xi<R$. Суммы

$$h(\omega,t)=\sum_{l=0}^{N}\ \sum_{-l\leqslant m\leqslant l}\frac{1}{R}\,h_{lm}(t)\,Y^l_m(\omega) \tag{16}$$

с гладкими h_{lm} плотны в $L_2(S^2_R\times[-R+\xi,0])$.

Покажем, как найти $f\in\mathscr{F}^\xi$, которое обеспечивает равенство

$$u_0^f(\,\cdot\,,t)\big|_{|x|=R}=h(\,\cdot\,,t),\qquad -R+\xi\leqslant t\leqslant 0. \tag{17}$$

Сравнивая разложения (14) и (16), получим

$$\begin{aligned} h_{lm}(t) &\overset{(17)}{=} u_{lm}(R,t)\\ &\overset{(15)}{=} f_{lm}(R+t)-\frac{1}{R+t}\int\limits_\xi^{R+t}P_l'\left(\frac{s}{R+t}\right)f_{lm}(s)\,ds,\quad -R+\xi\leqslant t\leqslant 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Заменяя переменные, получим уравнения Вольтерра

$$h_{lm}(\tau - R) = f_{lm}(\tau) - \frac{1}{\tau}\int\limits_{\xi}^{\tau} P_l'\left(\frac{s}{\tau}\right) f_{lm}(s)\,ds, \quad \xi \leqslant \tau \leqslant R, \tag{19}$$

которые однозначно и устойчиво разрешимы. Следовательно, мы получили гладкие решения f_{lm}. В частности, в 0-гармонике это просто $f_{00}(t) = h_{00}(t-R)$, $\xi \leqslant t \leqslant R$. Подставляя найденные f_{lm} в (15), мы находим u_{lm} и по (14), получаем волну $u_0^f = \sum\limits_{l=1}^{N} \sum\limits_{-l\leqslant m\leqslant l} \frac{1}{r}\, u_{lm}\, Y_m^l$, что обеспечивает (17).

3. Из плотности гладких управлений в $\mathscr{F}^\xi$ следует (13). $\square$

Отметим одно обстоятельство. Для уравнения (19) справедлива оценка $\|f_{lm}\| \leqslant c_l\,\|h_{lm}\|$ с $c_l \overset{l\to\infty}{\to} \infty$ [4]. Как следствие, отображение $f\ |_{\xi\leqslant t\leqslant R} \mapsto u_0^f\ |_{S_R^2\times[-R+\xi,0]}$ покрывает не все $L_2(S_R^2 \times [-R+\xi, 0])$, а лишь некоторое плотное множество. Это соответствует приближенной управляемости системы с граничным управлением в шаре B_r (см. ниже), которая не является точно управляемой.

Отметим также, что наши рассмотрения близки к проводимым в [6] (разделы 167–169) для внутренней начально-краевой задачи в шаре.

Обозначим через χ_A индикатор (характеристическую функцию) множества A. Фиксируем $\xi > 0$ и обозначим через

$$\mathscr{P}^\xi := \{\chi_{[\xi,\infty)}p \mid p \in \mathscr{P}\} \tag{20}$$

класс полиномиальных управлений с носителем $[\xi,\infty)\times S^2$. Для управлений $g \in \mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi$ гиперболичность ведет к вложению $\operatorname{supp} u_0^g(\,\cdot\,,0) \subset \mathbb{R}^3 \setminus B_\xi$.

Представим полином $p \in \mathscr{P}$ в виде $p = p^\xi + p_\perp^\xi$, $p^\xi = \chi_{[\xi,\infty)}p$, $p_\perp^\xi = \chi_{[0,\xi)}p$. Второе слагаемое – это классическое управление: $p_\perp^\xi \in \mathscr{F}^\xi$ поэтому $u_0^{p_\perp^\xi}(\,\cdot\,,0) \in \mathscr{H}$. Согласно (12), имеем равенство

$$u_0^{p^\xi}(\,\cdot\,,0) \;=\; -u_0^{p_\perp^\xi}(\,\cdot\,,0);$$

при этом $\operatorname{supp} u_0^{p^\xi}(\,\cdot\,,0) \subset \mathbb{R}^3\setminus B_\xi$. Как результат, имеем $u_0^{p^\xi}(\,\cdot\,,0) \in \mathscr{H}^\xi$.

