С. В. Знаменский, Всегда ли выпуклые носители аналитического функционала имеют общую точку?, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 2, 42–46

ЛИТЕРАТУРА

1. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков.— М.: Наука, 1985.— 271 с.

2. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами.— М.: Наука, 1973.— 446 с.

г. Кемерово

Поступила
20.01.1989

С. В. Знаменский

УДК 517.553

ВСЕГДА ЛИ ВЫПУКЛЫЕ НОСИТЕЛИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛА ИМЕЮТ ОБЩУЮ ТОЧКУ?

Вопрос, сформулированный в заголовке, возник в связи с одной задачей о полноте системы экспонент.

§ 1. Задача о полноте системы экспонент

Пусть $H(\mathbf{C})$ — пространство целых функций, $H'(\mathbf{C})$ — сопряженное к нему пространство аналитических функционалов. Для $Q \in H'(\mathbf{C})$ обозначим через $v_Q : H(\mathbf{C}) \to H(\mathbf{C})$ оператор свертки с функционалом Q, а через E_Q — совокупность тех экспоненциальных полиномов, на которых v_Q равен нулю.

Будем предполагать, что преобразование Лапласа функционала Q имеет вполне регулярный рост. Это условие, как известно, эквивалентно тому, что для любого функционала $T \in H'(\mathbf{C})$ выпуклый носитель свертки $T * Q$ равен сумме выпуклых носителей функционалов T и Q. При таком условии имеет место следующее утверждение.

Альтернатива. *Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, $Q \in H'(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$; тогда либо* 1) *$D$ содержит некоторый сдвиг выпуклого носителя функционала Q, либо* 2) *E_Q плотно в $H(D)$.*

Доказательство. Если D содержит сдвиг выпуклого носителя функционала Q, то в $H'(D)$ имеется ненулевой функционал $\widetilde{Q}$, равный нулю на E_Q (это сдвиг функционала Q). В этом случае E_Q не может быть плотно в $H(D)$.

Пусть теперь E_Q не плотны в $H(D)$. Тогда найдется $S \in H'(D) \setminus \{0\}$, равный нулю на E_Q. Из леммы 1.8.2 из [1] найдется функционал $T \in H'(\mathbf{C})$, для которого $S = T * Q$. Поскольку выпуклый носитель S есть сумма выпуклых носителей T и Q, а D содержит выпуклый носитель функционала Q, то она содержит и некоторый сдвиг выпуклого носителя функционала S. Таким образом, случаи 1) и 2) взаимно исключают друг друга, но одна из этих возможностей обязательно реализуется.

Автор анонсировал многомерный аналог этого несложного утверждения в виде дополнения к одной теореме о спектральном синтезе [2]. Однако при внимательном рассмотрении оказалось. что имевшееся ввиду „дословное“ распространение этого утверждения на случай $n > 1$ предполагает положительный ответ на поставленный в заголовке вопрос. Попытки получить этот ответ не увенчались успехом, но породили ряд разнообразных гипотез [3]. Формулируя ниже эти гипотезы, будем придерживаться терминологии и обозначений из [1], [4], [5].

§ 2. Эквивалентные гипотезы

H1. Пересечение всех выпуклых носителей произвольного аналитического функционала $T \in H'(\mathbf{C}^n)$ не пусто.

H2. Для любой целой функции f экспоненциального типа можно выбрать такое $a \in \mathbf{C}^n$, что функция $g(z) = e^{\langle a, z\rangle} f(z)$ не убывает экспоненциально ни в одном конусе с непустой внутренностью (т. е. ни в одном таком конусе функция $|g(z)| e^{\varepsilon |z|}$ не ограничена ни при каком $\varepsilon > 0$).

Н3. Для любой положительно однородной плюрисубгармонической функции ψ в C^n найдется такое $a \in C^n$, что $\operatorname{Re}\langle a, z\rangle + \psi(z) \geqslant 0$ для всех $z \in C^n$.

Н4. Пересечение любых $2n+1$ выпуклых носителей произвольного аналитического функционала $T \in H'(C^n)$ не пусто.

