



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Комарчев, О 2-абсолютно суммирующих операторах в некоторых банаховых пространствах,
Матем. заметки, 1979, том 25, выпуск 4, 591–602

<https://www.mathnet.ru/mzm10035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.170

22 мая 2025 г., 16:17:18



О 2-АБСОЛЮТНО СУММИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРАХ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И. А. Комарчев

В данной работе мы дадим необходимые и достаточные условия, чтобы для пространства (последовательностей) Орлича X выполнялось равенство: $\Pi_2(c_0, X) = L(c_0, X)$.

Вначале введем некоторые определения и факты, необходимые для доказательства основного результата.

Пусть X, Y — банаховы пространства. Через $L(X, Y)$ будем обозначать пространство линейных непрерывных операторов из X в Y , через X^*, Y^* — сопряженные пространства соответственно к X и Y .

Пространство всех сходящихся к нулю последовательностей будем обозначать через c_0 . Пусть X — банахово пространство с базисом $(e_i)_{i < +\infty}$. Тогда через X^n будем обозначать линейную оболочку первых n элементов базиса.

Оператор $T \in L(X, Y)$ называется p -абсолютно суммирующим ($1 \leq p < +\infty$), если существует такое число $C > 0$, что для любого натурального числа n и для любых $x_1, \dots, x_n \in X$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n \|Tx_i\|^p \right)^{1/p} \leq C \sup_{x^* \in X^*, \|x^*\|=1} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{1/p}. \quad (*)$$

Линейное пространство всех p -абсолютно суммирующих операторов из X в Y образует банахово пространство, если в нем ввести норму $\pi_p(T) = \inf C$, где \inf берется по всем C , для которых справедливо (*). Пространство всех p -абсолютно суммирующих операторов из X в Y с нормой

Π_p обозначается через $\Pi_p(X, Y)$. Понятие p -абсолютно суммирующего оператора впервые появилось в [1]. Если каждый $T \in L(X, Y)$ является p -абсолютно суммирующим оператором, то будем писать $\Pi_p(X, Y) = L(X, Y)$.

Доказательство следующего предложения, на которое мы будем существенно опираться, можно найти в [2].

Предложение 1. Пусть X — банахово пространство с нормированным безусловным базисом $(e_i)_{i < +\infty}$ и $(e_i^*)_{i < +\infty}$ — биортогональная к $(e_i)_{i < +\infty}$ система в X^* . Тогда эквивалентны следующие утверждения:

$$1) \Pi_2(c_0, X) = L(c_0, X),$$

2) существует такое число $K > 0$, что для любых натуральных чисел m, n и для любого набора векторов $(x_i)_{i \leq m}$, $x_i \in X^n$ справедливо неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \leq K \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |e_j^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} e_j \right\|.$$

Дадим определение пространств последовательностей Орлича. Мы всюду будем рассматривать вещественные пространства. Пусть M — выпуклая, возрастающая функция на $[0, +\infty)$ такая, что $M(0) = 0$, $M(t) > 0$, при $t > 0$. Тогда M называется функцией Орлича. Если M удовлетворяет условию $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} M(2x)/M(x) < +\infty$, то говорят, что функция M удовлетворяет Δ_2 -условию в 0. Легко заметить, что если функция Орлича M удовлетворяет Δ_2 -условию в нуле, то $\sup_{0 < x \leq K} M(2x)/M(x) < +\infty$ для любого числа $K < +\infty$.

Определение. Пусть M — функция Орлича. Рассмотрим l_M — пространство всех числовых вещественных последовательностей $x = (x_i)_{i < +\infty}$, для которых конечная следующая норма:

$$\|x\| = \inf \{t > 0: \sum_{i=1}^{\infty} M(|x_i|/t) \leq 1\}.$$

Тогда l_M с этой нормой называется пространством последовательностей Орлича (в дальнейшем будем его называть просто пространством Орлича).

Пространства Орлича являются банаховыми пространствами. Кроме того, если функция Орлича M удовлетворяет Δ_2 -условию, то последовательность векторов $(e_i)_{i < +\infty}$, где $e_i = (\delta_{ij})_{j < +\infty}$, а δ_{ij} — символ Кронкера, образует в l_M

безусловный базис. Этот базис обычно называют стандартным. Далее мы будем считать, что все рассматриваемые нами функции Орлича удовлетворяют Δ_2 -условию.

Теперь приступим к изложению основного результата данной работы. Вначале введем определение.

