

УДК 514.764.2+514.774

О ЗАМЫКАНИИ МНОЖЕСТВА КЛАССИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

И. Г. Николаев

ВВЕДЕНИЕ

Классическая риманова геометрия рассматривает регулярные римановы метрики, т. е. метрики, задаваемые C^2 или чаще C^∞ -гладким метрическим тензором. Между тем нерегулярные пространства, метрика которых также задается с помощью метрического тензора, но с худшими дифференциальными свойствами, заслуживают не меньшего внимания. Более того, «нерегулярные» римановы пространства возникают при решении задач самой «регулярной» римановой геометрии.

Интерес к изучению геометрии, которую можно назвать «нерегулярной», возник давно и первоначально был связан с двумерной тематикой [1], [5], [21]*.

В многомерном случае нерегулярные обобщения римановой геометрии стали существенно использоваться только начиная с 80-х годов. Самые важные применения этих пространств связаны с теоремой компактности М. Громова [32].

Прежде чем сформулировать теорему компактности Громова и привести один из первых примеров ее применения, напомним понятие расстояния Липшица между метрическими пространствами [32].

Чтобы его определить, приведем сначала понятие отклонения липшицева отображения f метрического пространства (M, ρ) в метрическое пространство (M', ρ') . Отклонение f есть величина

$$\text{dil } f = \sup \{ \rho'(f(P), f(Q)) / \rho(P, Q) \},$$

где \sup рассматривается по всем парам неравных $P, Q \in M$.

Расстояние Липшица между метрическими пространствами (M, ρ) и (M', ρ') полагается равным:

$$d_L(M, M') = \inf \{ |\ln \text{dil } f| + |\ln \text{dil } f^{-1}| \},$$

* См. также обзорную статью: Многомерные обобщенные римановы пространства / Берестовский В. Н., Николаев И. Г. // Итоги науки и техн. Современ. пробл. мат. Фундам. направления.— ВИНТИ.— 1990.— 70

где \inf рассматривается по всем билипшицевым отображениям $j: (\mathcal{M}, \rho) \rightarrow (\mathcal{M}', \rho')$. В случае отсутствия таких отображений $d_L(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ полагается равным $+\infty$.

М. Громов рассматривал класс $\mathfrak{M}(n, d, V, \Lambda)$ компактных n -мерных римановых многообразий класса C^∞ , для которых выполнены условия:

1). $\text{diam } \mathcal{M} \leq d,$

2). $\text{Vol } \mathcal{M} \geq V > 0,$

3). Для каждой точки $P \in \mathcal{M}$ и произвольной двумерной площадки $\sigma \subset \mathcal{M}_P$ выполнено:

$$|K_\sigma(P)| \leq \Lambda,$$

где $K_\sigma(P)$ — секционная кривизна \mathcal{M} в соответствующем двумерном направлении.

Теорема компактности Громова утверждает, что множество $\mathfrak{M}(n, d, V, \Lambda)$ по отношению к расстоянию Липшица d_L является относительно компактным подмножеством множества всех n -мерных компактных $C^{1,1}$ -гладких многообразий с непрерывным метрическим тензором. Более точно, из любой последовательности $\{\mathcal{M}_k\}$ из $\mathfrak{M}(n, d, V, \Lambda)$ можно выделить d_L -сходящуюся подпоследовательность, предел которой, как утверждает теорема, будет римановым многообразием класса C^0 .

На самом деле свойства предельной метрики значительно лучше, чем это утверждается в теореме Громова (см. теоремы 1.1, 4.1).

Одно из ярких применений теоремы компактности Громова, в котором существенную роль играет «нерегулярная риманова геометрия», было получено Берже [27]. Оно связано с исследованием «устойчивости» в теореме жесткости [26]. Напомним, что теорема жесткости утверждает, что полное односвязное многообразие четной размерности с δ -зашемленными секционными кривизнами (т. е. $\delta \leq K_\sigma \leq 1$) при $\delta = 1/4$ либо гомеоморфно сфере, либо изометрично одному из следующих симметрических пространств ранга один: комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^n$, кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^n$, проективной плоскости октав Кели CaP^2 , см. [26].

Имелась гипотеза, что при $0 < \delta < 1/4$ римановы многообразия с δ -зашемленными кривизнами указанного выше типа, не гомеоморфны сфере, диффеоморфны одному из перечисленных выше симметрических пространств ранга один.

Берже доказал, что для каждого четного n найдется такое $0 < \varepsilon(n) < 1/4$, что при $0 < \delta < 1/4 - \varepsilon(n)$ полное односвязное риманово многообразие размерности n с δ -зашемленными секционными кривизнами либо гомеоморфно S^n , либо диффеоморфно одному из пространств $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ или CaP^2 .

Берже доказывает свою теорему «от противного», т. е. предполагает, что найдется последовательность римановых многообразий $\{\mathcal{M}_k\}$ указанного выше типа с δ_k -зашемленными кривиз-

нами, где $\delta_k \rightarrow 1/4 - 0$ при $k \rightarrow \infty$, но не гомеоморфных сфере и не диффеоморфных ни одному из пространств CP^n , HP^n , CaP^2 . Легко проверяется, что к этой последовательности применима теорема компактности Громова и возникает вообще говоря нерегулярный d_L -предел подпоследовательности этой последовательности, кривизна которого в каком-то смысле оказывается $1/4$ -заземленной. Пользуясь спецификой ситуации, Берже доказывает бесконечную дифференцируемость римановой метрики предельного пространства и, в силу теоремы жесткости, получает, что оно либо гомеоморфно сфере, либо диффеоморфно одному из пространств CP^n , HP^n , CaP^2 , вопреки тому, что при достаточно больших k M_k должно быть диффеоморфным предельному пространству.

Ясно, что используемый Берже способ рассуждений является достаточно универсальным и может быть применен к многим вопросам, связанным с исследованием устойчивости, решением экстремальных задач и т. д. По поводу дальнейших обобщений работы [27] см. [28], [29]. О других применениях теоремы компактности Громова можно найти информацию в работах [33], [35], [36].

В связи со сказанным, особо важным является вопрос об описании d_L -пределов в теореме компактности Громова.

В данной работе мы ставим вопрос более широко.

Во-первых, мы рассматриваем множество всех компактных C^∞ -гладких римановых многообразий не как подмножество класса римановых многообразий с непрерывным метрическим тензором, а как подмножество множества всех метрических пространств с внутренней метрикой. Здесь мы встаем на точку зрения А. Д. Александрова: первичными являются метрические свойства пространства, обобщающего риманово, а все остальное (в том числе и его дифференциальные свойства) должно выводиться из метрических свойств. В этом множестве мы задаем топологию $\tau_{н.с.}$ — «топологию сходимости с ограниченной кривизной». Подробно она будет описана в § 4. Здесь мы лишь отметим, что сходимость последовательности C^∞ -гладких римановых многообразий в этой топологии означает ее сходимость по Липшицу и равномерную ограниченность максимумов модулей их секционных кривизн.

Во-вторых, мы ставим своей целью описание замыкания в топологии $\tau_{н.с.}$ множества всех компактных классических многообразий.

Это описание заключается в том, что указанное выше замыкание (а в частности и множество d_L -пределов в теореме компактности Громова) получается при добавлении к классическим римановым пространствам так называемых «пространств с ограниченной кривизной», введенных А. Д. Александровым около 30 лет назад (см. [2], [25], [3], [4]). Определения и основные свойства пространств с ограниченной кривизной мы приведем

в § 1. Здесь лишь отметим, что эти пространства задаются аксиоматически и при их определении используются такие евклидовы понятия, как «линия», «угол», «треугольник» и т. д.

Одним из мотивов, побудивших автора написать эту статью, явилась ситуация, когда, несмотря на большое число работ, посвященных тематике, связанной с теоремой компактности Громова (см., например, [27]—[31], [33], [35]), не было замечено, что d_L -пределы в теореме компактности и пространства с ограниченной кривизной суть одно и то же. Исключение составляет работа [36].

Заметим, что в теореме о замыкании содержится два утверждения: о том, что каждый предел последовательности классических римановых пространств, сходящихся в топологии $\tau_{v, c}$, есть пространство с ограниченной кривизной, и о том, что каждое пространство с ограниченной кривизной $\tau_{v, c}$ -аппроксимируется классическими римановыми.

Первое из этих утверждений с математической точки зрения тривиально и в общем-то явилось одним из побудительных мотивов для введения пространств с ограниченной кривизной [25]. Отметим, что непонимание этого обстоятельства привело к дублированию теорем, давно известных в теории пространств с ограниченной кривизной (ср. [12]—[15], [4], [35], [36], [31], [28], [29]).

Второе из этих утверждений нетривиально. Оно получается из более общего утверждения — теоремы об аппроксимации (см. § 3). Теорема об аппроксимации подводит «философскую базу» под вопросы, связанные с теоремой компактности, гарантируя, что ничего, кроме допускающих синтетическое описание пространств Александрова, на этом пути не встретится. Отметим также, что теорема об аппроксимации позволяет формулировать многие классические утверждения геометрии «в целом» сразу для метрических пространств, опуская всякие априорные предположения о регулярности. Примеры на этот счет приведены в § 3. В заключение отметим, что в излагаемой нами теории имеется «идейный параллелизм» с теорией функций с обобщенными производными и их применениями (см. [23], [7], [11] и т. д.). Поэтому с точки зрения анализа излагаемая нами теория является даже несколько запоздалой.