Будем называть диском образ единичного замкнутого круга при дробно-линейном вложении в CP^n. Дробно-линейным мы называем вложение вида $\tau(z) = (a_0 z + b_0, \ldots, a_n z + b_n)_0$, где $(\ldots)_0$ означает запись в однородных координатах.

Н5. Если семейство дисков в CP^n имеет непустое пересечение, а в некоторой окрестности их объединения голоморфна непостоянная функция q, то существует комплексная гиперплоскость, не пересекающая ни один диск семейства.

Н6. Если $2n+1$ дисков в CP^n имеют общую точку и в окрестности их объединения голоморфна непостоянная функция, то все эти диски не пересекают некоторую комплексную гиперплоскость.

Теорема 1. *Гипотезы* Н1 — Н6 *эквивалентны.*

Доказательство. Н1 $\Rightarrow$ Н2. Действительно, любая целая функция экспоненциального типа f есть преобразование Лапласа $\mathcal{L}(T)$ некоторого аналитического функционала T (т. е. $f(z) = T(e^{\langle a, z\rangle})$), и если гипотеза Н1 справедлива, обозначим через $(-a)$ общую точку всех выпуклых носителей функционала T. Тогда гипотеза Н2 вытекает из теоремы 12.9 в [1] (с. 84).

Н2 $\Rightarrow$ Н3. Любая положительно однородная плюрисубгармоническая функция ψ в C^n является регуляризованным радиальным индикатором некоторой целой функции экспоненциального типа (см., напр., [6], теорема 3.5.1).

Н3 $\Rightarrow$ Н1 вытекает из теоремы Пойа ([1], теорема 6.7).

Итак, мы замкнули цепочку Н1 $\Rightarrow$ Н2 $\Rightarrow$ Н3 $\Rightarrow$ Н1. Гипотезы Н1 и Н4 эквивалентны в силу теоремы Хелли (см., напр., [7]). Следовательно, первые четыре из рассматриваемых гипотез эквивалентны.

Прежде чем продолжить доказательство теоремы, рассмотрим две вспомогательные гипотезы. Для этого назовем круговым цилиндром множество точек, расстояние от которых до фиксированной комплексной гиперплоскости меньше константы.

Н7. Пусть даны функционал T и семейство круговых цилиндров. Если каждый цилиндр из семейства содержит носитель функционала T, то все эти цилиндры имеют общую точку.

Н8. Пусть даны функционал T и набор из $2n+1$ круговых цилиндров. Если каждый из них содержит носитель функционала T, то все эти цилиндры имеют общую точку.

Окончание доказательства теоремы 1. Нетрудно видеть, что Н1 $\Rightarrow$ Н7 $\Rightarrow$ Н8. Известно, что любой выпуклый компакт, в частности, выпуклый носитель функционала, совпадает с пересечением всех содержащих его полупространств. Каждое из таких полупространств нетрудно представить в виде объединения расширяющейся последовательности вложенных круговых цилиндров. Выбирая конечное подпокрытие, получаем, что каждое из этих полупространств содержит круговой цилиндр, в свою очередь, содержащий наш компактный носитель. Отсюда следует, что любой выпуклый носитель функционала T может быть представлен в виде пересечения некоторого семейства круговых цилиндров. Применяя теорему Хелли к объединению этих семейств, получаем, что Н8 $\Rightarrow$ Н1. Таким образом, гипотезы Н1, Н7, Н8 эквивалентны.

Рассмотрим соответствие σ, ставящее каждому аналитическому функционалу $T \in H'(C^n)$ его индикатрису Фантаппье — голоморфную в окрестности нуля функцию φ_T — по правилу $\varphi_T(a) = T\left(\frac{1}{1 + \langle a, z\rangle}\right)$. Это соответствие устанавливает изоморфизм $H'(C^n)$ и $H(\{0\})$ (см. [8], [9], а также [10]). Так же определенное соответствие устанавливает изоморфизм $H'(U)$ и $H(\widetilde{U})$, где U — круговой цилиндр в C^n, $U = \{z : |\langle b, z\rangle + b_0| < r\}$, а $\widetilde{U}$ — соответствующий диск в CP^n, содержащий 0 (см. [8], [10]). При этом $a \in U$ в том и только том случае, когда гиперплоскость $\{z : \langle a, z\rangle = 1\}$ не пересекает $\widetilde{U}$. Отсюда следует $H6 \Leftrightarrow H8$ и $H5 \Leftrightarrow H7$. Таким образом, все сформулированные выше гипотезы эквивалентны.