Как показано в [2], каждая волна $u_0^{p^\xi}(\,\cdot\,,0)$ является полигармонической функцией: найдется $n = n(p) \in \mathbb{N}$ такое, что $\Delta^n u_0^{p^\xi}(\,\cdot\,,0) = 0$

выполнено при $|x| > \xi$. Более того, множество $\{u_0^{p^\xi}(\,\cdot\,,0)\mid p\in\mathscr{P}\}$ плотно в дефектном подпространстве $\mathscr{D}_0^\xi = \mathscr{H}^\xi\ominus\mathscr{U}_0^\xi$, где $\mathscr{U}_0^\xi$ – достижимое множество в невозмущенной системе (7)–(9). Таким образом, выполнено соотношение

$$\mathscr{D}_0^\xi \;=\; \mathscr{A}_0^\xi, \qquad \xi > 0, \tag{21}$$

т.е. теорема 1 верна для невозмущенной системы. α_0. Соотношение (21) это основной результат работы [2] (с.м. также [4]).

§2. Возмущенная система

Задача в шаре. Фиксируем $T > 0$ и напомним, что

$$S_R^2 = \{x\in\mathbb{R}^3\mid |x| = R\} = \partial B_R.$$

Как известно [7], задача

$$v_{tt} - \Delta v + qv = 0 \qquad \text{в } B_R\times(0,T); \tag{22}$$

$$v\,|_{t=0} = v_t\,|_{t=0} = 0 \qquad \text{в } B_R; \tag{23}$$

$$v = g \qquad \text{на } S_R^2\times[0,T]; \tag{24}$$

корректна для управлений из $g\in\mathscr{G}^T := L_2(S_R^2\times[0,T])$ а ее решение $v = v^g(x,t)$ лежит в $C([0,T];L_2(B_R))$.

Обозначим через $\mathscr{V}^T := \{v^g(\,\cdot\,,T)\mid g\in\mathscr{G}^T\}$ финальное достижимое множество системы (22)–(24) и пусть $T < R$. Так как скорость волны равна единице, то для $g\in\mathscr{G}^T$ справедливо $\operatorname{supp} v^g(\,\cdot\,,T)\subset B_R\setminus B_{R-T}$. Известно соотношение

$$\overline{\mathscr{V}^T} \;=\; L_2(B_R\setminus B_{R-T}). \tag{25}$$

Оно интерпретируется как *приближенная управляемость* системы (22)–(24) и означает полноту волн в заполняемой ими области (см., например [1]). Этот факт основан на фундаментальной теореме Хольмгрена–Йона–Татару о единственности продолжения решения волнового уравнения через нехарактеристическую поверхность [1,9]. Эта теорема применима в рассматриваемом нами случае $q\in L_\infty(\mathbb{R}^3)$.

Из (25) и непрерывности отображения $g\mapsto v^g(\,\cdot\,,t)$ следует равенство

$$\overline{\{v^g(\,\cdot\,,T)\mid g\in\dot{\mathscr{G}}^T\}} \;=\; \overline{\mathscr{V}^T} \;=\; L_2(B_R\setminus B_{R-T}) \tag{26}$$

справедливое для любого подмножества $\dot{\mathscr{G}}^T$ плотного в $\mathscr{G}^T$.

Головы волн плотны. Представим предыдущие результаты в форме, удобной для исследования управляемости возмущенной системы (1)–(3). Поскольку носитель потенциала q компактен, можно считать $\operatorname{supp} q \subset B_a$ для некоторого $a > 0$.

Фиксируем положительное $\xi < a$ и возьмем гладкое управление f с носителем в Σ^ξ. Так как скорость волны равна единице, а носитель потенциала лежит в B_a, верны следующие утверждения.

1. Обе волны u^f и u_0^f локализованы в области

$$D^\xi := \{(x,t) \,|\, |x| \geqslant -t + \xi\}.$$

Потенциал влияет на волны только в области

$$I^\xi := \{(x,t) \,|\; |x| < t - (a + \xi)\}.$$

Поэтому в области

$$C^\xi := D^\xi \setminus I^\xi \;=\; \{(x,t) \,|\; t \leqslant 0,\; -t + \xi \leqslant |x| \leqslant t + (a + \xi)\}$$

(затененной на рис. 1) волны u^f и u_0^f совпадают. В частности, $u^f = u_0^f$ на пространственно-временном цилиндре $\Pi_a^\xi := S^2_{a+\xi} \times [-a, 0] \subset C^\xi$.