О п р е д е л е н и е. Пусть T — вещественная функция, заданная на отрезке $[b, a]$. Будем говорить, что T квазивогнута, если существует число $C > 0$ такое, что для любого натурального числа n и для любых $x_1, \dots, x_n \in [b, a]$ справедливо неравенство

$$T\left(\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)/n\right) \geq C \left(\sum_{i=1}^n T(x_i)\right)/n.$$

В определении квазивогнутости мы можем вместо замкнутого интервала рассматривать открытый или полуоткрытый интервал.

ТЕОРЕМА. Пусть M — функция Орлича ¹⁾. Рассмотрим функцию M_1 , определенную на $[0, 1]$ и задаваемую равенством $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ ($x \in [0, 1]$). Эквивалентны следующие утверждения:

1) $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$,

2) M_1 квазивогнута.

Сначала сделаем одно замечание. Нам достаточно доказать теорему только для случая $\sup_{0 \leq x \leq 1} M(x) = 1$. Действительно, если $\sup_{0 \leq x \leq 1} M(x) = r$, то рассмотрим $N(x) = M(x)/r$ (функция N определена корректно, так как $r > 0$).

Легко видеть, что отображение $T: l_N \rightarrow l_M$, задаваемое равенствами $Tf_i = e_i$ (здесь $(f_i)_{i < +\infty}$, $(e_i)_{i < +\infty}$ — стандартные базисы в l_N и l_M соответственно), является изоморфизмом пространства l_N на l_M .

Но если банаховы пространства X и Y изоморфны, то, как легко видеть из определения p -абсолютно суммирующего оператора, равенство $\Pi_p(Z, X) = L(Z, X)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\Pi_p(Z, Y) = L(Z, Y)$ (здесь Z — произвольное банахово пространство, p — произвольное вещественное число из $[1, +\infty)$). Поэтому при доказательстве мы будем считать, что $\sup_{0 \leq x \leq 1} M(x) = 1$.

¹⁾ Напомним, что мы рассматриваем только функции Орлича, удовлетворяющие Δ_2 -условию в нуле. (Для краткости мы иногда будем писать просто Δ_2 -условие вместо Δ_2 -условия в нуле.)

ЛЕММА 1. Пусть M — функция Орлица, удовлетворяющая Δ_2 -условию, $\sup_{0 \leq x \leq 1} M(x) = 1$. Если существует такое $L > 0$, что для любого натурального числа n и для любых чисел $0 \leq x_i \leq 1$ таких, что $1 \leq \sum_{j=1}^n M(x_j) \leq 2$, справедливо неравенство $M\left(\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)/n}\right) \geq L/n$, то функция M_1 квазивогнута.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число m и такие вещественные числа x_1, \dots, x_m из $[0, 1]$ (не все нулевые), что

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)/m}\right) \leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m M(x_i)\right) / m. \quad (1)$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть

$$\sum_{i=1}^m M(x_i) \geq 1. \quad (2)$$

Мы можем считать $X = (x_i)_{i \leq m}$ невозрастающей последовательностью.

Рассмотрим натуральное число n и конечную последовательность натуральных чисел $(k_i)_{i \leq n}$, удовлетворяющих условиям

$$k_0 = 0, \quad k_n = m, \quad k_i < k_{i+1},$$

$$1 \leq \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} M(x_j) \leq 2 \quad \text{для } i < n$$

$$\text{и } \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} M(x_j) \leq 2. \quad (3)$$

Существование таких n и $(k_i)_{i \leq n}$ следует из (2) и из того, что $r = \sup_{0 \leq x \leq 1} M(x) = 1$. Мы можем считать n достаточно

большим, что следует из того, что функция M удовлетворяет Δ_2 -условию в 0. Мы будем считать $n \geq 8$. Мы также можем считать, что $l = m/n$ — целое число. Действительно, если это не так, то мы вместо последовательности $(x_i)_{i \leq m}$ рассмотрим последовательность $(y_i)_{i \leq ([l+1]n)}$ (здесь $[l]$ обозначает целую часть числа l), где $y_i = x_i$ при $i \leq m$ и $y_i = 0$ при $i > m$. Тогда неравенство (1) заме-

нится на неравенство

$$\begin{aligned}
 M \left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{([l]+1)^n} y_i^2 \right) / \left(([l]+1)n \right)} \right) &\leq \\
 &\leq M \left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{([l]+1)^n} y_i^2 \right) / m} \right) \leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^{([l]+1)^n} M(y_i) \right) / m \leq \\
 &\leq 2\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{([l]+1)^n} M(y_i) \right) / \left(([l]+1)n \right).
 \end{aligned}$$