Следствие. При $n = 1$ все сформулированные гипотезы справедливы.

§ 3. Более сильная гипотеза и ее справедливость в частном случае

H9. Пусть множество $\varnothing \neq M \subset \boldsymbol{C}^n$ таково, что в $\boldsymbol{C}^n \setminus M$ голоморфна функция, не продолжающаяся до целой, а сечение любой прямой вида

$$l_c = \{z \in \boldsymbol{C}^n : z_1 = c_1, \ldots, z_{n-1} = c_{n-1}\}, \quad c \in \boldsymbol{C}^{n-1}, \tag{1}$$

ограничено и выпукло. Тогда M содержит график некоторой целой функции $g \in H(\boldsymbol{C}^{n-1})$:

$$\Gamma_g = \{z : z_n = g(z_1, \ldots, z_{n-1})\} \subset M.$$

Теорема 2. *Гипотеза* H9 *влечет все сформулированные выше гипотезы.*

Доказательство. Пусть гипотеза H9 справедлива и q — функция из гипотезы H5. Выберем координаты в $\boldsymbol{CP}^n$ так, чтобы $0 = (1, 0, \ldots, 0, 0)_0$ была общей точкой всех дисков семейства. Обозначим через D объединение всех дисков, содержащих 0, в окрестность которых q голоморфно продолжается. Тогда в дополнении к множеству $M = \{z \in \boldsymbol{C}^n : (z_n, z_1, \ldots, z_{n-1}, 1)_0 \notin D\}$ голоморфна непостоянная функция $q((z_n, z_1, \ldots, z_{n-1}, 1)_0) = q_1(z)$. Эта функция непродолжима до целой функции: иначе q была бы голоморфна всюду вне гиперплоскости $\{(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0, z_n)_0 : z \in \boldsymbol{C}^n\}$ и в точке 0, лежащей на этой гиперплоскости и, следовательно, по теореме Лиувилля была бы константой.

Сечения множества M плоскостями вида (1) являются пересечениями кругов и, следовательно, выпуклы. В силу гипотезы H9 существует целая функция $g \in H(\boldsymbol{C}^{n-1})$, график которой лежит в M. Поскольку q голоморфна в окрестности 0, то D содержит шар малого радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в этой точке:

$$\{(z_0, z_1, \ldots, z_n)_0 : |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 < \varepsilon^2 |z_0|^2\} \subset D.$$

Поэтому $M \subset \{z : 1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_{n-1}|^2 > \varepsilon^2 |z_0|^2\}$ и отсюда

$$|g(z_1, \ldots, z_{n-1})| < \varepsilon^{-1} \sqrt{1 + |z_1|^2 + \ldots + |z_{n-1}|^2} \leqslant \varepsilon^{-1}(1 + |z_1| + \ldots + |z_{n-1}|).$$

Из этой оценки и неравенства Коши для коэффициентов вытекает линейность функции g. Но тогда множество $\{(z_1, \ldots, z_{n-1}, 1, z_n)_0 : z_n = g(z_1, \ldots, z_{n-1})\}$ — искомая гиперплоскость, лежащая вне дисков.

Теорема 3. *Пусть функция* φ *голоморфна в окрестности замкнутого множества* M, *а множество всех ее нулей непусто и лежит в* M. *Если все сечения множества* M *прямыми вида* (1) *компактны и выпуклы, то* M *содержит график некоторой целой функции* $g \in H(\boldsymbol{C}^{n-1})$.