Естественно, что возможны и другие способы замыкания классических римановых пространств, но результатов, аналогичных излагаемым в данной статье, пока нет.

§ 1. ПРОСТРАНСТВА С ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНОЙ

1.1. Внутренняя метрика, кратчайшая, треугольник, избыток треугольника. Напомним, что метрическое пространство (M, ρ) есть пространство с внутренней метрикой, если для произвольной пары точек из M расстояние между этими точками совпа-

дает с точной нижней границей длин кривых (измеренных в метрике ρ), соединяющих эти точки.

Кривая в (M, ρ) , соединяющая точки $P, Q \in M$, называется кратчайшей, если ее длина равна $\rho(P, Q)$.

Треугольником ABC (обозначение $T=ABC$ или $\triangle ABC$) называется объединение точек трех кратчайших (сторон треугольника), попарно соединяющих три различные точки A, B, C (вершины треугольника).

Условимся кратчайшую, соединяющую точки $P, Q \in M$, обозначать через $\mathcal{P}Q$, а ее длину — через PQ .

Между кратчайшими с общим началом определен угол — верхний угол А. Д. Александрова [1], [4].

Избыток треугольника $T=ABC$ есть по определению величина

$$\delta(T) = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

где α, β, γ — верхние углы треугольника T при вершинах A, B, C соответственно.

1.2. Верхняя и нижняя кривизна метрического пространства в точке. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, любые две достаточно близкие точки которого допускают соединение кратчайшей. Пусть T — треугольник в (M, ρ) . Определим (верхнюю) усредненную кривизну треугольника T (см. [3], с. 6):

$$\bar{K}(T) = \delta(T)/\sigma(T) \text{ при } \sigma(T) \neq 0,$$

$$\bar{K}(T) = +\infty \text{ при } \sigma(T) = 0 \text{ и } \delta(T) > 0,$$

$$\bar{K}(T) = -\infty \text{ при } \sigma(T) = 0 \text{ и } \delta(T) \leq 0,$$

здесь через $\sigma(T)$ обозначено число, равное площади евклидова треугольника с теми же длинами сторон, что и у T .

Аналогично определяется нижняя усредненная кривизна T :

$$\underline{K}(T) = \delta(T)/\sigma(T) \text{ при } \sigma(T) \neq 0,$$

$$\underline{K}(T) = +\infty \text{ при } \sigma(T) = 0 \text{ и } \delta(T) \geq 0,$$

$$\underline{K}(T) = -\infty \text{ при } \sigma(T) = 0 \text{ и } \delta(T) < 0.$$

Пусть $P \in M$. Тогда верхняя кривизна $\bar{K}_M(P)$ в точке P есть величина:

$$\bar{K}_M(P) = \overline{\lim}_{T \rightarrow P} \delta(T)/\sigma(T).$$

Аналогично определяется и нижняя кривизна $\underline{K}_M(P)$ в точке P :

$$\underline{K}_M(P) = \underline{\lim}_{T \rightarrow P} \delta(T)/\sigma(T)$$

(здесь и выше треугольники T произвольным образом стягиваются к точке P).

1.3. Определение пространства с ограниченной кривизной.

Пространство с ограниченной кривизной есть метрическое пространство со свойствами:

- 1). Метрика ρ — внутренняя.
- 2). (\mathcal{M}, ρ) — локально компактное метрическое пространство.
- 3). В (\mathcal{M}, ρ) выполнено условие локальной продолжаемости кратчайшей: для каждой точки $P \in \mathcal{M}$ некоторый открытый шар $B(P, r_P)$ обладает тем свойством, что всякую кратчайшую $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ с концами $X, Y \in B(P, r_P)$ можно продолжить до кратчайшей $\mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1$ в \mathcal{M} , внутренними точками которой будут точки X и Y .
- 4). В каждой точке $P \in \mathcal{M}$ верхняя и нижняя кривизны удовлетворяют неравенствам:

$$\underline{K}_{\mathcal{M}}(P) > -\infty, \quad \bar{K}_{\mathcal{M}}(P) < +\infty.$$

З а м е ч а н и е. Приведенное нами определение пространства с ограниченной кривизной эквивалентно тому, что (\mathcal{M}, ρ) есть топологическое многообразие, кривизна которого локально ограничена по А. Д. Александрову (см. [2], [25]).

1.4. Гладкость метрики пространства с ограниченной кривизной. Напомним, что система координат в римановом многообразии называется гармонической, если в ней выполнено равенство:

$$g^{pi} \cdot \Gamma_{pi}^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где g_{pi} , Γ_{pi}^i — компоненты метрического тензора и символы Кристоффеля, вычисленные в этой системе координат. Более подробно см. [22].

Т е о р е м а 1.1. ([15]). Пусть (\mathcal{M}, ρ) — пространство с ограниченной кривизной. Тогда в окрестности каждой точки $P \in \mathcal{M}$ можно задать гармоническую систему координат. Гармонические системы координат задают на \mathcal{M} $C^{3, \alpha}$ -гладкий атлас, где в качестве α может быть взято произвольное положительное число, меньшее единицы. Компоненты метрического тензора, задающего метрику ρ , во всякой гармонической системе координат есть непрерывные функции, принадлежащие классу С. Л. Соболева W_p^2 ([23]), где в качестве p может быть взято произвольное число, не меньшее единицы.

З а м е ч а н и е. Из теоремы 1.1 в частности следует, что g_{ij} принадлежат классу $C^{1, \alpha}$ при любом $\alpha \in (0, 1)$, и что почти всюду (в смысле n -мерной меры Хаусдорфа, где $n = \dim \mathcal{M}$) g_{ij} обладают вторым дифференциалом (см. [15], [4]).

Всюду далее через $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ мы будем обозначать множество точек двукратной недифференцируемости метрического тензора пространства с ограниченной кривизной, а через n — его размерность.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВА С ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВИЗНОЙ

2.1. Формулировка основного результата. Формулируемая ниже теорема 2.1 является важным этапом в доказательстве теоремы об аппроксимации.

Скажем, что последовательность $\{T_m = PB_m C_m\}$ треугольников из \mathcal{M} стягивается к точке P по паре (u, v) , где $u, v \in \mathcal{M}_P$ — пара единичных неколлинеарных векторов, если единичные векторы $u_m, v_m \in \mathcal{M}_P$, касающиеся кратчайших PB_m и PC_m , сходятся к векторам u и v соответственно, а $B_m \xrightarrow{(u, v)} P, C_m \rightarrow P$ при $m \rightarrow \infty$.

Обозначение такой сходимости: $T_m \xrightarrow{(u, v)} P$.

Теорема 2.1. Пусть (\mathcal{M}, ρ) — пространство с ограниченной кривизной. Тогда существует такое множество \mathcal{O}_1 ($\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{M}$) нулевой n -мерной меры Хаусдорфа, что в каждой точке $P \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{O}_1$ выполнено:

Для произвольных пар единичных неколлинеарных векторов $u, v \in \mathcal{M}_P$ найдется такая последовательность $\{T_m = PB_m C_m\}$ треугольников в \mathcal{M} , стягивающихся к точке P по паре (u, v) , что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \delta(T_m) / \sigma(T_m)$$

и он равен секционной кривизне \mathcal{M} , формально вычисленной в точке P по метрическому тензору в направлении двумерной площадки $\sigma \subset \mathcal{M}_P$, задаваемой бивектором $u \wedge v$.

2.2. Доказательство теоремы 2.1. Мы начнем со следующего замечания. Через $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ обозначим углы треугольника T_m при вершинах P, B_m, C_m соответственно, а через $\alpha_{0m}, \beta_{0m}, \gamma_{0m}$ обозначим соответствующие углы в плоском треугольнике с теми же длинами сторон, что и у T_m . Через σ_m обозначим $\sigma(T_m)$.

Для доказательства теоремы 2.1, очевидно, достаточно установить выполнение равенств

$$\begin{aligned} \lim (\alpha_m - \alpha_{0m}) \cdot \sigma_m^{-1} &= \lim (\beta_m - \beta_{0m}) \cdot \sigma_m^{-1} = \\ &= \lim (\gamma_m - \gamma_{0m}) \cdot \sigma_m^{-1} = K_\sigma(P) / 3. \end{aligned}$$

В [10] (см. IV главы IX) показано, что для того, чтобы доказать, например, равенство $K_\sigma(P) / 3$ предела $(\gamma_m - \gamma_{0m}) \cdot \sigma_m^{-1}$, достаточно проверить, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (z_m^2 - z_{0m}^2) / (\sigma_m \cdot x_m \cdot y_m \cdot \sin \gamma_m) = -2K_\sigma(P) / 3, \quad (2.1)$$

где $z_m = PB_m, x_m = B_m C_m, y_m = PC_m, z_{0m}^2 = x_m^2 + y_m^2 - 2x_m \cdot y_m \cdot \cos \gamma_m$.

Исследование предела (2.1) проводится на основе разложения для разности $z_m^2 - z_{0m}^2$, получаемого ниже. Это разложение основано на результатах, приводимых в п. 2.2.1 и формуле Тейлора, а также на результатах работы [18].

2.2.1. Поля Якоби, оценки для $\langle \tilde{\mathcal{Y}}', \tilde{\mathcal{Y}} \rangle$. Пусть $c: [0, y] \rightarrow \mathcal{M}$ — нормально параметризованная кратчайшая, причем $c([0, y]) \subset \mathcal{M} \setminus \mathcal{O}$.