Итак, не умаляя общности, мы будем считать, что l — целое число. Для удобства переобозначим элементы последовательности $(x_i)_{i \leq m}$, а именно, рассмотрим $p_i = k_{i+1} - k_i$ ($i = 0, \dots, n-1$) и положим $x_{ij} = x_r$, если $r = k_i + j$ ($1 \leq j \leq k_{i+1} - k_i$). Рассмотрим q_i ($i = 0, \dots, n-1$), определяемые равенствами $q_i = \min(l, p_i)$, и рассмотрим множества $Y_i = \{x_{ij} : j \leq q_i\}$, $Z_i = \{x_{ij} : j > l\}$. Положим $Y = \bigcup_{i=0}^{n-1} Y_i$, $Z = \bigcup_{i=0}^{n-1} Z_i$; тогда $Z \cap Y = \emptyset$ и $Z \cup Y = X$. Докажем, что для любого $y \in Z$ справедливо неравенство $M(y) \leq 2/l$. Действительно, пусть $M(y) > 2/l$. По определению Z существуют j, i такие, что $y = x_{ij}$ и $j > l$. Так как $x_{ik} \geq x_{ij}$ для $1 \leq k \leq j$ ($(x_j)_{j < m}$ — не возрастающая последовательность), то

$$\sum_{r=1}^{p_i} M(x_{ir}) \geq \sum_{r=1}^j M(x_{ir}) \geq \sum_{r=1}^j M(x_{ij}) > l^2/l = 2.$$

Мы получаем противоречие с неравенством (3). Сейчас мы произведем некоторую перестройку множеств Y_0, \dots, Y_{n-1} . Возьмем Y_0 . Если $q_0 < l$, то выберем $(l - q_0)$ произвольных элементов из Z . Обозначим их y_1, \dots, y_{l-q_0} . Полагаем $Y'_0 = Y_0 \cup \{y_1, \dots, y_{l-q_0}\}$. Заметим, что такие всегда найдутся, так как в Z содержится $\sum_{i=0}^{n-1} (l - q_i)$ элементов, а $q_i \leq l$ для любого $i \leq n-1$. Если $q_0 = l$, то множество Y_0 не изменяем, принимаем $Y'_0 = Y_0$ и сразу переходим к Y_1 . Рассматриваем множество $Z_0 = Z \setminus \{y_1, \dots, y_{l-q_0}\}$, если $q_0 < l$, и $Z_0 = Z$, если $q_0 = l$. Точно таким же способом, как и Y'_0 , строим Y'_1 , только роль Z будет играть множество Z_0 и т. д. В результате у нас получаются множества Y'_0, \dots, Y'_{n-1} такие, что

$$Y'_i \cap Y'_j = \emptyset \quad (i \neq j); \quad \bigcup_{i=0}^{n-1} Y'_i = X,$$

и в каждом Y'_i содержится ровно l элементов. Переобозначим элементы Y'_i , а именно, элементы Y'_i будем обозначать

u_{ij} ($j \leq l$). Нетрудно заметить, что для любого $i \leq n - 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^l M(u_{ij}) \leq 4. \quad (4)$$

Действительно, пусть $Y_i' = \{x_{i1}, \dots, x_{iq_i}, z_1, \dots, z_{(l-q_i)}\}$, где $z_j \in Z$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{q_i} M(x_{ij}) + \sum_{k=1}^{l-q_i} M(z_k) \leq 2 + (l - q_i) 2/l \leq 4$$

(здесь использовано неравенство $M(z) \leq 2/l$ для $z \in Z$). Неравенство (4) в новых обозначениях будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} M\left(\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l u_{ij}^2 / (nl)}\right) &\leq \\ &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}) / (nl). \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) и (5) сразу вытекает

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l u_{ij}^2\right) / (nl)}\right) \leq \varepsilon 4/l. \quad (6)$$

Теперь нашей задачей будет оценить величину

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l u_{ij}^2\right) / (nl)}\right)$$

снизу и, используя произвольность $\varepsilon > 0$, получить противоречие. Обозначим через A множество тех $i \leq n - 1$, для которых

$$\sum_{j=1}^l M(u_{ij}) \geq 1/10. \quad (7)$$

Тогда $|A| \geq n/8$ (здесь через $|A|$ обозначается мощность множества A). Предположим противное: $|A| < n/8$. Оценим сверху следующие суммы:

$$\sum_{i \in A} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}), \quad \sum_{i \notin A} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}).$$