Доказательство. Для любого $c \in \boldsymbol{C}^{n-1}$ определен интеграл

$$m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_c'(\tau)}{\varphi_c(\tau)} d\tau,$$

не зависящий от выпуклого контура, разделяющего нули и особенности функции φ_c, проходимого против часовой стрелки. Как известно, этот интеграл принимает целое значение, равное числу нулей функции φ_c и в силу непрерывности не зависит от c. Из условия ясно, что $m \neq 0$. Определим функцию $g \in H(\boldsymbol{C}^{n-1})$ формулой

$$g(c) = \frac{1}{2\pi i m} \oint \frac{\tau \varphi_c'(\tau)}{\varphi_c(\tau)} d\tau,$$

где контур выбирается, как и выше. Поскольку при любом c точка $g(c)$ есть среднее арифметическое нулей функции φ_c, то Γ_g лежит в M.

Следствие. Если функция q в гипотезе H5 алгебраическая или M содержит нули целой функции, то гипотеза H5 справедлива.

Это следствие служит косвенным аргументом за справедливость сформулированных выше гипотез.

§ 4. К задаче о полноте системы экспонент

Для каждого аналитического функционала $Q \in H'(\boldsymbol{C}^n)$ обозначим через N_Q дивизор нулей целой функции экспоненциального типа $\mathcal{L}(Q)$.

Пусть N — дивизор нулей целой функции экпоненциального типа в $\boldsymbol{C}^n$. Рассмотрим систему E_N экспоненциальных полиномов $f(z) = p(z)\, e^{\langle a, z \rangle}$, удовлетворяющих условию $Q(f) = 0$, как только $N_Q = N$. В случае простых нулей E_N образовано линейными комбинациями от $e^{\langle a, z \rangle}$, $a \in N$. Нас будет интересовать условие полноты E_N в пространстве $H(D)$ функций, голоморфных в выпуклой области $D \subset \boldsymbol{C}^n$. Будем предполагать, что $\mathcal{L}(Q)$ имеет вполне регулярный рост. Это обеспечивает, что для любого $T \in H'(\boldsymbol{C}^n)$ выпуклый носитель свертки $T * Q$ совпадает с суммой выпуклых носителей функционалов T и Q.

Теорема 4. *Пусть $D \subset \boldsymbol{C}^n$ — выпуклая область и одна из сформулированных выше гипотез справедлива. Тогда для полноты E_N в $H(D)$ необходимо и достаточно, чтобы D не содержала ни одного носителя функционала Q с данным дивизором N.*

Отбросить предположение о справедливости указанных гипотез автору не удалось.

Доказательство. Заметим сначала, что если носитель функционала Q лежит в D и $N = N_Q$, то E_N не плотно в $H(D)$, поскольку оно лежит в ядре ненулевого функционала Q.

Пусть теперь E_N не плотно в $H(D)$. Тогда существует ненулевой аналитический функционал $S \in H'(D) \subset H'(\boldsymbol{C}^n)$, равный нулю на E_N. По теореме о делении отношение $\mathcal{L}(S)$ к $\mathcal{L}(Q)$ есть целая функция экспоненциального типа и, следовательно, является преобразованием Лапласа некоторого функционала T, причем $T * Q = S$. Пусть a — общая точка всех выпуклых носителей функционала T. Тогда $L_r^*(z, \mathcal{L}(T)) \geqslant L_r^*(z, \mathcal{L}(\delta_a))$, где δ_a — функционал Дирака $\delta_a(f) = f(a)$. Поскольку $\mathcal{L}(Q)$ имеет вполне регулярный рост, то $L_r^*(z, \mathcal{L}(T)) + L_r^*(z, \mathcal{L}(Q)) = L_r^*(z, \mathcal{L}(S))$. Поэтому

$$L_r^*(z, \mathcal{L}(Q * \delta_a)) \leqslant L_r^*(z, \mathcal{L}(S)). \tag{2}$$

Так как $S \in H'(D)$, то он имеет выпуклый носитель $K \subset D$. По теореме Пойа из (2) вытекает, что функционал $Q * \delta_a$ имеет носитель, лежащий в K.

Аналогично теореме 4 утверждение можно доказать для пространства аналитических в выпуклой области $V \subset \boldsymbol{R}^n$ функций с топологией проективного предела пространств $H(K)$ по возрастающей последовательности компактов $K \subset \boldsymbol{R}^n \subset \boldsymbol{C}^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах.— М.: Наука, 1982.—240 с.