Вдоль c рассмотрим ортонормированный базис $\mathcal{E}_i, i = 1, 2, \dots, n$, состоящий из параллельных векторных полей.

Векторное поле \mathcal{Y} вдоль c назовем полем Якоби, если его координаты относительно указанного базиса удовлетворяют уравнению:

$$\mathcal{Y}^i(u) = \mathcal{Y}^i(0) + \dot{\mathcal{Y}}^i(0) \cdot u - u^2 \int_0^1 (1-t) \mathcal{A}_i^j(t \cdot u) \cdot \mathcal{Y}^j(tu) dt,$$

где $\mathcal{A}_i^j = \langle R(\mathcal{X}_j, \dot{c}) \dot{c}, \mathcal{X}_i \rangle$, а R — тензор кривизны, формально вычисленный по метрическому тензору «почти всюду» вдоль c .

Пусть \mathcal{Y} — поле Якоби вдоль c , причем $\mathcal{Y}(0) = 0$. Через $\tilde{\mathcal{Y}}$ обозначим $\mathcal{Y} - \langle \mathcal{Y}, \dot{c} \rangle \cdot \dot{c}$. Предположим, что $\tilde{\mathcal{Y}}(y) \neq 0$.

Потребуем дополнительно, чтобы для базиса \mathcal{X}_i были выполнены равенства: $\mathcal{X}_1 = \dot{c}$, $\mathcal{X}_2(y) = \tilde{\mathcal{Y}}(y) / |\tilde{\mathcal{Y}}(y)|$.

Тогда $\mathcal{Y}(u)$ в таком базисе выразится равенством:

$$\mathcal{Y}^i(u) = \delta_2^i \cdot \sin \gamma - u^2 \int_0^1 (1-t) \mathcal{A}_i^j(t \cdot u) \cdot \mathcal{Y}^j(t \cdot u) dt. \quad (2.2)$$

Через $h(y)$ обозначим $\langle \tilde{\mathcal{Y}}', \tilde{\mathcal{Y}} \rangle|_y$. Для $h(y)$, очевидно, имеет место формула ($\tilde{\mathcal{Y}}' = \nabla_{\dot{c}} \tilde{\mathcal{Y}}$):

$$h(y) = y \cdot \int_0^1 [\langle \tilde{\mathcal{Y}}'', \tilde{\mathcal{Y}} \rangle|_{t \cdot y} + (|\tilde{\mathcal{Y}}'|^2|_{t \cdot y} - |\tilde{\mathcal{Y}}'|^2|_0)] dt + y \cdot |\tilde{\mathcal{Y}}'|^2|_0.$$

Отметим, что из уравнения (2.2) легко следует, что

$$|\tilde{\mathcal{Y}}|_{\infty} = \sup |\tilde{\mathcal{Y}}^i(t)| < 2, \quad t \in [0, y], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

если $0 < y < (2|\mathcal{A}|_c)^{-1}$ ($|\mathcal{A}|_c = \max \{ |\mathcal{A}_k^i(s)| \}$, $s \in [0, y]$, $i, k = 1, \dots, n$).

Из (2.2) при $u = y$ вычисляется $\tilde{\mathcal{Y}}'(0)$:

$$\tilde{\mathcal{Y}}'(0) = \frac{\delta_2^i \cdot \sin \gamma}{y} + y \cdot \sin \gamma \int_0^1 t(1-t) \mathcal{A}_2^i(t \cdot y) dt + O(y^3). \quad (2.3)$$

Из формулы (2.3) легко выводится равенство:

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{Y}}'|_0 &= \frac{\sin^2 \gamma}{y^2} + \frac{1}{3} K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y \cdot \sin^2 \gamma + \\ &+ 2 \sin^2 \gamma \cdot \int_0^1 t(1-t) [K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_{t \cdot y} - K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y] dt + O(y^2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где через $K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_u$ обозначена секционная кривизна \mathcal{M} , вычисленная в точке $c(u)$, в направлении двумерной площадки из $\mathcal{M}_{c(u)}$, задаваемой бивектором $\tilde{\mathcal{Y}}(u) \wedge \dot{c}(u)$.

Формула (2.4) дает возможность переписать $h(y)$ в виде:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{Y}}', \tilde{\mathcal{Y}} \rangle|_y = y & \left\{ \frac{\sin^2 \gamma}{y^2} + \frac{1}{3} K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y \sin^2 \gamma + \right. \\ & + 2 \sin^2 \gamma \cdot \int_0^1 t(1-t) [K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_{t \cdot y} - K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y] dt + O(y^2) \left. \right\} + \\ & + y \int_0^1 [|\tilde{\mathcal{Y}}'|_{t \cdot y} - |\tilde{\mathcal{Y}}'|_0] dt - y \int_0^1 \langle R(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c}) \dot{c}, \tilde{\mathcal{Y}}' \rangle|_{t \cdot y} dt. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Рассмотрим более подробно два последних интеграла из (2.5), обозначив их через I_1 и I_2 соответственно.

Из формул (2.2) — (2.3) легко следует равенство:

$$\tilde{\mathcal{Y}}^i(tu) = \frac{\delta_2^i}{y} \cdot \sin \gamma \cdot t \cdot u + O(y^2). \quad (2.6)$$

Из (2.6), а также из очевидного равенства

$$\dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(u) = \dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(0) - u \cdot \int_0^1 \mathcal{A}_1^i(t \cdot u) \cdot \tilde{\mathcal{Y}}^i(t \cdot u) dt,$$

следует формула:

$$\dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(u) - \dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(0) = -\frac{u^2}{y} \cdot \sin \gamma \cdot \int_0^1 \mathcal{A}_2^i(tu) dt + O(y^3). \quad (2.7)$$

Здесь же отметим полезную в дальнейшем формулу, следующую из (2.3) и (2.7):

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(u\lambda) = \frac{\delta_2^i}{y} \cdot \sin \gamma + \frac{1}{6} y \cdot \sin \gamma \cdot \mathcal{A}_2^i(y) - \frac{\lambda^2 u^2}{y} \cdot \sin \gamma \times \\ \times \int_0^1 \mathcal{A}_2^i(t \cdot \lambda \cdot u) dt + y \cdot \sin \gamma \int_0^1 t(1-t) [\mathcal{A}_2^i(t \cdot \lambda \cdot y) - \mathcal{A}_2^i(y)] dt + \\ + O(y^3). \end{aligned}$$

Из (2.7) при $u = y\lambda$ следует формула:

$$[\dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(\lambda y)]^2 = [\dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(0)]^2 - 2 \cdot \dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i(0) \cdot \lambda^2 \cdot y \cdot \sin \gamma \cdot \int_0^1 t \mathcal{A}_2^i(t\lambda y) dt + O(y^2),$$

откуда, ввиду (2.3), следует, что

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i|^2|_{\lambda y} - |\dot{\tilde{\mathcal{Y}}}^i|^2|_0 = -\lambda^2 \cdot \sin^2 \gamma \cdot K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y - 2\lambda^2 \cdot \sin^2 \gamma \times \\ \times \int_0^1 t [K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_{t \cdot \lambda \cdot y} - K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y] dt + O(y^2). \end{aligned}$$

Из последней формулы следует, что I_1 допускает представление:

$$I_1 = -\frac{1}{3} \cdot \sin^2 \gamma \cdot K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y - 2 \sin^2 \gamma \times \\ \times \int_0^1 \int_0^1 \lambda^2 [K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_{t\lambda y} - K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y] dt d\lambda + O(y^2). \quad (2.8)$$

Перейдем к интегралу I_2 . Из формулы (2.6) и приведенной выше формулы для $\tilde{\mathcal{Y}}^l(u\lambda)$ следует:

$$I_2 = K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{3} + \sin^2 \gamma \times \\ \times \int_0^1 t^2 [K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_{t \cdot y} - K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y] dt + O(y^2). \quad (2.9)$$

Формулы (2.8) — (2.9), примененные к (2.5), дают нам окончательное выражение для $\langle \tilde{\mathcal{Y}}', \tilde{\mathcal{Y}} \rangle|_y$:

$$h(y) = \frac{\sin^2 \gamma}{y} - \frac{1}{3} K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y \cdot y \cdot \sin^2 \gamma + \varepsilon, \quad (2.10)$$

где ε допускает оценку:

$$|\varepsilon| \leq L \cdot y \left[y^2 + \int_0^1 |K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_{t \cdot y} - K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y| dt + \right. \\ \left. + \int_0^1 \int_0^1 |K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_{t\lambda y} - K(\tilde{\mathcal{Y}}, \dot{c})|_y| dt d\lambda \right]. \quad (2.11)$$

2.2.2. Разложение для разности $z_m^2 - z_{0m}^2$. Для краткости индекс m будет опускаться. Через $P_t \in \mathcal{BC}$ обозначим точку, лежащую на расстоянии t от точки C . Пусть $x = BC$. Через $V: [0, y] \times [0, x] \rightarrow \mathcal{M}$ обозначим отображение (вариацию), сопоставляющее $s \in [0, y]$, $t \in [0, x]$ точку, лежащую на кратчайшей \mathcal{PP}_t на расстоянии s от точки P . Если размеры треугольника PBC достаточно малы, то все построения корректно определены и V непрерывно зависит от s и t .

