И. Л. Гуревич, О капиллярных волнах большой амплитуды в канале с волнообразным дном,
Изв. вузов. Матем., 1986, номер 12, 13–19

И. Л. Гуревич УДК 517.958

О КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛНАХ БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ В КАНАЛЕ С ВОЛНООБРАЗНЫМ ДНОМ

Вопросам существования и построения решений в задачах о капиллярных и капиллярно-гравитационных волнах посвящено большое количество работ, напр., [1] — [4]. Среди них особое место занимает [1], где найдены точные решения задач о капиллярных волнах в жидкости бесконечной глубины и в канале с горизонтальным дном. Анализ этих решений показывает, что величина $\varkappa$ (отношение длины полупериода волновой линии к радиусу кривизны в вершине волны) может меняться в интервале $[0, \pi)$; при этом максимум угла θ между горизонталью и касательной к волновой линии находится в том же интервале. В то же время при исследованиях более общих задач (с учетом силы тяжести или криволинейности дна), проведенных различными методами в других работах, накладываются значительно более жесткие ограничения на $\varkappa$ и $\max|\theta|$.

В данной статье с использованием метода Лере — Шаудера доказывается существование капиллярных волн с заданным $\varkappa \in [0, \pi)$ (задача 1) и с заданным $\max|\theta| \in [0, \pi/2)$ (задача 2) в канале с криволинейным периодическим дном, симметричным относительно вертикали.

1. Постановка задачи 1, ее сведение к операторному уравнению

В плоскости $z = x + iy$ рассматривается течение идеальной жидкости над волнообразным дном с учетом поверхностного натяжения. Течение считается периодическим. Симметричная область D_z, занятая одним периодом течения, изображена на рисунке. Ее правая половина D_z^+ ограничена известной дугой $A'B'$, участком свободной границы AB и прямолинейными отрезками (эквипотенциалями) AA' и BB', параллельными оси y.

Введем следующие обозначения: v — скорость; $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал $(w(A') = 0, w(B) = \varphi_0 + i\psi_0)$; s, s' — дуговые абсциссы соответственно на AB и $A'B'$, отсчитываемые от A и A'; $L = s(B)$ — неизвестное число, $L' = s'(B')$; $\Phi(s')$ и $\theta(s)$ — углы между осью x и касательными к дугам $A'B'$ и AB; $L(d\theta/ds)_A = -\varkappa$ — безразмерная кривизна свободной границы в вершине волны A.

Задаются $\Phi(s')$, $\varkappa$, $K = \psi_0/\varphi_0$, причем $\Phi(s')$ — гёльдерова функция, и выполняются условия

$$\Phi(0) = \Phi(L') = 0, \; 0 \leqslant \Phi(s') < \pi/2, \; 0 \leqslant \varkappa < \pi. \tag{1.1}$$

Отобразим область D_z^+ и соответствующий ей прямоугольник $D_w^+ = \{w: 0 < \varphi < \varphi_0, \; 0 < \psi < \psi_0\}$ в плоскости w на полукольцо $D_\zeta^+ = \{\zeta = re^{i\sigma}: 1 < r < R, \; 0 < \sigma < \pi\}$, причем дуги $A'B'$ и AB перейдут соответственно в полуокружности $|\zeta| = 1$, $|\zeta| = R$. Тогда $R = e^{\pi K}$, $w = \varphi_0(i\pi^{-1}\ln\zeta + 1)$, $d\varphi/d\sigma = -\varphi_0/\pi$ на $A'B'$ и AB. Введем функцию

$$\omega(\zeta) = \ln\left(\frac{1}{v_0}\frac{dw}{dz}\right), \quad \omega(Re^{i\sigma}) = \tau(\sigma) - i\theta(\sigma), \quad \omega(e^{i\sigma}) = \lambda(\sigma) - i\mu(\sigma),$$

где $v_0 = \varphi_0/L'$ — средняя скорость на $A'B'$. В дальнейшем можно считать функции $z(\zeta)$, $w(\zeta)$, $\omega(\zeta)$ соответствующим образом продолженными по принципу симметрии в кольцо $1 < |\zeta| < R$.