2. Знаменский С. В. Спектральный синтез на выпуклых множествах // Комплексн. методы в матем. физике.— Донецк, 1984.—145 с.

3. Некоторые нерешенные задачи многомерного комплексного анализа // Препринт № М41.— Красноярск, 1987.— 38 с.

4. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 2.— 3-е изд.— М.: Наука, 1987.— 464 с.

5. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.— М.: Мир, 1968.—279 с.

6. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных.— М.: Наука, 1971.— 430 с.

7. Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли и ее применения.— М.: Мир, 1968.— 160 с.

8. Martineau A. Équations différentielles d'ordre infini // Bull. Soc. math. France.— 1967.— V. 95.— № 2.— P. 109—154.
9. Айзенберг Л. А. Общий вид линейного непрерывного функционала в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях C^n // ДАН СССР.— 1966.— Т. 166.— № 5.— С. 1015—1018.
10. Знаменский С. В. Сильная линейная выпуклость. I. Двойственность пространств голоморфных функций // Сиб. матем. журн.— 1985.— Т. XXVI.— № 3.— С. 31—43.

г. Красноярск

Поступила
14.11.1988

В. А. Золотаревский

УДК 517.968

СХОДИМОСТЬ МЕТОДОВ КОЛЛОКАЦИЙ И МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЗАМКНУТЫХ ГЛАДКИХ КОНТУРАХ

Исследование прямых [1] (с. 11) методов решения сингулярных интегральных уравнений (СИУ) и их систем в основном проводилось в случае, когда эти уравнения заданы на единичной окружности, либо на всей вещественной оси (как с периодическими, так и с непериодическими коэффициентами), либо на вещественном отрезке. Ограничимся ссылкой на работы [2]—[7], в которых приводится и подробная библиография.

В данной статье дано теоретическое обоснование методов коллокаций и механических квадратур для систем СИУ в мало изученном случае, когда уравнения заданы на произвольном замкнутом гладком контуре. Необходимость решения СИУ как в приложениях [8]—[10], так и в теории [11]—[13], чаще всего возникает именно в том случае, когда контуром интегрирования служит произвольная замкнутая гладкая кривая.

Как указано в монографиях [11]—[13], точное решение СИУ, а тем более систем СИУ, удается находить лишь в редких частных случаях, причем даже в этих случаях его нахождение требует неоднократного вычисления сингулярных интегралов, что сопряжено с большими теоретическими и вычислительными трудностями [3]—[6], [11]—[14]. Это показывает актуальность разработки и теоретического обоснования прямых методов решения СИУ и систем СИУ, заданных на произвольном замкнутом гладком контуре, отличном от единичной окружности.

В § 1 работы приводятся вычислительные схемы методов коллокаций и механических квадратур и сформулированы теоремы, дающие их теоретическое обоснование. Следующий параграф (§ 2) вспомогательный; в п. 1 приводятся теоремы из общей теории приближенных методов, устанавливающие условия принадлежности элементов линеалу сходимости оператора, а в п. 2 установлены оценки отклонения (в шкале гёльдеровых пространств) различных агрегатов приближения функций, заданных на произвольном замкнутом гладком контуре. На основе этих результатов в § 3 доказываются теоремы, сформулированные в § 1.

§ 1. Вычислительные схемы методов и формулировка теорем о сходимости

1. Пусть Γ — замкнутый гладкий контур ([11], с. 14), ограничивающий односвязную область F^+, содержащую точку $z=0$, $F^- = C \setminus \{F^+ \cup \Gamma\}$, C — полная комплексная плоскость. Через $H_\beta(\Gamma)$, $0<\beta\leqslant 1$, будем обозначать пространство функций, определенных на Γ и удовлетворяющих на этом контуре условию Гёльдера с показателем β:

$$H_\beta(\Gamma) = \{g(t) : |g(t') - g(t'')| \leqslant c_1 |t' - t''|^\beta;\ t',\ t'' \in \Gamma\}.$$