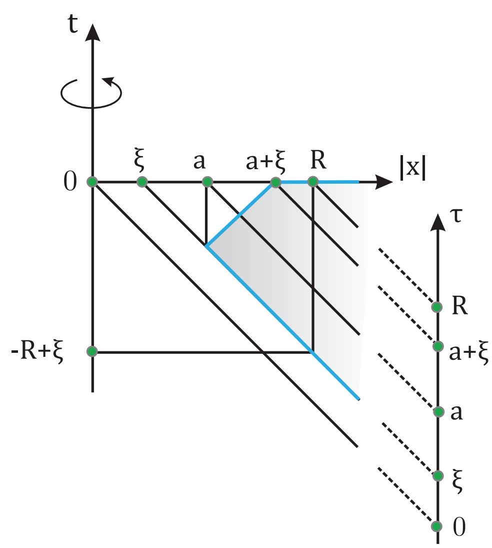

Рис. 1

2. Поскольку $\Pi_a^\xi \subset C^\xi$, возмущенную волну u^f, ограниченную на шар $B_{a+\xi}$ можно рассматривать как решение задачи

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + qu = 0 && \text{in } B_{a+\xi} \times (-a, 0);\\ &u\,|_{t=-\xi} = u_t\,|_{t=-\xi} = 0 && \text{in } B_{a+\xi};\\ &u = u_0^f && \text{on } \Pi_a^\xi; \end{aligned}$$

вида (22)–(24). В силу (13) с $R = a + \xi$, следы волн

$$\left\{u_0^f\big|_{\Pi_a^\xi} \mid f \text{ гладкое, } f\big|_{0\leqslant\tau<\xi} = 0\right\}$$

образуют полную систему в $L_2(\Pi_a^\xi)$.

3. Таким образом (с учетом 26) мы приходим к ключевому соотношению

$$\overline{\{u^f(\,\cdot\,,0)\big|_{B_{a+\xi}\setminus B_\xi} \mid\ f \text{ гладкое, } f\big|_{0\leqslant\tau<\xi} = 0\}} \,=\, L_2(B_{a+\xi}\setminus B_\xi). \qquad (27)$$

Заметим также, что значения волны $u^f(\,\cdot\,,0)\big|_{B_{a+\xi}\setminus B_\xi}$ определяются значениями управления $f\big|_{\xi\leqslant\tau\leqslant\xi+a}$ и не зависят от его поведения при $\tau > a + \xi$. Поэтому в (27) можно брать только гладкие обычные управления из $\mathscr{F}^\xi$.

Свойство (27) интерпретируется как полнота голов задержанных волн в сферическом слое $B_R \setminus B_{R'}$, $(0 < R' < R)$. Напомним, что, в то же время, достижимые множества $\mathscr{U}^R$ не являются плотными в соответствующем $\mathscr{H}^R$: как показано в [3], имеет место соотношение

$$\mathscr{H}^\xi \,=\, \mathscr{U}^\xi \oplus \mathscr{D}^\xi, \quad \mathscr{D}^\xi \supseteq \mathscr{A}^\xi; \qquad \xi > 0$$

Докажем, что q-полигармоническое подпространство $\mathscr{A}^\xi$ в действительности исчерпывает дефект $\mathscr{D}^\xi$.

Доказательство теоремы 1. Фиксируем $\xi > 0$. В [3] доказано равенство

$$\overline{\{u^p(\,\cdot\,,0) \mid p \in \mathscr{P}^\xi\}} = \mathscr{A}^\xi \subseteq \mathscr{D}^\xi = \mathscr{H}^\xi \ominus \mathscr{U}^\xi, \qquad \xi > 0, \qquad (28)$$

из которого следует

$$\overline{\{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi\}} = \mathscr{U}^\xi \oplus \mathscr{A}^\xi \,\subseteq\, \mathscr{H}^\xi, \qquad \xi > 0. \qquad (29)$$

Возьмем $y \in \mathscr{H}^\xi$. Согласно (28) и (29), соотношение (6) будет верно, если мы покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое управление $f \in \mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi$, что будет выполнено $\|y - u^f(\,\cdot\,,0)\| < \varepsilon$. Напомним, что носитель потенциала лежит в B_a.

