В. Ф. Писаренко, В. Б. Лысенко, Распределение вероятностей максимального землетрясения, которое может произойти в заданный промежуток времени,
Докл. РАН, 1996, том 347, номер 3, 399–401

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1996, том 347, № 3, с. 399–401

ГЕОФИЗИКА

УДК 550.34

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МАКСИМАЛЬНОГО ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ, КОТОРОЕ МОЖЕТ ПРОИЗОЙТИ В ЗАДАННЫЙ ПРОМЕЖУТОК ВРЕМЕНИ

© 1996 г. **В. Ф. Писаренко, В. Б. Лысенко**

Представлено академиком В.И. Кейлис-Бороком 29.11.94 г.

Поступило 02.12.94 г.

Важнейшим параметром сейсмического режима в сейсмоактивном регионе является $M_{\max}$ – максимальная возможная для данного региона магнитуда землетрясения [1]. В [2] изложена методика получения точных доверительных интервалов для $M_{\max}$ при наличии конечной выборки, а также выведено фидуциальное распределение для этого параметра. Однако для многих практических задач сейсморайонирования и инженерной сейсмологии больший интерес представляет не $M_{\max}$, а максимальная магнитуда μ_T землетрясения, которое может произойти в заданный промежуток времени $[0, T]$. В настоящей заметке мы получим распределение для случайной величины μ_T при неизвестном параметре $M_{\max}$, по которому производится осреднение с фидуциальным распределением, полученным по прошлому интервалу времени $[-\tau, 0]$. Попутно мы обобщим формулу для распределения μ_T при известном $M_{\max}$ на случай произвольного точечного процесса (ранее эта формула была известна для пуассоновского процесса [3]).

Предположим, что функция распределения магнитуд (закон повторяемости землетрясений) $F(x)$ не зависит от моментов времени, в которые происходят землетрясения. Производящую функцию числа событий (землетрясений) на интервале $[0, T]$ обозначим $R_T(z)$:

$$R_T(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(T) z^k, \quad 0 \le z \le 1, \tag{1}$$

где $p_k(T)$ – вероятность того, что на $[0, T]$ произойдет ровно k событий. Для функции распределения $\Phi_T(x)$ случайной величины μ_T при условии, что на $[0, T]$ произошло не менее одного события, нетрудно получить выражение

$$\Phi_T(x) = \frac{R_T[F(x)] - p_0(T)}{1 - p_0(T)}. \tag{2}$$

Формула (2) является обобщением известной формулы [3] для пуассоновского процесса на случай произвольного точечного процесса. Для пуассоновского процесса имеем

$$\begin{gathered} p_k(T) = [(\lambda T)^k \exp(-\lambda T)]/k!, \\ \Phi_T(x) = \frac{\exp(\lambda T F(x)) - 1}{\exp(\lambda T) - 1}, \end{gathered} \tag{3}$$

где λ – интенсивность процесса. Приведем еще два примера $\Phi_T(x)$:

$$\begin{gathered} 1)\ p_k(T) = \frac{1}{\lambda T + (1 + 1/\lambda T)^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \\ \Phi_T(x) = \frac{F(x)}{1 + \lambda T[1 - F(x)]}; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered} 2)\ p_m(T) = 1, \quad m = \lambda T; \quad p_k(T) = 0, \quad k \ne m; \\ \Phi_T(x) = F^m(x) = F^{\lambda T}(x). \end{gathered} \tag{5}$$

Второй случай соответствует детерминированному числу событий $\lambda T = m$, которое в данном случае предполагается целым.