Используя введенные обозначения, установим граничное соответствие между D_z^+ и D_ζ^+:

$$\frac{ds}{d\sigma} = -LI^{-1}e^{-\tau}, \; I = \pi\frac{L}{L'} = \int_0^\pi e^{-\tau}d\sigma, \; s(\pi) = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{ds'}{d\sigma} = -L'\pi^{-1}e^{-\lambda}, \; \int_0^\pi e^{-\lambda}d\sigma = \pi, \; s'(\pi) = 0. \tag{1.3}$$

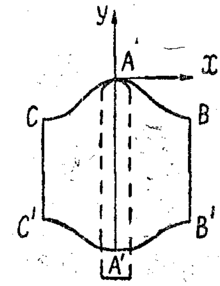

Рис.

Принимая во внимание уравнение Лапласа $Td\theta/ds = p_1 - p$ (T — сила поверхностного натяжения, p_1 и p — соответственно атмосферное давление и давление в жидкости), уравнение Бернулли и (1.2), будем иметь

$$L\frac{d\theta}{ds} = -\beta + \alpha e^{2\tau}, \qquad (1.4) \qquad\qquad \frac{d\theta}{d\sigma} = (\beta e^{-\tau} - \alpha e^{\tau})\, l^{-1}, \qquad (1.5)$$

где $\alpha = \rho v_0^2 L (2T)^{-1}$, $\beta = L(C\rho - p_1)T^{-1}$, ρ — плотность, C — константа Бернулли. Из условия $\theta(0) = \theta(\pi)$ и (1.5) вытекает

$$\beta = \alpha l^{-1} I_1, \quad I_1 = \int_0^{\pi} e^{\tau} d\sigma. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.4), (1.6) в условие $\varkappa = -L(d\theta/ds)_A$, получим

$$\varkappa = \alpha M, \quad M = I_1 l^{-1} - e^{2\tau(\pi)}. \tag{1.7}$$

Соотношения (1.3), (1.5) — (1.7), а также $\mu(\sigma) = \Phi[s'(\sigma)]$, $\operatorname{Im}\omega(\pm r) = 0$ $(1 < r < R)$ и второе из равенств (1.2) образуют систему граничных условий для функции $\omega(\zeta)$ в D_ζ^+.

По известным формулам

$$\tau = \Gamma + \tau_0, \quad \tau_0(\sigma) = \int_0^{\pi} H\mu(t)\,dt + \int_0^{\pi} S\theta(t)\,dt, \tag{1.8}$$

$$\lambda = \Gamma + \Lambda, \quad \Lambda(\sigma) = -\int_0^{\pi} S\mu(t)\,dt - \int_0^{\pi} H\theta(t)\,dt, \tag{1.9}$$

$$\Gamma = \text{const}, \quad H(t, \sigma) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cosech}(\pi n K)\cos n\sigma \sin nt,$$

$$S(t, \sigma) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cth}(\pi n K)\cos n\sigma \sin nt.$$

Из (1.8) имеем

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = -\int_0^{\pi} H_1\mu(t)\,dt - \int_0^{\pi} D_1 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\,dt,$$

$$D_1(t, \sigma) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\operatorname{cth}(\pi n K)\sin n\sigma \sin nt, \quad H_1(t, \sigma) = -\frac{\partial H}{\partial \sigma}. \tag{1.10}$$

Обозначая $-d\tau/d\sigma$ через u, дифференцируя (1.5) и используя (1.6), запишем (1.10) в виде

$$u(\sigma) = \int_0^{\pi} H_1\mu(t)\,dt + \alpha l^{-1}\int_0^{\pi} D_1\,(I_1 l^{-1} e^{-\tau(t)} + e^{\tau(t)})\,u(t)\,dt. \tag{1.11}$$

Заметим, что

$$\int_0^{\pi} \tau_0 d\sigma = 0, \quad \int_0^{\pi} \Lambda d\sigma = 0. \tag{1.12}$$

Выражая τ_0 через u, используя второе равенство в (1.3) и первое в (1.12), будем иметь

$$\tau_0(\sigma) = \int_0^{\sigma} u(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\sigma \int_0^{\sigma} u(t)\,dt, \qquad (1.13) \qquad\qquad \Gamma = \ln\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\Lambda} d\sigma\right). \qquad (1.14)$$

Соотношения (1.3), (1.5) — (1.9), (1.11), (1.13), (1.14) образуют замкнутую систему уравнений Σ относительно u, Λ, α.

