В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак, В. В. Привалова, Модификация метода граничных элементов для моделирования трехмерных упругих задач,
Матем. моделирование и краев. задачи, 2006, часть 1, 231–234

6. *Рогозин В. Д.* Уравнение прессования порошков // Порошковая металлургия, 1981. — № 6. — С. 28–31.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

УДК 531/534

В. П. Федотов, Л. Ф. Спевак, В. В. Привалова

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЁХМЕРНЫХ УПРУГИХ ЗАДАЧ

В данной работе предложена модификация метода граничных элементов, в которой изначально, на уровне алгоритма, заложена технология распараллеливания.

Согласно методу граничных элементов [1], решение задачи теории упругости можно выразить через поверхностные перемещения $u_i(x)$ и поверхностные напряжения $f_i(x)$. Для вектора перемещений в любой внутренней точке можно записать

$$u_i(\xi) = \int_{S_f} \left[u^*_{ij}(\xi, x) f^*_j(x) - f^*_{ij}(\xi, x) u_j(x) \right] dS(x) + \\ + \int_{S_u} \left[u^*_{ij}(\xi, x) f_j(x) - f^*_{ij}(\xi, x) u^*_j(x) \right] dS(x). \quad (1)$$

Здесь $x \in S$ — граничная точка области; ξ — внутренняя точка области; $u^*_j(x)$ — известные из граничных условий перемещения для группы поверхностей S_u; $f^*_j(x)$ — известные из граничных условий поверхностные напряжения для группы поверхностей S_f. Функции влияния $u^*_{ij}(\xi, x)$ и $f^*_{ij}(\xi, x)$ для трёхмерной задачи имеют вид:

$$u^*_{ij}(\xi, x) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \Delta_i r \Delta_j r\right],$$

$$f^*_{ij}(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2}\left(\left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3\Delta_i r \Delta_j r\right]\frac{\partial r}{\partial n} - \\ - (1-2\nu)\left(\Delta_i r n_j - \Delta_j r n_i\right)\right),$$

где $r = r(x, \xi)$ — расстояние между точками x и ξ, $\Delta_i r = \partial r / \partial x_i$.

Основное отличие от классического метода заключается в следующем. В МГЭ фиксируется точка влияния, а затем численным интегрированием компонентов тензора Грина (или функций влияния) определяется влияние каждого элемента границы на изменение физических или механических характеристик в этой точке. В предлагаемом подходе фиксируется наиболее удобный базовый элемент, по которому один раз производится аналитическое интегрирование компонентов функций влияния, результатом которого являются функции от координат произвольной точки влияния.

В трёхмерном случае в качестве базового элемента берётся лежащий в координатной плоскости треугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, одна вершина которого находится в начале координат, а вторая лежит на одной из осей. Произвольно расположенный в пространстве треугольника ABC и базовый треугольник связаны между собой с помощью ортогонального преобразования, отображающего произвольную точку пространства $x\,(x_1, x_2, x_3)$ в точку $\overline{x}\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3\right)$:

$$x = T\overline{x} + S, \quad \overline{x} = T^{-1}\,(x - S)\,,$$

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где S — вектор параллельного переноса, T — матрица поворота; векторы трактуются как матрицы-столбцы.

Между интегралами по треугольнику ABC для произвольной точки влияния ξ и интегралами по треугольнику $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ для точки влияния $\overline{\xi} = T^{-1}\,(\xi - S)$ установлена следующая связь:

$$\begin{pmatrix} I\left(u^*_{11}\right) & I\left(u^*_{12}\right) & I\left(u^*_{13}\right) \\ I\left(u^*_{21}\right) & I\left(u^*_{22}\right) & I\left(u^*_{23}\right) \\ I\left(u^*_{31}\right) & I\left(u^*_{32}\right) & I\left(u^*_{33}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}\left(u^*_{11}\right) & \bar{I}\left(u^*_{12}\right) & \bar{I}\left(u^*_{13}\right) \\ \bar{I}\left(u^*_{21}\right) & \bar{I}\left(u^*_{22}\right) & \bar{I}\left(u^*_{23}\right) \\ \bar{I}\left(u^*_{31}\right) & \bar{I}\left(u^*_{32}\right) & \bar{I}\left(u^*_{33}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & n_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & n_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & n_3 \end{pmatrix},$$

где $I\left(u^*_{ij}\right) = \int_{ABC} u^*_{ij}\,(\xi, x)\; dS\,(x)$, $\overline{I}\left(u^*_{ij}\right) = \int_{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} u^*_{ij}\left(\overline{\xi}, x\right)\, dS\,(x)$.

Аналогичное соотношение получено для интегралов от функций f^*_{ij}.