Предположим теперь, что закон повторяемости землетрясений зависит от неизвестного параметра $\theta = M_{\max}$ следующим образом:

$$\begin{gathered} F(x; \theta) = \frac{G(x)}{G(\theta)}, \quad M_0 \le x \le \theta; \\ F(x; \theta) \equiv 1, \quad x > \theta, \end{gathered} \tag{6}$$

где

$$G(x) = \int_{M_0}^{x} \varphi(u) du, \quad x \ge M_0.$$

Здесь M_0 – нижний порог регистрируемых магнитуд (известный параметр), $\varphi(u)$ – некоторая

Международный институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики Российской Академии наук, Москва

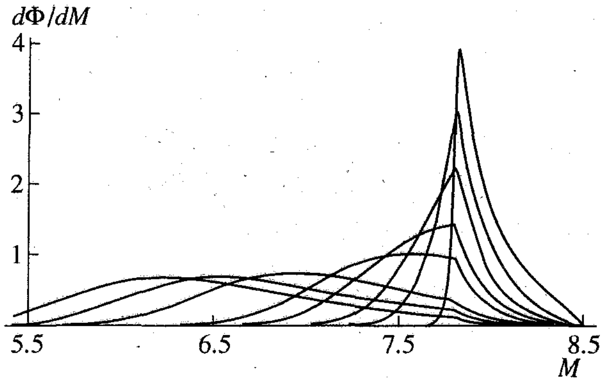

Рис. 1. Плотности вероятностей распределения $\Phi_{T,\tau}(M)$ максимальной случайной магнитуды землетрясения, которое может произойти в будущий интервал времени $[0, T]$ для региона Кавказа. Здесь и на рис. 2 кривые слева направо соответствуют значениям T = 3, 5, 10, 30, 50, 100, 200, 1000 лет.

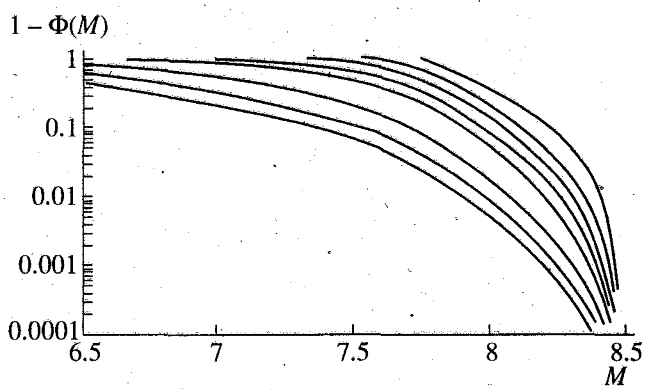

Рис. 2. Графики функции $1 - \Phi_{T,\tau}(M)$ в логарифмическом масштабе для региона Кавказа.

положительная, интегрируемая функция (для закона Гутенберга–Рихтера $\varphi(u) = 10^{-bu}$, где b – наклон графика повторяемости землетрясений). Аналогично [2] можно вывести фидуциальное распределение $\Psi_\tau(x)$ параметра $M_{\max} = \theta$ при условии, что известна максимальная наблюденная магнитуда η_τ на прошлом отрезке времени $[-\tau, 0]$:

$$\Psi_\tau(x) = \frac{1 - R[G(\eta_\tau)/G(x)]}{1 - p_0(\tau)}, \quad x \geq \eta_\tau. \tag{7}$$

Предположим, что априори (из физических или иных соображений) известна верхняя грань $\overline{M}$ для возможных магнитуд $M_{\max}$. Тогда, используя эту информацию, получаем следующее априорное распределение для θ, сосредоточенное на интервале $(\eta_\tau, \overline{M})$:

$$\frac{\Psi_\tau(x)}{\Psi_\tau(\overline{M})}, \quad \eta_\tau \leq x \leq \overline{M}. \tag{8}$$

Для распределения $\Phi_T(x)$ случайной магнитуды μ_T, которое мы будем называть апостериорным, получаем из (2), (8)

$$\Phi_T(x) = \int_{\eta_\tau}^{\overline{M}} \frac{R_T(F(x;\,\theta)) - p_0(T)}{1 - p_0(T)} \frac{d\Psi_\tau(\theta)}{\Psi_\tau(\overline{M})}. \tag{9}$$

Для пуассоновского потока землетрясений (3) интеграл (9) удается взять в явном виде для произвольного закона повторяемости $F(x;\,\theta)$ вида (6). При $x \leq \eta_\tau$ имеем

$$\Phi_T(x) = \frac{K_1 - \exp(\lambda\tau) - \dfrac{K_1K_4 - K_2\exp(\lambda\tau)}{1 + TF(x;\,\eta_\tau)/\tau}}{c(T)[\exp(\lambda\tau) - K_1]}. \tag{10}$$