Рассмотрим наряду с исходной гидродинамической задачей, описываемой системой Σ, последовательность задач, отвечающих системе Σ_n ($n=1, 2, \ldots$). Для этого заменим основное граничное условие (1.4) на

$$L\frac{d\theta}{ds} = -\beta + \alpha\left(e^{2\tau} + \frac{2}{n}e^{\tau}\cos^2\frac{\sigma}{2}\right). \tag{1.4'}$$

Тогда вместо формул (1.5) — (1.7), (1.11) будем иметь

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = \left[\beta e^{-\tau} - \alpha\left(e^{\tau} + \frac{2}{n}\cos^2\frac{\sigma}{2}\right)\right]I^{-1}, \quad (1.5') \qquad \beta = \alpha\left(I_1 + \frac{\pi}{n}\right)I^{-1}, \quad (1.6')$$

$$\alpha = \varkappa M^{-1}, \ M = \left(I_1 + \frac{\pi}{n}\right)I^{-1} - e^{2\tau(\pi)}, \tag{1.7'}$$

$$u(\sigma) = U(\sigma), \ U(\sigma) = \int\limits_0^{\pi} H_1\mu(t)\,dt + \alpha I^{-1}\int\limits_0^{\pi} D_1\left\{\left[e^{\tau(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + e^{-\tau(t)}\left(I_1 + \frac{\pi}{n}\right)I^{-1}\right]u(t) + \frac{1}{n}\sin t\right\}dt, \tag{1.11'}$$

а (1.3), (1.8), (1.13), (1.14) останутся без изменения.

В дальнейшем мы докажем разрешимость Σ_n при каждом n и возможность выбора из последовательности решений Σ_n подпоследовательности, сходящейся к решению Σ при $n \to \infty$.

Пусть C — пространство непрерывных функций на $[0, \pi]$, а $C_0 \subset C$ состоит из функций $\Lambda(\sigma)$, удовлетворяющих условию (1.12). Пусть $E = C \times C_0$, $\boldsymbol{x} = \{u, \Lambda\}$. Введем на E оператор $\boldsymbol{A}_n$ следующим образом. Пусть $\boldsymbol{x} \in E$. Из (1.13), (1.14) находим τ_0, Γ, затем из (1.8) находим τ, а из (1.9) — λ. Из первого и третьего равенств в (1.3) находим $s'(\sigma)$, а затем $\mu(\sigma) = \Phi[s'(\sigma)]$. По формулам (1.7′) определяем M и α, причем при вычислении α заменим M на $|M|$. Из (1.6′), (1.5′) находим β, $d\theta/d\sigma$, а из (1.11′) — $U(\sigma)$ и $u_* = |U|$. Зная $\theta(\sigma)$ и $\mu(\sigma)$, находим Λ_* из (1.9). Получим $\boldsymbol{x}_* = \{u_*, \Lambda_*\}$ и положим $\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}$.

Лемма 1. *Пусть $\{u, \Lambda\}$ — решение уравнения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}$. Тогда $u \geqslant 0$, соответствующие α, β неотрицательны, а $\{u, \Lambda, \alpha\}$ является решением системы Σ_n.*

Доказательство. Неравенства $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $u \geqslant 0$ очевидны. Далее, пусть $v_1(\zeta)$ — гармоническая в D_ζ^+ функция, причем $v_1(e^{i\sigma}) = -\mu(\sigma)$, $v_1(Re^{i\sigma}) = v_1(\pm r) = 0$ $(1 < r < R)$. Тогда первое слагаемое в $U(\sigma)$ равно производной по внешней нормали от v_1 $(\partial v_1/\partial n)$ при $|\zeta| = R$; оно неотрицательно в силу неравенства $\mu(\sigma) = \Phi(s') \geqslant 0$ и принципа максимума.