Предположим, что для почти всех $t \in [0, x]$ (в смысле меры Лебега) вторая производная функции длины $l(t) = PP_t$ может быть вычислена по формуле Синга (ср. с работой [18]). Тогда, в силу п. 2.2.1 и формулы Тейлора, имеет место:

$$z^2(x, y) - z_0^2(x, y) = -\frac{2}{3} K_\sigma(P) \cdot \sigma(T) \cdot x \cdot y \cdot \sin \gamma + \tilde{\varepsilon}(x, y),$$

где остаток $\tilde{\varepsilon}(x, y)$ допускает оценку:

$$|\tilde{\varepsilon}(x, y)| \leq L' \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot \left\{ x + y + \int_0^1 |K(t \cdot y) - K_\sigma(P)| dt + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \int_0^1 |K(t \cdot \lambda \cdot y) - K_\sigma(P)| dt d\lambda + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 |K(t \cdot z(x \cdot u, y), x \cdot u) - K_\sigma(P)| dt + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 |K(t \cdot \lambda \cdot z(x \cdot u, y), x \cdot u) - K_\sigma(P)| dt d\lambda \Big] du \Big\},
\end{aligned}$$

здесь через $K(s, t)$ обозначена секционная кривизна \mathcal{M} в направлении двумерной площадки, касающейся двумерной поверхности V в точке $V(s, t)$, в частности $K(s, 0) = K(s)$, $K(0, 0) = K_\sigma(P)$.

2.2.3. Завершение доказательства теоремы 2.1. Рассмотрим пару векторов $e, e' \in \mathcal{M}_0$, для которых $e \wedge e' \neq 0$. Здесь O — фиксированная точка из \mathcal{M} . Через B_m, C_m обозначим точки, задаваемые равенствами:

$$B_m = \exp_O(m^{-1} \cdot e), \quad C_m = \exp_O(m^{-1} \cdot e').$$

При достаточно больших m эти точки заданы корректно. Через $\mathcal{E}(P), \mathcal{E}'(P)$ обозначим векторы из \mathcal{M}_P , получающиеся из векторов e и e' в результате параллельного переноса вдоль кратчайшей, соединяющей точки O и P (в малой окрестности точки O такая кратчайшая единственна). Наконец, через $T_m(P)$ обозначим треугольник с вершинами:

$$P, B_m(P) = \exp_P(m^{-1} \cdot \mathcal{E}(P)), \quad C_m(P) = \exp_P(m^{-1} \cdot \mathcal{E}'(P)).$$

Если точка P достаточно близка к точке O , то такой треугольник задан корректно.

Из сказанного выше следует, что в малой окрестности точки O можно рассмотреть функцию:

$$\begin{aligned}
h_m(P) = & |(z_m^2(P) - z_{0m}^2(P)) \cdot (\sigma(T_m(P)) \times \\
& \times x_m(P) \cdot y_m(P) \cdot \sin \gamma_m(P))^{-1} + \frac{2}{3} K_\sigma(P)|,
\end{aligned}$$

где обозначения $z_m(P)$ и т. д. имеют тот же смысл для треугольника $T_m(P)$, что и для треугольника T_m .

Пусть \mathcal{U} — область в \mathcal{M} , в которой возможны приведённые выше построения и в которой можно задать гармоническую систему координат x^1, x^2, \dots, x^n . Предположим, что векторы e, e' имеют рациональные координаты относительно выбранной гармонической системы координат x^1, x^2, \dots, x^n .

Докажем, что в этом случае имеет место равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |h_m(P)|_{L_p} = 0, \quad 1 \leq p < +\infty. \quad (2.12)$$

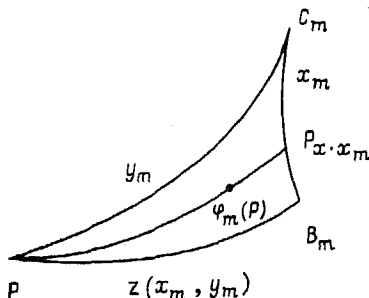
В [18] доказано, что при почти всех $P \in \mathcal{U}$ к треугольникам $T_m(P)$ (точнее к вариациям V , задаваемым этими треугольниками) применима формула Синга. Значит, при доказательстве (2.12) мы можем воспользоваться результатами п. 2.2.2. По-

этому для доказательства (2.12) достаточно установить, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \varepsilon(x_m(P), y_m(P)) |L_p = 0.$$

Имея ввиду доказательство (2.12), рассмотрим, например, последний из интегралов, выписанных в оценке для ε (см. п. 2.2.2).

Фиксируем $t, \lambda, x \in [0, 1]$. Через $\mathcal{E}''(P)$ обозначим $\exp_P^{-1}(P \cdot x \cdot x_m)$. Тогда $\varphi_m(P)$ полагаем равным $\exp_P(t \cdot \lambda \cdot z(x_m, y_m) \mathcal{E}''(P))$ (см. рис.).



Для доказательства стремления к нулю в L_p указанного интеграла, в силу теоремы Лебега, достаточно доказать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int |R_{ij,s}^q \circ \varphi_m - R_{ij,s}^q|_{L_p} = 0.$$

В [18] доказано, что при достаточно больших m отображение φ_m обратимо, φ_m^{-1} дифференцируемо почти всюду (в малой окрестности точки O), см. [18], лемму 4.1. Из неравенства (4.2) в [18] следует, что для якобиана $\mathcal{F}(\varphi_m^{-1})$ отображения φ_m^{-1} имеется оценка:

$$\sup_m \sup \text{vrai} \{ |\mathcal{F}(\varphi_m^{-1})| \} < +\infty. \quad (2.13)$$

Через $R_{ij,s}^{q\delta}$ обозначим усреднение по С. Л. Соболеву функций $R_{ij,s}^q$ ([19]). Фиксируем положительное число μ . Выберем $\delta(\mu) > 0$ столь малым, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{aligned} |R_{ij,s}^{q\delta(\mu)} - R_{ij,s}^q|_{L_p} &\leq \mu/3, \\ |(R_{ij,s}^{q\delta(\mu)} - R_{ij,s}^q) \circ \varphi_m|_{L_p} &\leq \mu/3. \end{aligned}$$

Существование такого $\delta(\mu)$ в первом случае следует из неравенства (6) на с. 34 в [19], а во втором случае оно следует после замены переменной $u = \varphi_m(v)$ [7] и применения оценки (2.13) также из указанного выше неравенства из [19].

Выберем m_0 так, чтобы при $m \geq m_0$ выполнялось неравенство:

$$\int |R_{ij,s}^{q\delta(\mu)} \circ \varphi_m - R_{ij,s}^{q\delta(\mu)}|_{L_p} < \mu/3.$$

Это можно сделать ввиду непрерывности функций $R_{ij,s}^{q\delta(\mu)}$.

а также ввиду равномерного стремления к тождественному отображению отображения Φ_m .

Из выписанных выше трех неравенств следует, что при $m \geq m_0$ имеет место неравенство:

$$|R_{I_j, s}^q \circ \Phi_m - R_{I_j, s}^q|_{L_p} < \mu,$$

что доказывает (2.12).

Из (2.12) следует, что существует подпоследовательность $\{h_{m_k}\}$ последовательности $\{h_m\}$, сходящаяся к нулю при почти всех P в смысле n -мерной меры Хаусдорфа. А это в точности означает выполнение почти всюду равенства (2.1) для подпоследовательности $\{T_{m_k}\}$ последовательности треугольников $\{T_m\}$, построенной выше, что в свою очередь влечет существование предела $(\gamma_m - \gamma_{0m_k})/\sigma_{m_k}$ и его равенство $K_\sigma(P)/3$.

Аналогичные рассуждения показывают, что выделяя, если надо, из последовательности $\{T_{m_k}\}$ подпоследовательность $\{T_{m_{k_l}}\}$, можно считать выполненными равенства

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{m_{k_l}} - \alpha_{0m_{k_l}}}{\sigma_{m_{k_l}}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\beta_{m_{k_l}} - \beta_{0m_{k_l}}}{\sigma_{m_{k_l}}} = K_\sigma(P)/3.$$

Таким образом, утверждение теоремы 2.1 доказано для пары векторов, имеющих рациональные координаты относительно системы координат x^1, x^2, \dots, x^n . Поскольку таких пар счетное множество, то с помощью стандартных рассуждений утверждение теоремы 2.1 легко доказывается для всех пар рассматриваемых векторов, имеющих рациональные координаты. Общий случай получается аппроксимацией произвольной пары последовательностью пар векторов, имеющих рациональные координаты.

Теорема 2.1 доказана.

§ 3. ТЕОРЕМА ОБ АППРОКСИМАЦИИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

3.1. Верхняя и нижняя границы кривизны метрического пространства. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, любые две достаточно близкие точки которого соединимы кратчайшей.

Верхняя граница кривизны (M, ρ) есть

$$\bar{K}(M) = \sup \{ \bar{K}_M(P) \}, \quad P \in M,$$

аналогично, нижняя граница кривизны (M, ρ) есть:

$$\underline{K}(M) = \inf \{ \underline{K}_M(P) \}, \quad P \in M.$$

Замечание 1. Для $\bar{K}(M)$ и $\underline{K}(M)$ допускаются бесконечные значения.