При $x \geq \eta_\tau$ получаем другую формулу:

$$\Phi_T(x) = [K_1 - \exp(\lambda\tau) - K_3\exp(\lambda\tau) + \exp(\lambda\tau + \lambda T) - (K_1K_4 - K_3\exp(\lambda T))/(1 + TF(x;\,\eta_\tau)/\tau)]/c(T)[\exp(\lambda\tau) - K_1]. \tag{11}$$

В формулах (10), (11) использованы следующие обозначения:

$$K(t, x, y) = \exp(\lambda t F(x;\,y));$$

$$K_1 = K(\tau, \eta_\tau, \overline{M}); \quad K_2 = K(T, x, \eta_\tau);$$

$$K_3 = K(\tau, \eta_\tau, x); \quad K_4 = K(T, x, \overline{M});$$

$$c(T) = \exp(\lambda T) - 1.$$

Аналогичным образом интеграл (9) берется в явном виде для произвольного закона повторяемости $F(x;\,\theta)$ и в случае точечных процессов, задаваемых вероятностями (4) и (5). Мы не приводим соответствующих формул, чтобы не загромождать заметку. В качестве примера использования формул (10), (11) на рис. 1 приведено семейство плотностей распределения $d\Phi_T(x)/dx$ для некоторого набора значений T. Расчеты проводили для региона Кавказа: $36.0 \leq \lambda \leq 46.0$; $36.0 \leq \varphi \leq 51.0$; 1900–1991 г.; $\tau = 90.74$; $M_0 = 5.4$; $\eta_\tau = 7.8$.

В качестве $\lambda\tau$ брали число наблюденных за указанный период землетрясений с $M \geq M_0$, которое после удаления афтершоков по методике [4] оказалось равным 133. Для $\overline{M}$ было принято значение 8.5. Из рис. 1 видно, что плотности имеют заметную асимметрию, что не дает возможности использовать стандартные статистические характеристики – среднее значение и стандартное отклонение, которые обычно используют для распределений, близких к нормальному. Для таких асимметричных распределений квантили достаточно высокого уровня удобно находить из графиков функции $1 - \Phi_T(x)$ в логарифмическом масштабе. Такие графики представлены на рис. 2.

Для детерминированного точечного процесса (5) во всех сосчитанных нами примерах апостериорная функция $\Phi_T(x)$ практически совпадала с соответствующей функцией для пуассоновского потока событий. Для вероятностей (4), соответствующих точечному процессу с сильной кластеризацией и с наличием больших пустых интервалов, функции $\Phi_T(x)$, как показывают численные примеры, в большинстве случаев довольно близки к соответствующим функциям для пуассоновского потока, хотя в отдельных случаях при больших λT могут отличаться от последних.

Полученные семейства распределений $\Phi_T(x)$ могут быть нанесены на карту, например, в виде квантилей заданного уровня, а также могут служить основой для получения статистических оценок сейсмического риска в сейсмоактивных регионах.

В заключение отметим, что изложенная методика вычисления $\Phi_T(x)$ может быть применена для вывода распределения экстремального (как максимального, так и минимального) значения любых процессов, заданных каталогом независимых или пуассоновских событий, таких, например, как скорость ветра, температура, количество осадков и т.п.

Авторы благодарят В.И. Уломова за предоставленный каталог землетрясений Кавказа, а также Г.М. Молчана и О.Е. Дмитриеву за предоставленные результаты по выделению афтершоков.

Настоящая работа выполнялась при поддержке International Science Foundation (фонд Сороса), грант № MJF000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ризниченко Ю.В.* Проблемы сейсмологии. Избранные труды. М.: Наука, 1985. 408 с.
2. *Писаренко В.Ф.* // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 9. С. 38–46.
3. *Epstein B., Lomnitz C.* // Nature. 1966. V. 211. P. 954–956.
4. *Молчан Г.М., Дмитриева О.Д.* Сейсмичность и сейсмическое районирование Северной Евразии. М.: Ин-т физики Земли РАН, 1994. В. 1.