Пусть теперь $v_2(\zeta)$ — гармоническая в D_ζ^+ функция, причем $v_2(\pm r) = 0$, $\partial v_2/\partial n = 0$ при $|\zeta| = 1$, $\partial v_2/\partial n = f(\sigma) \geqslant 0$ при $|\zeta| = R$, где $f(\sigma)$ — выражение в квадратных скобках в (1.11′). Тогда второе слагаемое в $U(\sigma)$ равно $v_2(Re^{i\sigma})$; оно неотрицательно в силу принципа максимума.

Таким образом, $U \geqslant 0$, т. е. $|U| = U$ (попутно получили положительность ядер H_1 и D_1). Далее, т. к. $u \geqslant 0$, то $\tau(\sigma)$ — невозрастающая функция, и $M \geqslant 0$, т. е. $|M| = M$. Лемма доказана.

2. Априорные оценки решений системы Σ_n

В дальнейшем через a_i ($i = 1, 2, \ldots$) будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от n и от решения.

Лемма 2. *Вдоль дуги AB кривизна $d\theta/ds$ возрастает. Область D_z однолистна. Справедливы неравенства*

$$L < a_1, \ a_2 < I < a_3, \ |y(A')| < a_4, \tag{2.1}$$

$$-\pi < -\varkappa\frac{s}{L} \leqslant \theta(s) \leqslant 0. \tag{2.2}$$

Доказательство. Функция $\tau(\sigma)$ не возрастает, α и β неотрицательны, следовательно, в силу (1.4′) $d\theta/ds$ возрастает вдоль AB, причем $Ld\theta/ds \geqslant -\varkappa$. Поэтому и ввиду (1.1) справедливо (2.2), из которого вытекает, что наклоны дна и свободной поверхности противоположны, а при $\varkappa = 0$ дуга AB прямолинейна (твердая стенка). Кроме того, из (2.2) следует однолистность и (с учетом тождества $dx/ds = \cos\theta$) неравенство

$$x \geqslant L\varkappa^{-1} \sin(\varkappa s/L), \tag{2.3}$$

из которого при $s = L$, $x = x(B) = X$ получаем $L < a_1$. Оценка $a_2 < l < a_3$ вытекает из предыдущей и из неравенства $L \geqslant X$.

Далее, из известных свойств экстремальных длин (э. д., [5]) следует, что э. д. семейства кривых, лежащих в D_z^+ и соединяющих дуги AB и $A'B'$, больше, чем э. д. семейства кривых, соединяющих отрезки прямых $y = y(B)$ и $y = y(B')$ $(0 < x < X)$, т. е. чем $|BB'|X^{-1}$. Но э. д. не меняется при конформном отображении (в нашем случае — отображении D_z^+ на D_w^+), поэтому $|BB'| < KX$. Так как $|AA'| < |BB'| + L + L'$, то отсюда и из оценки $L < a_1$ вытекает последнее неравенство в (2.1). Лемма доказана.

Отметим, что область D_z, хотя и однолистна, может пересекаться с областями соседних периодов течения, как показывает точное решение [1] при $\Phi(s') = 0$ (это возможно лишь при $\varkappa > \pi/2$).

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$|\Gamma| < a_5, \quad |\Lambda| < a_6. \tag{2.4}$$

Доказательство. Используя (2.2) и ограниченность ядра H в (1.9) и выделяя в S ядро Гильберта $S_0 = 2\pi^{-1} \sin t (\cos t - \cos\sigma)^{-1}$, получим

$$|\Gamma| < \left| \ln \int_0^\pi \exp\left\{ \int_0^\pi S_0 \mu(t)\, dt \right\} d\sigma \right| + a_7, \tag{2.5}$$

$$|\Lambda| < \left| \int_0^\pi S_0 \mu(t)\, dt \right| + a_8. \tag{2.6}$$

Принимая во внимание неравенство $|\mu| < \pi/2$ и применяя неравенство Иенсена и теорему Зигмунда [6] (теорема 2.11), будем иметь из (2.5) $|\Gamma| < a_5$. Еще раз применяя теорему Зигмунда, а также неравенство Гёльдера, получим из (2.6), (1.9), (1.3) оценку гёльдеровской нормы $\|s'(\sigma)\|_\nu$ с некоторым показателем ν. Теперь, учитывая гёльдеровость $\Phi(s')$, можно оценить $\|\mu(\sigma)\|_\delta$ с некоторым показателем δ. Наконец, используя ограниченность интегрального оператора с ядром S_0 в пространстве Гёльдера, получим из (2.6) неравенство $|\Lambda| < a_6$.