Замечание 2. Для риманова многообразия $\langle M, g \rangle$, $\bar{K}(M)$ совпадает с $\sup \{ K_\sigma(g) \}$, а $\underline{K}(M)$ — с $\inf \{ K_\sigma(g) \}$, рассматриваемым по всем $P \in M$ и двумерным площадкам $\sigma \subset M_P$ ($K_\sigma(g)$ — секционная кривизна риманова многообразия $\langle M, g \rangle$).

3.2. Формулировка теоремы об аппроксимации. Внутреннюю метрику связного риманова многообразия $\langle \mathcal{M}, g \rangle$, построенную по метрическому тензору g , условимся обозначать через $\rho(g)$.

Для пространства $(\mathcal{M}, \rho(g_0))$ с ограниченной кривизной через \mathfrak{X} обозначим C^3 -гладкую дифференциальную структуру на \mathcal{M} , содержащую атлас \mathfrak{h}_0 , образованный гармоническими системами координат на \mathcal{M} . В силу теоремы Уитни [37] в \mathfrak{X} можно выбрать C^∞ -гладкий атлас \mathfrak{h} .

Теорема 3.1. Пусть $(\mathcal{M}, \rho(g_0))$ — пространство с ограниченной кривизной. Тогда на дифференцируемом многообразии \mathcal{M} с атласом \mathfrak{h} можно задать последовательность бесконечно дифференцируемых римановых метрик $\{g_m\}$, $m=1, 2, \dots$, обладающих свойствами:

1) Метрические пространства $(\mathcal{M}, \rho(g_m))$ сходятся по Липшицу (см. введение) к метрическому пространству $(\mathcal{M}, \rho(g_0))$.

2) Имеют место оценки для границ кривизны:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{K}_m(\mathcal{M}) \leq \overline{K}_0(\mathcal{M}), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \underline{K}_m(\mathcal{M}) \geq \underline{K}_0(\mathcal{M}),$$

где через $\overline{K}_m(\mathcal{M})$, $\underline{K}_m(\mathcal{M})$ обозначены верхняя и нижняя границы кривизн пространств $\langle \mathcal{M}, g_m \rangle$, $m=0, 1, \dots$.

Следствие 3.1. Если $(\mathcal{M}, \rho(g_0))$ было полным метрическим пространством, то, начиная с некоторого номера, таковыми окажутся и пространства $(\mathcal{M}, \rho(g_m))$.

3.3. Доказательство теоремы 3.1. Напомним вкратце схему построения оператора де Рама [20] применительно к рассматриваемой нами ситуации.

3.3.1. Усреднение метрики по де Раму. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область, содержащая замкнутый единичный шар $\overline{B} : |x| \leq 1$.

В [20] построено семейство преобразований области G $s : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow G$. Перечислим его свойства [20], [6]:

а) Для каждого $v \in \mathbb{R}^n$ преобразование $s_v : G \rightarrow G$ ($s_v(x) = s(v, x)$) является диффеоморфизмом, совпадающим с тождественным вне шара \overline{B} .

б) Для произвольной точки $x \in \overline{B}$ отображение $\alpha_x : \mathbb{R}^n \rightarrow B$ ($\alpha_x(v) = s(v, x)$) является диффеоморфизмом \mathbb{R}^n на B .

в) Отображение $s : \mathbb{R}^n \times G \rightarrow G$ принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^n \times G)$.

г) Для каждого $x \in G$ $s(0, x) = x$.

Пусть $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — усредняющее ядро (см. [19], с. 33). Оператор $R_e(g_0)$ полагаем равным

$$R_e(g_0) = \int_{\mathbb{R}^n} (s_{ev}^* g_0) \omega(v) dv. \quad (3.1)$$

Для того, чтобы построить усредненную по де Раму метрику, выберем в \mathfrak{h} счетный локально конечный податлас $\mathfrak{h}' = \{x_\nu : \mathcal{U}_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ такой, что области $x_\nu(\mathcal{U}_\nu)$ совпадают с B , причем x_ν может быть продолжено на некоторую окрестность \mathcal{V}_ν множества $\overline{\mathcal{U}_\nu}$.

Для каждого ν метрический тензор g разложим на два гладких тензорных поля $g_0 = g'_\nu + g''_\nu$ таких, что $\text{supp } g'_\nu \subseteq \mathcal{V}'_\nu$, $g'_\nu(x) = g_0(x)$ для x , принадлежащих некоторой подобласти \mathcal{V}'_ν области \mathcal{V}'_ν , содержащей \bar{U}_ν , и $\text{supp } g''_\nu \cap \mathcal{U}_\nu = \emptyset$.

$R_{\nu, \varepsilon}(g_0)$ полагаем равным (см. [20], с. 115):

$$R_{\nu, \varepsilon}(g_0) = (x'_\nu)^* R_\varepsilon(x'^{-1}_\nu)^* g'_\nu + g''_\nu.$$

Очевидно, что

$$g_{\nu, \varepsilon}(x) = R_{\nu, \varepsilon}(g_0)|_x = g_0(x), \quad x \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{U}_\nu.$$

Из последнего равенства и формулы (3.1) следует, что $g_{\nu, \varepsilon}$ (как и g_0) является римановой метрикой на \mathcal{M} .

Пусть $\lambda = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ — произвольная последовательность положительных равномерно ограниченных чисел. Через $R_\lambda^{(\nu)}$ обозначим $R_{1, \varepsilon_1} \circ R_{2, \varepsilon_2} \circ \dots \circ R_{\nu, \varepsilon_\nu}$, $R_\lambda(g_0)$ определим с помощью равенства:

$$R_\lambda(g_0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} R_\lambda^{(\nu)}(g_0). \quad (3.2)$$

Поскольку в окрестности произвольного компакта в пространстве $(\mathcal{M}, \rho(g_0))$ при больших ν оператор $R_\lambda^{(\nu)}$ сводится к тождественному, предел (3.2) имеет смысл.

Из определения $R_\lambda^{(\nu)}$ и сказанного выше об операторах $R_{\nu, \varepsilon}$ следует, что $R_\lambda^{(\nu)}(g)$ является римановой метрикой на \mathcal{M} , если таковой была g . То же самое, очевидно, верно и для оператора R_λ .

Через g_λ обозначим риманову метрику на \mathcal{M} , равную $R_\lambda(g_0)$. Ее свойства будут рассмотрены ниже.

3.3.2. Оценки для оператора R_ε . Через $\mathcal{G}_p^2(G)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) обозначим пространство непрерывных дважды дифференцируемых в обобщенном смысле в области G римановых метрик $g(x) = (g_{ij}(x))_{i, j=1, \dots, n}$, для которых конечна норма

$$|g|_{\mathcal{G}_p^2(G)} = \max_{i, j} \{ |g_{ij}|_{W_p^2(G)} \}.$$

Лемма 3.1. Оператор R_ε отображает $\mathcal{G}_p^2(G)$ в $\mathcal{G}_p^2(G)$ при любом $1 \leq p \leq +\infty$, причем для каждого положительного числа δ найдется такое $\nu_\delta, p > 0$, что при всех $0 < \varepsilon < \nu_\delta, p$, выполнено:

1). При $1 \leq p < +\infty$ имеется оценка:

$$|R_\varepsilon(g) - g|_{\mathcal{G}_p^2(G)} \leq \delta. \quad (3.3)$$

2). Пусть $K_\sigma(x)$, $K_\sigma^\varepsilon(x)$ — секционные кривизны, вычисленные по метрикам $g \in \mathcal{G}_p^2(G)$ и $g_\varepsilon = R_\varepsilon(g)$ соответственно, где $x \in G$, $\sigma \subset (G)_x$ — двумерное направление, задаваемое бивектором с фиксированными координатами в R^n . Тогда, если

$$-\infty < \bar{K}_\sigma(G) = \sup_{x \in G} \text{vrai} \{ K_\sigma(x) \} < +\infty,$$

$$-\infty < \underline{K}_\sigma(G) = \inf_{x \in G} \text{vrai} \{ K_\sigma(x) \} < +\infty,$$

то при условии, что $p > n$, то же самое верно для соответствующих величин $\bar{K}_\sigma^\varepsilon(G)$, $K_\sigma^\varepsilon(G)$, вычисленных по метрике g_ε , причем имеют место неравенства:

$$|\bar{K}_\sigma(G) - \bar{K}_\sigma^\varepsilon(G)|, |K_\sigma(G) - K_\sigma^\varepsilon(G)| < \delta. \quad (3.4)$$

Доказательство леммы 3.1 носит технический характер. Оно основано на вытекающей из условий а), в), г) п. 3.3.1 оценке

$$|s_{\varepsilon v} - \text{id}_G|_{C^2(G)} \leq \alpha_G(\varepsilon), \quad |v| \leq 1,$$

где $\alpha_G(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, частично на результатах [20], а также на правиле дифференцирования суперпозиции ([7], теорема 4.6 главы 5). Похожие оценки (но в W_p^1) проделаны в [6]. Само доказательство леммы 3.1 мы опускаем.

3.3.3. Свойства усредненной по де Раму метрики. Свойства усредненной метрики мы формулируем в лемме 3.2. Предварительно дадим необходимые определения.