Положим $y = y_1 + y_2$,

$$y_1 = \chi_{B_{a+\xi} \setminus B_\xi}\, y, \quad y_2 = \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{a+\xi}}\, y\,.$$

Используя полноту волновых голов в $L_2(B_{a+\xi} \setminus B_\xi)$, выберем управление $f_1 \in \mathscr{F}^\xi$ так, чтобы выполнялось

$$\|y_1 - \chi_{B_{a+\xi} \setminus B_\xi} u^{f_1}(\,\cdot\,,0)\|_{L_2(B_{a+\xi} \setminus B_\xi)} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Используя полноту волн $\{u^f(\,\cdot\,,0) = u_0^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^{a+\xi} \dotplus \mathscr{P}^{a+\xi}\}$ в $\mathscr{H}^{a+\xi} = L_2(\mathbb{R}^3 \setminus B_{a+\xi})$, найдем управление $f_2 \in \mathscr{F}^{a+\xi} \dotplus \mathscr{P}^{a+\xi}$ такое, что

$$\|\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{a+\xi}} u^{f_1}(\,\cdot\,,0) - u^{f_2}(\,\cdot\,,0)\|_{L_2(\mathbb{R}^3 \setminus B_{a+\xi})} < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

так что разность $u^{f_1}(\,\cdot\,,0) - u^{f_2}(\,\cdot\,,0)$ будет мала в области $\mathbb{R}^3 \setminus B_{a+\xi}$, в которой находится носитель y_2.

Пользуясь той же полнотой, выберем управление $f_3 \in \mathscr{F}^{a+\xi} \dotplus \mathscr{P}^{a+\xi}$, для которого выполнено

$$\|y_2 - u^{f_3}(\,\cdot\,,0)\|_{L_2(\mathbb{R}^3 \setminus B_{a+\xi})} < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Используя представление

$$\begin{aligned} &y - u^{f_1 - f_2 + f_3}(\,\cdot\,,0) = y_1 + y_2 - u^{f_1}(\,\cdot\,,0) + u^{f_2}(\,\cdot\,,0) - u^{f_3}(\,\cdot\,,0) \\ &= [y_1 - \chi_{B_{a+\xi} \setminus B_\xi} u^{f_1}(\,\cdot\,,0)] - [\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B_{a+\xi}} u^{f_1}(\,\cdot\,,0) - u^{f_2}(\,\cdot\,,0)] + [y_2 - u^{f_3}(\,\cdot\,,0)] \end{aligned}$$

и предыдущие оценки, мы легко получим неравенство

$$\|y - u^{f_1 - f_2 + f_3}(\,\cdot\,,0)\|_{\mathscr{H}^\xi} < \varepsilon\,.$$

Значит волны $\{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi \dotplus \mathscr{P}^\xi\}$ образуют полную систему в $\mathscr{H}^\xi = \mathscr{U}^\xi \oplus \mathscr{A}^\xi$, что приводит к $\mathscr{D}^\xi = \mathscr{A}^\xi$ для любого $\xi > 0$. Теорема 1 доказана.

Комментарии. Настоящая работа, вместе с предыдущими статьями [2–5], в основном завершает изучение управляемости системы (1)–(3). Подведем его итог.

Напомним определения пространств, подпространств и достижимых множеств: $\mathscr{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{H}^\xi = \{y \in \mathscr{H} \mid \operatorname{supp} y \subset \mathbb{R}^3 \setminus B_\xi\}$, $\mathscr{F} = L_2([0,\infty) \times S^2)$, $\mathscr{F}^\xi = \{f \in \mathscr{F} \mid \operatorname{supp} f \subset [\xi,\infty) \times S^2\}$, $\mathscr{U} = \{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}\}$, $\mathscr{U}^\xi = \{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi\}$. Классы полиномиальных управлений $\mathscr{P}$ и $\mathscr{P}^\xi$ определены в (11) и (20). Всюду $\xi > 0$. Объекты, относящиеся к невозмущенной системе, снабжаются индексом 0.