Лемма 4. *Имеет место оценка* $\tau > -a_9$.

Доказательство. 1°. Установим сначала неравенство (в точке A)

$$|d\sigma/ds| > a_{10}. \tag{2.7}$$

Заметим, что $|d\sigma/ds| = \partial\rho/\partial n$, где n — внешняя нормаль к границе D_z, $\rho(z) = \ln|\zeta(z)|$ — гармоническая функция, удовлетворяющая краевым условиям: $\rho = 0$ на $B'A'C'$, $\rho = \ln R$ на BAC, $\partial\rho/\partial n = 0$ на BB' и CC'.

Пусть G — область, ограниченная прямыми $y = -a_4$, $|x| = X\varkappa^{-1} \sin\varkappa$ и дугой окружности $|z\varkappa - iX| = X$ (граница G на рисунке изображена пунктиром). Используя (2.3), неравенство $L \geqslant X$ и последнее неравенство в (2.1), можно показать, что дуга $A'B'$ делит G на такие части G_1 и G_2, что $G_1 \subset D_z$, $G_2 \cap D_z = \varnothing$. Введем гармоническую в G функцию $v(z)$, равную нулю на нижнем основании криволинейной трапеции G и равную $\ln R$ на остальной части границы G. По принципу максимума в точке A будет $\partial\rho/\partial n > \partial v/\partial n = a_{10}$ (т. к. $\rho \leqslant v$ в G_1), и (2.7) доказано.

2°. Поскольку $d\theta/d\sigma = -d\theta/ds\, |d\sigma/ds|^{-1}$, то в силу (2.1), (2.7) в точке A будет

$$d\theta/d\sigma \leqslant \varkappa a_{11}. \tag{2.8}$$

Но по лемме 1 $\tau(\sigma)$ убывает; в силу (1.5′) $d\theta/d\sigma$ возрастает, т. е. (2.8) выполняется при $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi$ (и $d^2\theta/d\sigma^2 \geqslant 0$). Интегрирование по частям в последнем интеграле в (1.8) приводит его к виду

$$\int_0^\pi D_0 \frac{d\theta(t)}{dt} dt + \int_0^\pi H_2 \theta(t)\, dt, \quad D_0(t, \sigma) = \frac{2}{\pi} \ln \left| \frac{\cos t - \cos \sigma}{2} \right|,$$

где H_2 — ограниченное ядро. Используя это выражение, (2.8), (2.4), (2.2) и ограниченность μ и H, получим из (1.8) оценку $\tau > -a_9$.

Лемма 5. *Имеют место неравенства*

$$a_{12}\beta \leqslant \alpha < a_{13}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Умножим (1.5′) на $\cos\theta$ и проинтегрируем от 0 до π. Учитывая тождество $dx/d\sigma = -L'\pi^{-1}e^{-\tau}\cos\theta$, получим

$$\beta = \alpha \frac{L'}{\pi X} \int_0^\pi \left(e^\tau + \frac{2}{n}\cos^2\frac{\sigma}{2}\right)\cos\theta d\sigma \leqslant \alpha a_{14}\left(\int_0^\pi e^\tau \cos\theta\, d\sigma + \pi\right).$$

Из условия однозначности функции dw/dz следует, что в последнем интеграле можно заменить τ и θ на λ и μ. Поэтому с учетом (2.4) и (1.9) имеем $a_{12}\beta \leqslant \alpha$.