Пусть \mathcal{M} — дифференцируемое многообразие с фиксированным C^∞ -гладким счетным атласом $\mathfrak{h} = \{x_\nu: \mathcal{U}_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathcal{U}_\nu \subset \mathcal{M}\}$. Через $\mathcal{G}_{p, \mathfrak{h}}^2(\mathcal{M})$ обозначим множество непрерывных римановых метрик g на \mathcal{M} , для которых конечны полуnormы

$$|g|_{\mathcal{G}_{p, \mathfrak{h}}^2(\mathcal{M}), \nu} = |(x_\nu^{-1})^* g|_{\mathcal{G}_p^2(G_\nu)},$$

$$G_\nu = x_\nu(\mathcal{U}_\nu), \quad \nu = 1, 2, \dots$$

Аналогично определяются пространства $\mathcal{G}_g^{r, \alpha}(\mathcal{M})$, $r = 0, 1, 2, \dots$, $0 < \alpha < 1$, с полуnormами $|g|_{\mathcal{G}_g^{r, \alpha}(\mathcal{M}), \nu}$.

Через $\mathcal{G}_g^\infty(\mathcal{M})$ обозначим множество римановых метрик на \mathcal{M} , бесконечно дифференцируемых относительно атласа \mathfrak{h} .

Пусть $g \in \mathcal{G}_{p, \mathfrak{h}}^2(\mathcal{M})$. Тогда почти в каждой точке $P \in \mathcal{M}$ (это понятие определено для произвольного дифференцируемого многообразия) можно формально вычислить секционную кривизну $K_\sigma(P)$ по римановой метрике g . Через $\underline{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$, $\bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$ обозначим $\inf \nu |g|$ и $\sup \nu |g|$ соответственно для $K_\sigma(P)$ при $P \in \mathcal{M}$, $\sigma \in \mathcal{M}_p$.

Лемма 3.2. Пусть \mathcal{M} — дифференцируемое многообразие, \mathfrak{h} — C^∞ -гладкий локально конечный счетный атлас на \mathcal{M} , с помощью которого строился оператор усреднения де Рама R_λ (п. 3.3.1). Тогда имеют место утверждения:

1). Для произвольной последовательности λ равномерно ограниченных положительных чисел ε_i , $i = 1, 2, \dots$, оператор R_λ отображает $\mathcal{G}_{p, \mathfrak{h}}^2(\mathcal{M})$ в $\mathcal{G}_g^\infty(\mathcal{M})$.

2). Для каждого натурального k и произвольной последовательности положительных чисел a_ν , $\nu = 1, 2, \dots$, существует такая последовательность λ_k равномерно ограниченных положительных

чисел ε_{ki} , $i, k=1, 2, \dots$, что при $\nu=1, 2, \dots$, $g \in \mathcal{G}_{p, \mathfrak{h}}^2(\mathcal{M})$ имеет место оценка:

$$|R_{\lambda_k}(g) - g|_{\mathcal{G}_{p, \mathfrak{h}}^2(\mathcal{M}), \nu} \leq \frac{a_\nu}{k}, \quad (3.5)$$

если же $p > n$, то дополнительно можно утверждать наличие оценки при $\alpha=1-n/p$:

$$|R_{\lambda_k}(g) - g|_{\mathcal{G}_{\mathfrak{h}}^{1, \alpha}(\mathcal{M}), \nu} \leq \frac{a_\nu}{k} \quad (3.6)$$

и выполнение соотношений:

$$|\bar{K}_{g_k, \text{ф.}}(\mathcal{M}) - \bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})| \leq 1/k, \quad (3.7)$$

если $\bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M}) < +\infty$,

$$\bar{K}_{g_k, \text{ф.}}(\mathcal{M}) = +\infty, \quad (3.8)$$

если $\bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M}) = +\infty$, где $g_k = R_{\lambda_k}(g)$, и

$$|K_{g_k, \text{ф.}}(\mathcal{M}) - K_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})| \leq 1/k, \quad (3.9)$$

если $K_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M}) > -\infty$,

$$K_{g_k, \text{ф.}}(\mathcal{M}) = -\infty, \quad (3.10)$$

если $K_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M}) = -\infty$.

Доказательство. Утверждение 1) по сути доказано в [20] (см. 3) теоремы 12).

(3.5) следует из (3.3) и из конструкции оператора R_{λ_k} (п. 3.3.1). Аналогично из определений и теоремы 2.1 главы II в [11] выводится (3.6).

Пусть $\bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M}) = +\infty$, но $\bar{K}_{g_k, \text{ф.}}(\mathcal{M}) \leq C < +\infty$. Опираясь на (3.5), для каждого ν можно выбрать подпоследовательность g_{k_ν} так, чтобы имела место поточечная сходимость

$$d^{(2)}(x_\nu^{-1})^* g_{k_\nu} |_{x \rightarrow} d^{(2)}(x_\nu^{-1})^* g |_x.$$

(сходимость в L_p влечет сходимость некоторой подпоследовательности «почти всюду»). Но тогда, учитывая (3.6), сразу получается, что $\bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M}) \leq C$, что противоречит обращению в бесконечность $\bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$. Аналогично рассматривается случай обращения в бесконечность $K_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$.

(3.7), (3.9), когда $\bar{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$ и $K_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$ — конечны, непосредственно следует из (3.4) и конструкции R_{λ_k} .

3.3.4. Доказательство теоремы об аппроксимации. Пусть g_0 — метрический тензор пространства \mathcal{M} с ограниченной кривизной. Теорема 1.1 гарантирует, что $g_0 \in \mathcal{G}_{p, \mathfrak{h}}^2(\mathcal{M})$ при любом конеч-

ном $p \geq 1$, $\mathcal{U}' = \{x_\nu: \mathcal{U}_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ — локально конечный счетный атлас на \mathcal{M} , построенный в п. 3.3.1. Введем обозначения: $\bar{g}_{0,\nu} = (x_\nu^{-1})^* g_0|_{\mathcal{U}_\nu}$, $\bar{g}_{0,\nu}(x) = (g_{ij}^{0,\nu}(x))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $x \in \bar{B}$, последовательность положительных чисел $\{a_\nu\}$ зададим с помощью равенств:

$$a_\nu = \inf_{x \in \bar{B}} \left\{ \min_{|\xi| \neq 0, \xi \in \mathbb{R}^n} \{ \bar{g}_{ij}^{0,\nu}(x) \xi^i \xi^j / \delta_{ij} \xi^i \xi^j \} \right\}.$$

Через $g_k = R_{\lambda_k}(g_0)$ обозначим последовательность римановых метрик на \mathcal{M} , построенную в лемме 3.2 для указанной последовательности $\{a_\nu\}$.

Введем также обозначения: $\rho_k = \rho(g_k)$, $\rho_0 = \rho(g_0)$, $i_k: (\mathcal{M}, \rho_0) \rightarrow (\mathcal{M}, \rho_k)$ — отображение, для которого $i_k(P) = P$, $P \in \mathcal{M}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Через $(\bar{g}_{ij}^{k,\nu}(x))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $x \in \bar{B}$, обозначим компоненты метрического тензора $\bar{g}_{k,\nu}(x)$, равного $(x_\nu^{-1})^* g_k|_{\mathcal{U}_\nu}(x)$.

Пусть $\gamma: [0, l_0] \rightarrow \mathcal{M}$ — произвольная дифференцируемая (относительно атласа \mathcal{U}'), нормально параметризованная (относительно длины дуги в (\mathcal{M}, ρ_0)) кривая. Ее длину в (\mathcal{M}, ρ_k) обозначим через l_k .

Прежде всего, имея ввиду доказательство 1) теоремы 3.1, установим выполнение неравенства:

$$|l_k - l_0| \leq \frac{l_0}{k}. \quad (3.11)$$

С этой целью разобьем γ на конечное число дуг γ_i , каждая из которых содержится в некотором \mathcal{U}_{ν_i} при $i = 1, 2, \dots, N$. Длину γ_i в (\mathcal{M}, ρ_0) обозначим через $l_0^{(i)}$, а ее длину в (\mathcal{M}, ρ_k) — через $l_k^{(i)}$. Тогда:

$$|l_0^{(i)} - l_k^{(i)}| \leq \int_0^{l_0^{(i)}} \left| \bar{g}_{ml}^{-k,\nu_i} - \bar{g}_{ml}^{-0,\nu_i} \right| \dot{\gamma}_i^m \cdot \dot{\gamma}_i^l \left(\bar{g}_{ml}^{-0,\nu_i} \cdot \dot{\gamma}_i^m \cdot \dot{\gamma}_i^l \right)^{-1/2} ds. \quad (3.12)$$

Поскольку γ нормально параметризована в (\mathcal{M}, ρ_0) , то $\bar{g}_{ml}^{-0,\nu_i} \cdot \dot{\gamma}_i^m \cdot \dot{\gamma}_i^l = 1$ и из выражения для a_ν следует оценка:

$$\max_{\substack{m, l = 1, 2, \dots, n \\ 0 < s < l_0^{(i)}}} \{ \dot{\gamma}_i^m \cdot \dot{\gamma}_i^l(s) \} \leq \max_{0 < s < l_0^{(i)}} \{ \delta_{ml} \dot{\gamma}_i^m \cdot \dot{\gamma}_i^l \} \leq a_\nu^{-1}.$$

Из последнего неравенства, (3.12) и (3.6) леммы 3.2 следует, что

$$|l_k^{(i)} - l_0^{(i)}| \leq l_0^{(i)} / k.$$

Складывая последние неравенства при $i = 1, 2, \dots, N$, получаем оценку (3.11).