1. Невозмущенная система (с $q = 0$) *точно* управляема: для любого $y \in \mathscr{H}$ найдется (единственное) управление $f \in \mathscr{F}$ такое, что $u_0^f(\,\cdot\,,0) = y$. Приходящие из бесконечности волны составляют составляют полную систему в пространстве $\mathbb{R}^3$, которое они заполняют. Оператор $W_0 : f \mapsto u_0^f(\,\cdot\,,0)$ унитарен [2,8].

В то же время запаздывающие волны $u_0^f(\,\cdot\,,0)$, порожденные задержанными управлениями $f \in \mathscr{F}^\xi$, заполняют область $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi$, но не обладают полнотой: достижимые множества $\mathscr{U}_0^\xi$ не плотны в $\mathscr{H}^\xi$.

Недостижимые множества $\mathscr{D}_0^\xi = \mathscr{H}^\xi \ominus \mathscr{U}_0^\xi$ бесконечномерны и состоят из полигармонических функций (см. (5)). Справедливо равенство $\mathscr{D}_0^\xi = \overline{\{u_0^p(\,\cdot\,,0) \mid p \in \mathscr{P}^\xi\}}$, так что дефект покрывается за счёт волн, создаваемых полиномиальными управлениями.

2. Достижимое множество $\mathscr{U}$ возмущенной системы это замкнутое подпространство, которое может как совпадать, так и не совпадать с $\mathscr{H}$. Во втором случае дефект $\mathscr{D} = \mathscr{H} \ominus \mathscr{U}$ конечномерен и имеется *подпространство нуль-управлений* $\mathscr{N} = \{g \in \mathscr{F} \mid u^g(\,\cdot\,,0) = 0\}$, $\dim \mathscr{N} = \dim \mathscr{D} < \infty$. Соответствующие им волны u^g обладают рядом примечательных свойств [5].

Волны $u^f(\,\cdot\,,0)$, порожденные задержанными управлениями $f \in \mathscr{F}^\xi$, заполняют область $\mathbb{R}^3 \setminus B_\xi$ но не обладают полнотой. Как и в невозмущенном случае, достижимые множества $\mathscr{U}^\xi$ не исчерпывают $\mathscr{H}^\xi$; при этом недостижимые множества $\mathscr{D}^\xi = \mathscr{H}^\xi \ominus \mathscr{U}^\xi$ порождаются q-полигармоническими функциями. Таким образом, обычные управления не обеспечивают управляемости в захваченной области, но управляемость восстанавливается за счет полиномиальных управлений, которые покрывают дефект: как мы показали, выполнено соотношение $\mathscr{D}^\xi = \overline{\{u^p(\,\cdot\,,0) \mid p \in \mathscr{P}^\xi\}}$.

Таким образом при $\xi > 0$, характер управляемости возмущенной и невозмущенной систем одинаков. Также, в обоих случаях головы волн (части волн вблизи переднего фронта) обеспечивают приближенную управляемость в сферическом слое, т.е. полны в $L_2(B_{R'} \setminus B_R)$. Тонкость состоит в том, что в обоих случаях управляемость только приближенная (не точная): в [3], лемма 3.1 показано, что равенство $\mathscr{H}^\xi = \overline{\{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi \oplus \mathscr{P}^\xi\}}$ не является верным без замыкания. Построен пример функции $y \in \mathscr{H}^\xi \setminus \{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi \oplus \mathscr{P}^\xi\}$. Точнее, y принадлежит $\mathscr{H}^\xi \setminus \{u^f(\,\cdot\,,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi\}$, но полиномиальные управления не меняют ситуации,.

Предположение о компактности $\operatorname{supp} q$ существенно в наших рассмотрениях. Можно ли отказаться от него – открытый вопрос. Представляется вероятным, что для быстро убывающих потенциалов наши результаты останутся верными.

В работе [2], результаты которой существенно используются в настоящей статье, есть ошибочное утверждение. Мы хотим исправить его здесь.