Используя неравенство (4), получаем

$$\sum_{i \in A} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}) \leq \sum_{i \in A} 4 < 4n/8 = n/2. \quad (8)$$

Для второй суммы из определения множества A вытекает оценка

$$\sum_{i \notin A} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}) < \sum_{i \notin A} 1/10 \leq n/10. \quad (9)$$

Складывая неравенства (8) и (9) и учитывая, то, что $n \geq 8$, получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}) = \sum_{i \in A} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}) + \sum_{i \notin A} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}) < n - 1. \quad (10)$$

Но в то же время, вспоминая, что последовательность $(u_{ij})_{i \leq n-1, j \leq l}$ есть в точности последовательность $(x_i)_{i \leq m}$, и используя (3), приходим к неравенству $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l M(u_{ij}) \geq n - 1$, которое противоречит (10). Не умаляя общности, мы можем считать, что (7) выполнено для $i \leq [n/8] - 1$. Так как M удовлетворяет Δ_2 -условию, то из неравенства 15 $[n/8] \geq n$ следует, что существует число $P > 0$, такое, что

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{[n/8]-1} \sum_{j=1}^l u_{ij}^2\right) / ([n/8] l)}\right) \leq PM\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l u_{ij}^2\right) / (nl)}\right). \quad (11)$$

Здесь P зависит только от функции M . Возьмем теперь $i_0 \leq [n/8] - 1$ такое, что

$$\sum_{j=1}^l u_{i_0 j}^2 = \min \left\{ \sum_{j=1}^l u_{ij}^2 : i \leq [n/8] - 1 \right\}.$$

Тогда из монотонности M вытекает, что

$$M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{[n/8]-1} \sum_{j=1}^l u_{ij}^2\right) / ([n/8] l)}\right) \geq M\left(\sqrt{\left(\sum_{j=1}^l u_{i_0 j}^2\right) / l}\right). \quad (12)$$

Так как $1/10 \leq \sum_{j=1}^l M(u_{i_0 j}) \leq 4$ (это следует из (4) и (7)), то из того, что функция M — выпуклая, строго возрастающая и удовлетворяет Δ_2 -условию, следует, что существуют числа $0 < t_1 < t_2$ (зависящие только от M) и число c , $t_1 \leq c \leq t_2$, которое, вообще говоря, зависит от $(u_{i_0 j})_{j \leq l}$, такие, что $\sum_{j=1}^l M(cu_{i_0 j}) = 1$. Из этого равенства и из предположения леммы следует неравенство $M\left(c \sqrt{\left(\sum_{j=1}^l u_{i_0 j}^2\right) / l}\right) \geq L/l$. Используя опять то, что M удовлетворяет Δ_2 -условию и что $c \leq t_2$, мы получаем, что существует такая константа $P_1 > 0$ (зависящая только

от M), что

$$M \left(\sqrt[l]{\sum_{j=1}^l u_{i,j}^2} \right) \geq P_1/l. \quad (13)$$

Сравнивая (11), (12), (13), получаем

$$M \left(\sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^l u_{i,j}^2 \right) / (nl)} \right) \geq P_1/Pl$$

и, учитывая (6), можем написать $P_1/P \leq 4\varepsilon$. Отсюда следует, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то случай I) не имеет места.

II) Пусть теперь $\sum_{i=1}^m M(x_i) < 1$. Положим $\sum_{i=1}^m M(x_i) = t$. Так как $t > 0$, то можно подобрать такое натуральное число N , что $Nt < 1$, $(N+1)t \geq 1$. Следовательно, $1 \leq (N+1)t \leq 2$. Возьмем теперь семейство $(u_{ij})_{i \leq m, j \leq N+1}$, где $u_{ij} = x_i$ для любого $j \leq N+1$. Тогда

$$\begin{aligned} M \left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N+1} u_{ij}^2 \right) / (m(N+1))} \right) = \\ = M \left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right) / m} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

и

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N+1} M(u_{ij}) / (m(N+1)) = \left(\sum_{i=1}^m M(x_i) \right) / m. \quad (15)$$

Из (1) и равенств (14), (15) получаем

$$\begin{aligned} M \left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N+1} u_{ij}^2 \right) / (m(N+1))} \right) \leq \\ \leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N+1} M(u_{ij}) \right) / (m(N+1)) \leq 2\varepsilon / (m(N+1)), \end{aligned}$$