Из неравенства (3.11), учитывая внутренний характер метрик ρ_k , $k=0, 1, 2, \dots$, получаем неравенство:

$$|\rho_k(P, Q)/\rho_0(P, Q) - 1| \leq 1/k. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dil } i_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{dil } i_k^{-1} = 1$, что и требовалось для доказательства 1) теоремы 3.1.

Перейдем к доказательству 2) теоремы 3.1. Для $g \in \mathcal{G}_{\rho, \delta}^2(\mathcal{M})$ в п. 3.3.3 мы ввели величины $\underline{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$, $\overline{K}_{g, \text{ф.}}(\mathcal{M})$. Соответствующие величины для римановых метрик g_m , $m=1, 2, 3, \dots$ обозначим через $\underline{K}_{m, \text{ф.}}(\mathcal{M})$, $\overline{K}_{m, \text{ф.}}(\mathcal{M})$ соответственно. Заметим, что поскольку g_m — бесконечно дифференцируемые метрики на \mathcal{M} , то $\underline{K}_{m, \text{ф.}}(\mathcal{M}) = \underline{K}_m(\mathcal{M})$, $\overline{K}_{m, \text{ф.}}(\mathcal{M}) = \overline{K}_m(\mathcal{M})$. С учетом (3.7) — (3.10) леммы 3.2 для доказательства 2) теоремы 3.1 осталось заметить, что имеют место неравенства:

$$\overline{K}_{0, \text{ф.}}(\mathcal{M}) \leq \overline{K}_0(\mathcal{M}), \quad \underline{K}_{0, \text{ф.}}(\mathcal{M}) \geq \underline{K}_0(\mathcal{M}),$$

выполнение которых немедленно следует из теоремы 2.1.

Теорема 3.1 доказана.

3.4. Следствия теоремы об аппроксимации. Теорема об аппроксимации позволяет механически переносить некоторые теоремы римановой геометрии в целом на случай пространств с ограниченной кривизной и тем самым придавать формулировкам этих теорем чисто метрический характер, исключая из них всякие априорные предположения о дифференциальных свойствах метрики и даже предположение о том, что рассматриваемое пространство является многообразием. В качестве примера такого рода мы приведем метрический вариант известной теоремы о сфере (см. [8], п. 7.8):

Теорема 3.2. Пусть (\mathcal{M}, ρ) — полное односвязное локально компактное метрическое пространство с внутренней метрикой, в котором выполнено условие локальной продолжаемости кратчайшей. Тогда, если верхняя и нижняя границы кривизны (\mathcal{M}, ρ) допускают оценку

$$1/4 < \underline{K}(\mathcal{M}) \leq \overline{K}(\mathcal{M}) \leq 1,$$

то (\mathcal{M}, ρ) есть многообразие, гомеоморфное сфере S^n при некотором натуральном $n > 2$.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что (\mathcal{M}, ρ) есть пространство с ограниченной кривизной размерности большей двух. Из теоремы 3.1 (см. также следствие 3.1) мы получаем, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется C^∞ -гладкое риманово многообразие $(\mathcal{M}, g_\varepsilon)$, d_L -близкое к исходному метрическому пространству, секционные кривизны которого при всех $P \in \mathcal{M}$, $\sigma \subset \mathcal{M}_P$ допускают оценку:

$$\underline{K}(\mathcal{M}) - \varepsilon \leq K_\sigma \leq 1 + \varepsilon.$$

Выберем ε таким, чтобы $(K(\mathcal{M}) - \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$ все еще оставалось большим $1/4$. Умножая g_ε на постоянную, можно добиться, чтобы для секционных кривизин получившегося риманова многообразия уже были выполнены неравенства:

$$1/4 < c \leq K_\varepsilon \leq 1,$$

где $c = (K(\mathcal{M}) - \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$.

Но тогда, в силу теоремы о сфере, $\mathcal{M} \approx S^n$, что и требовалось.

Аналогично можно привести метрические формулировки теорем С. Б. Мейерса ([8], п. 7.3), теоремы Клингенберга ([8], п. 7.5), соответствующим образом переформулировать теорему Берже [27] и т. д.

В качестве менее тривиального примера применения теоремы об аппроксимации приведем «метрический вариант теоремы Шура», анонсированный в [16].

Теорема 3.3. Пусть (\mathcal{M}, ρ) — локально компактное метрическое пространство с внутренней метрикой, в котором выполнено условие локальной продолжаемости кратчайшей, причем размерность (\mathcal{M}, ρ) по Урысону — Менгеру [9] больше двух. Предположим, что для каждой точки $P \in \mathcal{M}$ существует предел отношений $\delta(T)/\sigma(T)$, когда треугольники произвольным образом стягиваются к точке P (дополнительно предполагается, что вырожденные треугольники достаточно малого периметра имеют нулевой избыток, в этом смысле понимается существование предела, когда $\sigma(T) = 0$). Тогда (\mathcal{M}, ρ) изометрично риманову многообразию постоянной кривизны.

§ 4. ТЕОРЕМА О ЗАМЫКАНИИ

Через \mathfrak{M}_c обозначим множество компактных метрических пространств с внутренней метрикой, а через $\mathfrak{M}_c^\infty(n)$ обозначим подмножество в \mathfrak{M}_c , состоящее из n -мерных C^∞ -гладких компактных римановых многообразий ($n \geq 2$).

Через \mathfrak{M}_c^∞ обозначим объединение множеств $\mathfrak{M}_c^\infty(n)$, $n = 2, 3, \dots$

4.1. Топология сходимости с ограниченной кривизной.

Скажем, что последовательность $\{(\mathcal{M}_k, \rho_k)\}$ метрических пространств из \mathfrak{M}_c сходится с ограниченной кривизной к метрическому пространству $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$ (обозначение: $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty) = (\text{b.c.}) \lim (\mathcal{M}_k, \rho_k)$), если:

а) Верхняя и нижняя границы кривизны (\mathcal{M}_k, ρ_k) , начиная с некоторого номера k_0 , равномерно ограничены:

$$-\infty < -c \leq \underline{K}(\mathcal{M}_k) \leq \bar{K}(\mathcal{M}_k) \leq c < +\infty.$$

б) Метрические пространства (\mathcal{M}_k, ρ_k) d_L -сходятся к метрическому пространству $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$.

Замечание. При $k=1, 2, \dots, k_0-1$ допускается обращение в бесконечность $\bar{K}(\mathcal{M}_k)$ или $\underline{K}(\mathcal{M}_k)$.

Через $\tau_{b.c.}$ обозначим секвенциальную топологию в \mathfrak{M}_c , индуцированную (b.c.) \lim (см. [34], [24]). Заметим, что для (b.c.) \lim выполнены свойства (L1) — (L4) п. 1.7.18 в [24], поэтому $\tau_{b.c.}$ есть топология Фреше [24]. Таким образом, замыкание произвольного подмножества $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_c$ получается при добавлении к \mathfrak{A} всех (b.c.) \lim всевозможных сходящихся с ограниченной кривизной последовательностей из \mathfrak{A} .

Напомним, что подмножество $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}_c$ открыто, если для каждого $\mathcal{N} \in \mathfrak{X}$ и произвольной последовательности $\{\mathcal{N}_h\}_{h=1,2,\dots} \subset \mathfrak{X}$, сходящейся с ограниченной кривизной к \mathcal{N} ($\mathcal{N} = (b.c.) \lim \mathcal{N}_h$), все члены последовательности $\{\mathcal{N}_h\}$, начиная с некоторого номера, лежат в \mathfrak{X} (см. [34], с. 207). В частности множество $\{\mathcal{N} \in \mathfrak{M}_c \mid d_L(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < \varepsilon\}$ — $\tau_{b.c.}$ -открыто, и $(\mathfrak{M}_c, \tau_{b.c.})$ является хаусдорфовым топологическим пространством. $\tau_{b.c.}$ в свою очередь определяет сходимость в \mathfrak{M}_c . В [34] доказано, что эта сходимость эквивалентна (b.c.) \lim -сходимости.

4.2. Теорема о замыкании.

Теорема 4.1. Замыкание множества \mathfrak{M}_c^∞ в топологическом пространстве $(\mathfrak{M}_c, \tau_{b.c.})$ в точности состоит из всевозможных компактных пространств с ограниченной кривизной.

Доказательство. Достаточно установить, что в топологии $\tau_{b.c.}$ $\bar{\mathfrak{M}}_c^\infty(n)$ совпадает с множеством компактных n -мерных пространств с ограниченной кривизной.

Нетривиальная часть теоремы 3.1 о том, что каждое компактное n -мерное пространство с ограниченной кривизной есть (b.c.) \lim C^∞ -гладких компактных n -мерных римановых многообразий, является следствием теоремы 3.1.

Осталось следовательно установить, что каждый (b.c.) \lim последовательности $\{(\mathcal{M}_h, \rho(g_h))\} \subset \mathfrak{M}_c^\infty(n)$ есть n -мерное пространство $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$ с ограниченной кривизной.