Обозначим через $\boldsymbol{D}[v]$ интегральный оператор с положительным ядром D_1 от функции $v(\sigma)$. Принимая во внимание положительность первого интеграла в (1.11′) и неравенство $\tau > -a_9$, получим из (1.11′)

$$u(\sigma) \geqslant \alpha a_{15}\boldsymbol{D}\left[u(\sigma) + \frac{1}{n}\sin\sigma\right]. \tag{2.10}$$

Так как $u \geqslant 0$, то отсюда $u \geqslant \alpha n^{-1} a_{15}\boldsymbol{D}[\sin\sigma] = \alpha n^{-1} a_{15} \operatorname{cth} \pi K \sin\sigma$. Пусть $N_0 > 0$ — максимальное из чисел N, для которых $u(\sigma) \geqslant N\sin\sigma$. Из (2.10) имеем $u \geqslant \alpha_{15}\boldsymbol{D}[u] \geqslant \alpha a_{16} N_0 \sin\sigma$. Так как N_0 максимально, то отсюда получаем последнее неравенство в (2.9) с $a_{13} = 1/a_{16}$.

Лемма 6. *Справедлива оценка* $0 \leqslant u < a_{17}$.

Доказательство. Из (1.6′) и (2.9) вытекает неравенство $I_1 < a_{18}$. Нам понадобится более сильная оценка

$$\int_0^\pi e^{p\tau} d\sigma < a_{19} \tag{2.11}$$

при $p > 1$. Рассмотрим в системе координат (σ, γ) кривую $\gamma = \theta(\sigma)$, учитывая, что $\theta(0) = \theta(\pi) = 0$, $-\pi < \theta(\sigma) \leqslant 0$, $d^2\theta/d\sigma^2 \geqslant 0$. Пусть $M_0(\sigma_0, \gamma_0)$ — точка этой кривой с минимальной ординатой. Предположим сначала, что M_0 лежит не выше прямой $\sigma = 2\gamma + \pi$, и обозначим через $M_1(\sigma_1, \gamma_1)$ точку пересечения этой прямой с кривой $\gamma = \theta(\sigma)$. Оценим снизу число σ_1; для этого покажем, что $I_1 \to \infty$ при $\sigma_1 \to 0$.

Выделяя в S сингулярную часть S_0 и используя (1.8), (2.2), (2.3) и ограниченность μ, H_1, получим

$$\tau > f - a_{20}, \quad f(\sigma) = \int_0^\pi S_0 \theta(t)\, dt. \tag{2.12}$$

Легко видеть, что $f - i\theta = \Omega(Re^{i\sigma})$, где $\Omega(\zeta)$ — аналитическая в круге $|\zeta| < R$ функция, причем $\Omega(0) = \operatorname{Im}\Omega(\pm r) = 0$. Из (2.12) следует

$$I_1 > a_{21} I_2, \quad I_2 = \int_0^\pi e^f d\sigma. \tag{2.13}$$

Пусть θ получает бесконечно малое приращение $\delta\theta$. Тогда f, Ω получат приращения δf, $\delta\Omega$, и

$$\delta I_2 = \int_0^\pi e^f \delta f d\sigma = -\int_0^\pi g(\sigma)\, \delta\theta d\sigma, \tag{2.14}$$

где $e^f + ig = F(Re^{i\sigma})$, а $F(\zeta)$ — аналитическая в круге функция, причем $F(0) = \operatorname{Im} F(\pm r) = 0$ $(0 < r < R)$. Тождество (2.14) получается применением теоремы о среднем значении к гармонической функции $\operatorname{Re}[F(\zeta)\delta\Omega(\zeta)]$. Так как $d^2\theta/d\sigma^2 \geqslant 0$, то с помощью принципа максимума получаем $df/d\sigma \leqslant 0$, т. е. e^f — убывающая функция. Повторное применение принципа максимума дает $g \geqslant 0$, и в силу (2.14) $\delta I_2 \leqslant 0$ при $\delta\theta \geqslant 0$. Отсюда нетрудно получить неравенство

$$I_2 \geqslant I_* = \int_0^{\pi} e^{f_*} d\sigma, \tag{2.15}$$

где $f_* - i\theta_* = \Omega_*(Re^{i\sigma})$, $\Omega_*(0) = \operatorname{Im} \Omega_*(\pm r) = 0$, а линия $\gamma = \theta_*(\sigma)$ — ломаная с вершинами $(0, 0)$, (σ_1, γ_1), $(\pi, 0)$ (очевидно, $\theta_* \geqslant \theta$). Выражая f_* через θ_* при помощи сингулярного интеграла с ядром S_0 и оценивая его, придем к неравенству $I_* > -a_{22} - a_{23} \ln \sigma_1$. Отсюда и из неравенств $I_1 < a_{18}$, (2.13), (2.15) получим $\sigma_1 \geqslant \varepsilon > 0$, где ε — известное число.