В конце §8 было построено явное решение u_0^p для $p=\chi_{[0,\infty)}\in\mathscr{P}$. Утверждалось, что при $t<0$ у решения $v^p(\,\cdot\,,t)=\int\limits_{\infty}^{t} u_0^p(\,\cdot\,,s)\,ds$ конечны потенциальная и кинетическая энергии. Однако, это верно лишь для кинетической энергии (но она зависит от времени), а потенциальная бесконечна.

Список литературы

1. M. I. Belishev, *vBoundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), R1–R45.
2. М. И. Белишев, А. Ф. Вакуленко, *Об одной задаче управления для волнового уравнения в* R^3. — Зап. научн. семин. ПОМИ **332** (2006), 19–73.
3. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *Reachable and unreachable sets in the scattering problem for acoustical equation in* $\mathbb{R}^3$. — SIAM J. Math. Anal. **39**, No. 6 (2008), 1821–1850.
4. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *Inverse scattering problem for the wave equation with locally perturbed centrifugal potential.* — J. Inverse Ill-Posed Probl. **17**, No. 2 (2009), 127–157.
5. M. I. Belishev, A. F. Vakulenko, *s-points in three-dimensional acoustical scattering.* — SIAM J. Math. Anal. **42**, No. 6 (2010), 2703–2720.
6. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Том 4. Часть 2, Москва, Наука (1981).
7. I. Lasiecka, R. Triggiani, *Recent advances in regularity of second-order hyperbolic mixed problems, and applications.* — In: Christopher K. R. T. (ed.) et al. Jones, editor, *Dynamics reported. Expositions in dynamical systems*, Vol. 3, Berlin, Springer-Verlag, (1994), pp. 104–162.
8. P. Lax, R. Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, New-York–London (1967).
9. D. Tataru, *Unique continuation for solutions to PDE's: between Hormander's and Holmgren's theorem.* — Comm. PDE **20** (1995), 855–884.

Belishev M. I., Vakulenko A. F. On controllability of the acoustic scattering dynamical system in $\mathbb{R}^3$.

The acoustic scattering problem is to find $u=u^f(x,t)$ satisfying

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} - \Delta u + qu = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times (-\infty, 0);\\
& u\,|_{|x|<-t} = 0, \qquad t < 0\\
& \lim_{s\to\infty} s\,u((s+\tau)\,\omega, -s) = f(\tau,\omega), \qquad (\tau,\omega) \in \Sigma := [0,\infty) \times S^2;
\end{aligned}
$$

with a real valued compactly supported potential $q \in L_\infty(\mathbb{R}^3)$ and a control $f \in \mathscr{F} := L_2(\Sigma)$. Let $\mathscr{F}^\xi := \{f \in \mathscr{F} \mid f\big|_{0\leqslant\tau\leqslant\xi} = 0\}$, $\mathscr{H} := L_2(\mathbb{R}^3)$, $\mathscr{H}^\xi := \{y \in \mathscr{H} \mid y\big|_{|x|<\xi} = 0\}$, $\xi > 0$. For the (delayed) controls $f \in \mathscr{F}^\xi$, the *reachable set* is $\mathscr{U}^\xi := \{u^f(\cdot,0) \mid f \in \mathscr{F}^\xi\} \subset \mathscr{H}^\xi$, whereas $\mathscr{D}^\xi := \mathscr{H}^\xi \ominus \mathscr{U}^\xi$ is the *defect* (unreachable) subspace. The paper provides a characterization of $\mathscr{D}^\xi$ as follows.

We say an $a \in \mathscr{H}^\xi$ to be a *q-polyharmonic* function of the order n if $(-\Delta+q)^n\,a = 0$ holds for $|x| > \xi$, and write $a \in \mathscr{A}^\xi_n$. Our main result is the relation

$$
\mathscr{D}^\xi = \overline{\operatorname{span}\{\mathscr{A}^\xi_n \mid n \geqslant 1\}}, \qquad \xi > 0
$$

(the closure in $\mathscr{H}$). It basically concludes the study of controllability of the acoustical dynamical system governed by the locally perturbed wave equation in $\mathbb{R}^3$.

С.-Петербургское Отделение
Математического Института
им. В. А. Стеклова, РАН

E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
vak@pdmi.ras.ru

Поступило 13 августа 2024 г.