что противоречит, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, предположение леммы и неравенствам

$$1 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{N+1} M(u_{ij}) \leq 2.$$

Итак, лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть M — функция Орлича. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1) $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$,

2) существует вещественное число $C > 0$ такое, что для любых натуральных чисел m, n и вещественных чисел λ_{ij} ($i \leq m, j \leq n$), удовлетворяющих соотношениям

$$0 \leq \lambda_{ij} \leq 1 \quad (i \leq m, j \leq n), \quad (16)$$

$$1 \leq \sum_{j=1}^n M(\lambda_{ij}) \leq 2, \quad (17)$$

справедливо неравенство

$$\sum_{j=1}^n M\left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_{ij}^2}/m\right) \geq C. \quad (18)$$

Доказательство. Докажем сначала, что условие 2) из предложения 1 эквивалентно следующему условию 2'):

2') Существует такое число $K > 0$, что для любых натуральных чисел m и n и для любых нормированных векторов $x_i \in X^n$ ($i = 1, \dots, m$) выполняется неравенство

$$\sqrt{m} \leq K \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |e_j^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} e_j \right\|. \quad (19)$$

Очевидно, что в доказательстве нуждается лишь импликация 2') \Rightarrow 2). Пусть справедливо 2'). Рассмотрим произвольные векторы

$$x_1, \dots, x_m \in X^n, x_i \neq 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Найдем натуральное число $i_0 \leq m$, для которого $a = \min \|x_i\| = \|x_{i_0}\|$, возьмем натуральные числа k_i ($i = 1, \dots, m$) такие, что

$$k_i a^2 \leq \|x_i\|^2 \leq 2k_i a^2 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

и положим $k_0 = 0$. Рассмотрим последовательность $y_j \in X^n$ ($j = 1, \dots, J$), $J = \sum_{i=0}^m k_i$, определяемую следующим образом:

$$y_j = x_i / (\sqrt{k_i} a), \text{ если } 1 + \sum_{l=0}^{i-1} k_l \leq j \leq \sum_{l=0}^i k_l.$$

Тогда $1 \leq \|y_j\| \leq \sqrt{2}$ ($j = 1, \dots, J$). Для векторов $y_j / \|y_j\|$ ($j = 1, \dots, J$) справедливо неравенство (19). Отсюда очевидным образом вытекает, что

$$\left(\sum_{j=1}^J \|y_j\|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} K \left\| \sum_{j=1}^J \left(\sum_{i=1}^m |e_j^*(y_i)|^2 \right)^{1/2} e_j \right\|.$$

Последнее неравенство, как легко заметить, переписывается таким образом:

$$\left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} K \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |e_j^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} e_j \right\|,$$

что и завершает доказательство импликации 2') \Rightarrow 2).

Перейдем теперь собственно к доказательству леммы 2. Убедимся, что $2) \Rightarrow 1)$. Докажем, что справедливо $2')$, а тогда из предложения 1 и эквивалентности $2')$ второму пункту предложения 1 будет сразу вытекать равенство $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$.

Рассмотрим произвольные натуральные m, n и нормированные векторы $x_i \in X^n$ ($i = 1, \dots, m$). Докажем, что

$$\sqrt{m} \leq C_1 \left\| \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |e_j^*(x_i)|^2 \right)^{1/2} e_j \right\|,$$

где $C = 1/C_1$ — число, фигурирующее в лемме 2. Это эквивалентно неравенству

$$\sum_{j=1}^n M \left(C_1 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^m |e_j^*(x_i)|^2 \right) / m} \right) \geq 1. \quad (20)$$

Если мы докажем, что

$$\sum_{j=1}^n M \left(\sqrt{\sum_{i=1}^m |e_j^*(x_i)| / m} \right) \geq C, \quad (21)$$

то, воспользовавшись выпуклостью M , сразу получим (20). Так как $\|x_i\| = 1$ ($i = 1, \dots, m$), то для любого $i \leq m$

$$\sum_{j=1}^n M(|e_j^*(x_i)|) = 1.$$

Теперь для доказательства (21) достаточно воспользоваться утверждением 2) из леммы 2.