Поскольку $\{(\mathcal{M}_h, \rho(g_h))\}$ есть (b.c.) \lim -сходящаяся последовательность, то найдется такое $k_0 > 0$, что имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \inf \{ \text{Vol}(\mathcal{M}_k, \rho(g_k)) \} &> 0, \\ \sup \{ \text{diam}(\mathcal{M}_k, \rho(g_k)) \} &< +\infty, \\ \underline{K} &= \inf \{ \underline{K}_{g_k}(\mathcal{M}_k) \} > -\infty, \\ \bar{K} &= \sup \{ \bar{K}_{g_k}(\mathcal{M}_k) \} < +\infty, \quad k \geq k_0. \end{aligned}$$

Из этих оценок следует, что радиус инъективности римановых многообразий $\langle \mathcal{M}_h, g_h \rangle$ допускает оценку:

$$i_0 = \inf \{ i(\mathcal{M}_k) \} > 0, \quad k \geq k_0.$$

(см. [35], предложение 2.11).

Пусть $B(P_k, r)$ — шар в $\langle \mathcal{M}_k, g_k \rangle$, где $r = i_0/4$ (при $\bar{K} > 0$ добавляется требование, чтобы $r < \pi/3 \sqrt{\bar{K}}$). Любая кратчайшая с концами в $B(P_k, r)$, очевидно, лежит в $B(P_k, i_0)$, но тогда все такие кратчайшие непрерывно зависят от своих концов. Из предложения 9 § 3 в [25] следует, что $B(P_k, r)$ есть область $R_{\bar{K}, \bar{K}}$ (см. [2], [25]). Следовательно, в $B(P_k, r)$ выполнены условия \bar{K} -вогнутости и \underline{K} -выпуклости. С помощью предельного перехода устанавливается \bar{K} -вогнутость и \underline{K} -выпуклость в произвольном шаре радиуса r в $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$. Но это в точности означает ограниченность кривизны $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$ в смысле А. Д. Александрова. По поводу \bar{K} -вогнутости и \underline{K} -выпуклости мы отсылаем читателя к [25], [4]. Поскольку $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$ — n -мерное топологическое многообразие, то в силу ограниченности его кривизны, в $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$ выполнено условие локальной продолжаемости кратчайшей [5]. Таким образом, $(\mathcal{M}_\infty, \rho_\infty)$ есть n -мерное компактное пространство с ограниченной кривизной. Теорема 4.1 доказана.

В заключение отметим, что теорема 4.1 была анонсирована в [17].

4.3. Добавление к теореме компактности Громова. Во введении мы сформулировали теорему компактности М. Громова.

Через $\mathfrak{M}(n, d, V, \underline{K}, \bar{K})$ обозначим класс n -мерных компактных пространств с ограниченной кривизной, для которых выполнены условия 1) — 2) введения, а условие 3) заменено на

3') Кривизна \mathcal{M} допускает оценку:

$$\underline{K} \leq \underline{K}(\mathcal{M}) \leq \bar{K}(\mathcal{M}) \leq \bar{K}.$$

Из теоремы о замыкании непосредственно следуют приводимые ниже утверждения:

Следствие 4.1. $\mathfrak{M}(n, d, V, \underline{K}, \bar{K})$ есть секвенциально компактное подмножество в $(\mathfrak{M}_c, \tau_{в.с.})$.

Следствие 4.2. $\mathfrak{M}(n, d, V, \underline{K}, \bar{K})$ — компактно относительно топологии, задаваемой в нем функцией расстояния d_L .

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — 386 с.
2. — Одна теорема о треугольниках в метрическом пространстве и некоторые ее приложения // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1951. — 38. — С. 5—23
3. — Линейчатые поверхности в метрических пространствах // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех. и астрон. — 1957. — 1, № 1. — С. 5—26 (РЖМат, 1959, 844)

4. — *Берестовский В. Н., Николаев И. Г.* Обобщенные римановы пространства // Успехи мат. наук.— 1986.— 41, № 3.— С. 3—44 (РЖМат, 1986, 10А793)
5. — *Залгаллер В. А.* Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1962.— 63.— 262 с. (РЖМат, 1964, 6А454)
6. *Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.* Об одном свойстве операторов регуляризации де Рама // Сиб. мат. ж.— 1984.— 25, № 2.— С. 104—111 (РЖМат, 1984, 8А746)
7. — *Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.— 284 с. (РЖМат, 1984, 3Б238К)
8. *Громол Д., Клингсберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М.: Мир, 1971.— 343 с. (РЖМат, 1971, 7А734К)
9. *Гуревич В., Волман Г.* Теория размерности.— М.: Гос. изд-во ин. лит.— 1948.— 232 с.
10. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств.— М.—Л.: ОНТИ, 1936.— 244 с.
11. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.— М.: Наука, 1964.— 538 с. (РЖМат, 1965, 11Б241К)
12. *Николаев И. Г.* Параллельный перенос и гладкость метрики пространств с ограниченной кривизной // Докл. АН СССР.— 1980.— 250, № 5.— С. 1056—1058 (РЖМат, 1980, 7А695)
13. — Параллельный перенос и гладкость метрики пространств с ограниченной кривизной. / Препр. // Ин-т мат. СО АН СССР.— Новосибирск.— 1980.— 32 с. (РЖМат, 1980, 7А694)
14. — О параллельном переносе векторов в пространствах с двусторонне ограниченной по А. Д. Александрову кривизной // Сиб. мат. ж.— 1983.— 24, № 1.— С. 130—145 (РЖМат, 1984, 12А784)
15. — О гладкости метрики пространств с двусторонне ограниченной по А. Д. Александрову кривизной // Сиб. мат. ж.— 1983.— 24, № 2.— С. 114—132 (РЖМат, 1983, 9А675)
16. — Изотропные метрические пространства // Докл. АН СССР.— 1989.— 305, № 6.— С. 1314—1317
17. — Замыкание множества римановых многообразий с ограниченными секционными кривизнами // Всес. школа «Оптимальное управление. Геометрия и анализ».— Кемерово, сент. 1988 г.: Тез. докл.— Кемерово, 1988.— С. 38
18. — Формула Синга для геодезических вариаций в пространстве с ограниченной по А. Д. Александрову кривизной / Препр. // Ин-т мат. СО АН СССР.— Новосибирск.— 1988.— № 35.— 50 с.
19. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— изд. 2-е, перераб.— М.: Наука, 1977.— 455 с. (РЖМат, 1978, 5Б68К)
20. *Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия.— М.: Изд-во ин. лит., 1956.— 250 с. (РЖМат, 1958, 703К)
21. *Решетняк Ю. Г.* Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. Ч. I // Сиб. мат. ж.— 1960.— 1, № 1.— С. 88—116; Ч. II // Сиб. мат. ж.— 1960.— 1, № 2.— С. 248—276 (РЖМат, 1961, 9А590; 1962, 5А489)
22. *Сабитов И. Х., Шефель С. З.* О связях между порядками гладкости поверхности и ее метрики // Сиб. мат. ж.— 1976.— 17, № 4.— С. 916—925 (РЖМат, 1974, 2А742)
23. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— М.: Изд-во Ленингр. ун-та.— 1950.— 255 с.
24. *Энглекинг Р.* Общая топология. Пер. с англ.— М.: Мир, 1986.— 751 с. (РЖМат, 1986, 9А506К)

25. *Alexandrow A. D.* Über eine Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie // Schr. Forschungsinst. Math.— 1957.— 1.— C. 33—84 (PJKMat, 1962, 1A434)
26. *Berger M.* Les variétés riemanniennes $(1/4)$ -pincées // Ann. Scuola Norm. super-Pisa.— Sci. fis. e mat.— 1960.— 14, № 2.— C. 161—170 (PJKMat, 1961, 5A523)
27. — Sur les variétés riemanniennes pincées juste au-dessous de $1/4$ // Ann. Inst. Fourier.— Grenoble.— 1983.— 33, № 2.— C. 135—150 (PJKMat, 1983, 12A886)
28. *Durumeric O.* A generalization of Berger's on almost $1/4$ -pinched manifolds theorem. I // Bull. Amer. Math. Soc.— 1985.— 12, № 2.— C. 260—264 (PJKMat, 1986, 1A779)
29. — A generalization of Berger's theorem on almost $1/4$ -pinched manifolds. II // J. Differ. geom.— 1987.— 26, № 1.— C. 101—139 (PJKMat, 1988, 4A543)
30. *Fukaya K.* Collapsing Riemannian manifolds to ones of lower dimensions // J. Differ. Geom.— 1987.— 25, № 1.— C. 139—156 (PJKMat, 1988, 2A796)
31. *Greene R. E., Wu H.* Lipschitz convergence of Riemannian manifolds // Pacif. J. Math.— 1988.— 131, № 1.— C. 119—141 (PJKMat, 1988, 8A682)
32. *Gromov M.* Structures metriques pour les variétés Riemanniennes. I / Redigé par Lafontaine I. et Pansu P.— Paris: Cedec / Fernand Nathan, 1981.— 150 c.
33. *Katsuda A.* Gromov's convergence theorem and its application // Nagoya Math. J.— 1985.— 100.— C. 11—48 (PJKMat, 1986, 7A837)
34. *Kiszyński I.* Convergence du type L // Colloq. math.— 1960.— 7, № 2.— C. 205—211 (PJKMat, 1962, 4B311)
35. *Peters S.* Konvergenz Riemannscher Mannigfaltigkeiten.— Bonn. math. Schr.— 1986.— № 169.— 48 c. (PJKMat, 1986, 11A800)
36. — Convergence of Riemannian manifolds // Compos. math.— 1987.— 62, № 1.— C. 3—16 (PJKMat, 1988, 1A687)
37. *Whitney H.* Differential manifolds // Ann. Math.— 1936.— 37, № 3.— C. 645—680