Таким образом, мы получили, что для вычисления интегралов по произвольному треугольнику ABC для точки влияния ξ достаточно построить матрицу T, определить через соотношение (2) точку $\bar{\xi}$ и вычислить интегралы по треугольнику $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, что является более простой задачей. Для вычисления интегралов $\bar{I}\left(u_{ij}^*\right)$ и $\bar{I}\left(f_{ij}^*\right)$ по треугольнику $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ и произвольной точки влияния $\bar{\xi}$ получены простые аналитические формулы. Одна из них приведена ниже:

$$\bar{I}\left(u_{13}^*\right) = c_1\bar{\xi}_3\bar{C}_2\left(\frac{L_2}{\rho\left[\bar{C}\right]} - \frac{L_1}{\rho\left[\bar{B}\bar{C}\right]}\right).$$

Здесь

$$c_1 = \frac{1}{16\pi\mu\left(1-\nu\right)}, \quad \delta\left[\bar{B}\bar{C}\right]_1 = \bar{B}_1 - \bar{C}_1, \quad \delta\left[\bar{B}\bar{\xi}\right]_1 = \bar{B}_1 - \bar{\xi}_1,$$

$$L_1 = \ln\left(\frac{\bar{\xi}_2\bar{C}_2 + \delta\left[\bar{B}\bar{C}\right]_1\delta\left[\bar{B}\bar{\xi}\right]_1 - \rho\left[\bar{B}\bar{C}\right]\rho\left[\bar{B}\bar{\xi}\right]}{\bar{\xi}_2\bar{C}_2 + \delta\left[\bar{B}\bar{C}\right]_1\delta\left[\bar{B}\bar{\xi}\right]_1 - \rho\left[\bar{B}\bar{C}\right]\rho\left[\bar{C}\bar{\xi}\right] - \rho\left[\bar{B}\bar{C}\right]^2}\right),$$

$$L_2 = \ln\left(\frac{\bar{\xi}_2\bar{C}_2 + \bar{\xi}_1\bar{C}_1 - \rho\left[\bar{C}\right]\rho\left[\bar{\xi}\right]}{\bar{\xi}_2\bar{C}_2 + \bar{\xi}_1\bar{C}_1 - \rho\left[\bar{C}\right]\rho\left[\bar{C}\bar{\xi}\right] - \rho\left[\bar{C}\right]^2}\right);$$

$\rho\left[\bar{B}\bar{C}\right]$ — расстояние между точками $\bar{B}$ и $\bar{C}$; $\rho\left[\bar{B}\bar{\xi}\right]$ — расстояние между точками $\bar{B}$ и $\bar{\xi}$; $\rho\left[\bar{C}\bar{\xi}\right]$ — расстояние между точками $\bar{C}$ и $\bar{\xi}$; $\rho\left[\bar{C}\right]$ — радиус вектор точки $\bar{C}$, равный расстоянию между точками $\bar{A}$ и $\bar{C}$; $\rho\left[\bar{\xi}\right]$ — радиус вектор точки $\bar{\xi}$.

С помощью полученных формул составляется система уравнений, решение которой дает недостающие значения поверхностных перемещений и напряжений. Через известные граничные значения компоненты тензоров деформации и напряжений, а также перемещения в любой внутренней точке области вычисляется по формулам, соответствующим соотношениям (1) [2, 3].

1. *Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.* Boundary Element Techniques. — Berlin, Neidelberg, New-York, Tokyo: Springer-Verlag, 1984. — 524 p. (Имеется перевод: *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. — М.: Мир, 1987. — 524 с.)

2. *Думшева Е.С., Зенкова Е.С., Федотов В.П., Спевак Л.Ф., Привалова В.В.* Численно-аналитический алгоритм для решения задач упругости, теплопроводности, диффузии // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. — Екатеринбург: УрО РАН, 2003. — Вып. 7. — С. 70–86.
3. *Федотов В.П., Спевак Л.Ф., Привалова В.В., Трухин В.Б., Думшева Т.Д., Зенкова Е.М.* Исследование сходимости численно-аналитического метода решения задач упругости, теплопроводности и диффузии // Вестник СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки, 2004. — Вып. 30. — С. 24–32.

Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург
fedotov@imach.uran.ru; Valentina.privalova@usu.ru

УДК 622.28

Е.С. Фирсанов, П.В. Деев

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОЛЕЦ, ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ОТВЕРСТИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ В ВЕСОМОЙ ПЛОСКОСТИ

Получено новое аналитическое решение плоской задачи теории упругости о напряженном состоянии бесконечной линейно-деформируемой весомой среды S_0, с деформационными характеристиками E_0 и ν_0, ослабленной конечным числом N любым образом расположенных отверстий произвольной формы (с одной осью симметрии), подкрепленных упругими кольцами S_m $(m = 1, 2, ..., N)$, из материалов с деформационными характеристиками E_m, ν_m $(m = 1, 2, ..., N)$. Внутренние контуры колец свободны от действия внешних сил. На линиях контакта колец S_m $(m = 1, 2, ..., N)$ и среды S_0 выполняются условия непрерывности векторов напряжений и смещений. Расчётная схема приведена на рисунке.

Действие собственного веса среды моделируется наличием в S_0 начальных напряжений

$$\sigma_x^{(0)(0)} = -\gamma(H - x)\ ,\quad \sigma_y^{(0)(0)} = -\lambda\gamma(H - x)\ ,\quad \tau_{xy}^{(0)(0)} = 0. \qquad (1)$$

Граничные условия задачи имеют следующий вид:
– на контурах $L_{0,m}$, $(m = 1, 2, ..., N)$:

$$\begin{aligned} &\sigma_\rho^{(1,m)} = \sigma_\rho^{(0,m)} + \sigma_\rho^{(0,m)(0)}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(1,m)} = \tau_{\rho\theta}^{(0,m)} + \tau_{\rho\theta}^{(0,m)(0)}, \\ &u_x^{(0,m)} = u_x^{(1,m)}, \quad u_y^{(0,m)} = u_y^{(1,m)}; \end{aligned} \qquad (2)$$