Обратно, пусть $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$. Тогда для доказательства п. 2) леммы 2 остается воспользоваться предложением 1, взяв $x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} e_j$ ($i = 1, \dots, m$). Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы. 1) Пусть $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$. Докажем, что тогда функция $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ квазивогнута. Пусть это не так. Тогда по лемме 1 для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое натуральное число m и $0 \leq x_i \leq 1$ ($i = 1, \dots, m$), удовлетворяющие неравенству $1 \leq \sum_{i=1}^m M(x_i) \leq 2$, для которых $M\left(\sqrt{\left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)/m}\right) \leq \varepsilon/m$. Рассмотрим теперь матрицу вещественных чисел $(\lambda_{ij})_{i \leq m, j \leq m}$, положив $\lambda_{i1} = x_i$, а остальные строки в которой образуются циклической перестановкой первой строки. Тогда

$$1 \leq \sum_{i=1}^m M(\lambda_{ij}) \leq 2 \quad (i = 1, \dots, m)$$

и

$$\sum_{i=1}^m M\left(\sqrt{\sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^2}/m\right) \leq (\varepsilon/m) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M(\lambda_{ij}) \leq 2\varepsilon,$$

что противоречит лемме 2, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

2) Пусть теперь $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ квазивогнута. Для доказательства равенства $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$ воспользуемся леммой 2.

Рассмотрим m, n и набор чисел $(\lambda_{ij})_{i \leq m, j \leq n}$, удовлетворяющий неравенствам (16) и (17). Докажем (18). Пусть $C > 0$ — константа из определения квазивогнутости функции M_1 . Тогда

$$\sum_{j=1}^n M\left(\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_{ij}^2}/m\right) \geq (C/m) \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M(\lambda_{ij}) \geq C,$$

что и завершает доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 1. Пусть M — дифференцируемая функция Орлича с Δ_2 -условием и $N(x) = M'(x)/x$ — убывающая функция на $(0, 1]$. Тогда $\Pi_2(c_0, l_M) = L(c_0, l_M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $M_1(x) = M(\sqrt{x})$ ($x \in (0, 1]$). Тогда функция $M'_1(x) = M'(\sqrt{x})/(2\sqrt{x})$ монотонно убывает. Отсюда следует, что функция M_1 вогнута на $(0, 1]$, а поэтому и квазивогнута на этом интервале, и нам остается только применить теорему. Для доказательства дальнейших следствий потребуются некоторые определения и результаты.

О п р е д е л е н и е. Пусть $p \geq 2$, X — банахово пространство. Говорят, что X удовлетворяет p -свойству Орлича, если для любого безусловно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ в X сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p$.

О п р е д е л е н и е. Пусть $p \geq 2$. Банахово пространство X называется пространством котипа p , если существует число $C > 0$ такое, что для любого натурального n и для любых $x_j \in X$ ($j = 1, \dots, n$) справедливо неравенство

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^n r_j(t) x_j \right\|^2 dt\right)^{1/2} \geq C \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p}. \quad (22)$$

Здесь $r_j(t) = \text{sign} \sin(2^{j-1} 2\pi t)$ — функция Радемахера. Иначе неравенство (22) можно переписать так:

$$\left((1/2^n) \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j \right\|^2\right)^{1/2} \geq C \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p}.$$

Хорошо известно (см., например, [2]), что если для банахова пространства X справедливо равенство $\Pi_2(c_2, X) = L(c_0, X)$, то X удовлетворяет 2-свойству Орлича. Справедливо также следующее утверждение (см. [3]).

Предложение. Пусть X — банахово пространство с безусловным базисом. Тогда равенство $\Pi_2(c_0, X) = L(c_0, X)$ справедливо тогда и только тогда, когда X — пространство типа 2.

С помощью этих фактов можно получить дальнейшие следствия теоремы.

Следствие 2. Пусть M — функция Орлича, удовлетворяющая Δ_2 -условию, $M_1(x) = M(\sqrt{x})$. Если M_1 квазивогнута, то пространство l_M удовлетворяет 2-свойству Орлича.

Следствие 3. Пусть M — функция Орлича с Δ_2 -условием. Тогда пространство l_M является пространством типа 2 тогда и только тогда, когда функция M_1 квазивогнута.

Автор благодарит Б. М. Макарова за помощь в работе.

Ленинградский государственный
университет

Поступило
24.1.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pietsch A., Absolute p -summierende Abbildungen in normierten Raumen, *Studia Math.*, 28 (1967), 333—353.
- [2] Dubinsky E., Pełczyński A., Rosenthal H. P., On Banach spaces X for which $\Pi_2(L_\infty, X) = B(L_\infty, X)$, *Studia Math.*; 44 (1972), 617—648.
- [3] Maurey B., Theorems de factorisation pour les operateurs lineaires à valeurs dans les espaces L_p , *Asterisque*, 11 (1974), 1—194.