Пусть $\Omega(\zeta) = \Omega_1 + \Omega_2$, $\Omega_k(Re^{i\sigma}) = f_k - i\theta_k$, где $\theta_1 = \sigma\theta(\varepsilon)/\varepsilon$ $(\sigma < \varepsilon)$, $\theta_1 = \theta(\sigma)$ $(\sigma > \varepsilon)$. Из вогнутости кривой $\gamma = \theta(\sigma)$ и неравенства $\theta(\varepsilon) > -\pi/2$ вытекает $d\theta_1/d\sigma > -\pi/(2\varepsilon)$. Так как f_1 есть интегральный оператор с отрицательным ядром $-D_0$ от $d\theta_1/d\sigma$, то отсюда будем иметь $f_1 < a_{24}$, и $\tau < f_2 + a_{24}$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $(\varepsilon - \pi)/2 < \theta_2 \leqslant 0$, и применяя теорему Зигмунда, получим (2.11) при $p \in (1, \pi/\varepsilon)$.

Рассмотрим теперь случай, когда M_0 лежит выше прямой $\sigma = 2\gamma + \pi$. Снова будем иметь (2.13), (2.15), где на этот раз линия $\gamma = \theta_*(\sigma)$ — ломаная с вершинами $(0, 0)$, (σ_0, γ_0), $(\pi, 0)$. Учитывая, что $\sigma_0 < 2\gamma_0 + \pi$, придем к неравенству $I_* > -a_{25} - a_{26} \ln(\pi/2 + \gamma_0)$. Из него и из неравенств $I_1 < a_{18}$, (2.13), (2.15) получим $\gamma_0 > \varepsilon_1 - \pi/2$ $(\varepsilon_1 > 0)$, после чего применим теорему Зигмунда непосредственно к $\Omega(\zeta)$. Таким образом, неравенство (2.11) справедливо в обоих случаях.

Используя эту оценку, (1.5′), (2.1), (2.9) и неравенство Гёльдера, придем к неравенству $\|\theta\|_\rho < a_{27}$ $(\rho = 1 - 1/p)$. Затем с помощью (1.8), дифференцируемости ядра H и ограниченности оператора с ядром S в пространстве Гёльдера получим оценку $\|\tau\|_\rho < a_{28}$. Снова обращаясь к (1.5′), будем иметь $\|d\theta/d\sigma\|_\rho < a_{29}$. Наконец, выражая $d\tau/d\sigma$ через $d\theta/d\sigma$ с помощью (1.8), получим $|u| < a_{17}$.

3. Доказательство существования решения

Теорема 1. *При выполнении условий* (1.1) *система* Σ_n, *эквивалентная уравнению* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_n \boldsymbol{x}$, *имеет для каждого n хотя бы одно решение* $\{u_n, \Lambda_n, \alpha_n\}$, *причем* $\boldsymbol{x}_n = \{u_n, \Lambda_n\} \in E$. *Эти решения удовлетворяют неравенствам*

$$0 \leqslant u < N_1, \ |\Lambda_n| < N_2, \ 0 \leqslant \alpha_n < N_3, \tag{3.1}$$

где N_k *не зависят от* n *и от* x_n.

Доказательство. Рассмотрим оператор $A_n^{(t)}$, зависящий от параметра $t \in [0, 1]$, заменяя в описании оператора A_n угол $\Phi(s')$ на $t\Phi(s')$, а $\varkappa$ — на $t\varkappa$. Очевидно, $\boldsymbol{A}_n^{(0)} \boldsymbol{x} = 0$, $\boldsymbol{A}_n^{(1)} = \boldsymbol{A}_n$. Оператор $\boldsymbol{A}_n^{(t)} \boldsymbol{x}$ вполне непрерывен по $\boldsymbol{x}$ и равномерно непрерывен по t на каждом ограниченном множестве из E (при доказательстве этого факта важную роль играет неравенство $M > N_4/n$). Из доказательства лемм 1—6 легко видеть, что их утверждения (в частности, оценки (3.1)) справедливы для решений уравнения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}_n^{(t)} \boldsymbol{x}$ при всех $t \in [0, 1]$. Таким образом, выполнены все условия применимости принципа Лере — Шаудера, из которого вытекает справедливость теоремы.

Теорема 2. *При выполнении условий* (1.1) *система* Σ, *эквивалентная исходной гидродинамической задаче, имеет хотя бы одно решение* $\{u, \Lambda, \alpha\}$, *удовлетворяющее неравенствам* $0 \leqslant u < N_1$, $|\Lambda| < N_2$, $0 \leqslant \alpha < N_3$.

Доказательство. Из компактности оператора A_n и оценок (3.1) вытекает возможность построения последовательности $\{u_n, \Lambda_n, \alpha_n\}$ решений Σ_n такой, что u_n и Λ_n равномерно сходятся к непрерывным функциям u, Λ, а $\alpha_n \to \alpha$, причем выполняются неравенства (3.1). Переходя к пределу при $n \to \infty$ в уравнениях системы Σ_n (предварительно умножим (1.7′) на M), легко показать, что u, Λ, α удовлетворяют системе Σ. Теорема доказана.

В заключение отметим, что при $0 < \varkappa < \pi$ величину N в неравенстве $u \geqslant N \sin \sigma$ можно оценить снизу. Это позволяет распространить теорему существования на случай, когда в правой части основного граничного условия (1.4) добавлено малое слагаемое. Такая ситуация возникает, если учитывать и силу тяжести (при условии, что число Фруда достаточно велико по сравнению с $1/\varkappa$), если рассматривать канал с дном произвольного по знаку (но малого по абсолютной величине) наклона, а также при исследовании капиллярно-гравитационных волн на линии раздела двух жидкостей (при условии, что одно из течений достаточно медленное, или что константы Бернулли мало отличаются друг от друга).

4. О разрешимости задачи 2

В случае задания $H = \max|\theta| \in [0, \pi/2)$ заменяем уравнение (1.7′) на уравнение

$$\alpha = -H\left(\int_0^{\sigma_0} G(\sigma)\,d\sigma\right)^{-1},$$

где $\sigma_0 = \inf\{\sigma \mid G(\sigma) = 0\}$, $G(\sigma)$ — правая часть (1.5′) (легко видеть, что $\sigma_0 > 0$, и $G(\sigma) < 0$ при $\sigma < \sigma_0$). Остальные уравнения системы Σ_n оставляем неизменными. Априорные оценки решения существенно упрощаются благодаря условию $H < \pi/2$.

Остается недоказанным существование решения задачи с заданным $H \in [\pi/2, \pi)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Crapper G. D. An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude.— J. Fluid. Mech., 1957, v. 2, № 4, p. 532—540.
2. Секерж — Зенькович Я. И. Об установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости над волнистым дном.— ПММ, 1972, т. 36, № 6, с. 1070—1085.
3. Beckert H. Existenzbeweis für permanente Kapillarwellen einer schweren Flussigkeit entlang eines Kanals.— Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1963, Bd. 13, № 1, S. 15—45.
4. Базалий Б. В. О волновых движениях жидкости с учетом поверхностного натяжения.— ДАН СССР, 1966, т. 169, № 6, с. 1247—1249.
5. Альфорс Л. Лекции по квазиконформным отображениям. М., 1969. 132 с.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., 1965. Т. 1. 615 с.

г. Казань

Поступила 30.10.1984

Н. А. Давыдов

УДК 517.537

О ДВУХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ ЯДРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1. В книге Кука [1], переведенной с английского языка на русский, переводчик И. И. Волков на с. 164 правильно указал на дефект второго определения ядра последовательности комплексных чисел, которое по утверждению автора книги будто бы эквивалентно первому определению, сформулированному на с. 161. Дефект второго определения, как правильно замечает И. И. Волков, кроется в том, что в нем не дано в явном виде определения барьерной линии для множества частичных пределов последовательности. Однако И. И. Волков не указывает при этом, каким образом следует исправить это второе определение, чтобы два различных определения ядра были эквивалентными. В настоящей заметке мы это сделаем. Сначала сформулируем эти определения.