П. М. Ахметьев, П. Дж. Экклз, Геометрическое доказательство теоремы Браудера о нулевых инвариантах Кервера, *Труды МИАН*, 1999, том 225, 46–51

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 1999, т. 225, с. 46–51

УДК 515.16

Геометрическое доказательство теоремы Браудера о нулевых инвариантах Кервера[1]

©1999 г. П. М. Ахметьев[2], П. Дж. Экклз[3]

Поступило в декабре 1998 г.

Инвариант Кервера определен для оснащенных многообразий размерности $n = 4k + 2$ и принимает значения в группе $Z/2$. Браудер [5] доказал, что этот инвариант всегда равен 0, если $n + 2$ не есть степень 2. Мы проводим геометрическое доказательство этого результата, используя представление инварианта Кервера в терминах кратных точек погруженных многообразий.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется

Проблема 1.1. *Пусть $f\colon N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ — погружение компактного замкнутого ориентированного n-мерного многообразия в евклидово пространство. Верно ли, что f кобордантно погружению $\Sigma^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ гомотопической сферы?*

Понятие кобордизма погружений объяснено в работе [19]. Напомним, что согласно работе Хирша [10] выбор погружения $f\colon N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ соответствует тривиализации стабильного нормального расслоения к N, другими словами оснащению многообразия N. В терминах оснащений Кервер и Милнор дали следующий частичный ответ на поставленную проблему.

Теорема 1.1 [14]. *Для $n \not\equiv 2 \pmod 4$ произвольное погружение $N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ориентированного многообразия кобордантно погружению гомотопической сферы.*

Ими же было доказано, что для $n \equiv 2 \pmod 4$ проблема, вообще говоря, решается не всегда, и препятствие к ее решению называется инвариантом Кервера исходного погружения. В простейшем случае $n = 2$ проблема была изучена Понтрягиным [17]. Им было построено погружение тора $S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}^3$, которое не кобордантно гомотопической сфере. Кервер [13] доказал, что для $n = 10$ произвольное погружение кобордантно погружению гомотопической сферы. Это приводит к явной конструкции замкнутого 10-мерного PL-многообразия без гладкой структуры (по этому поводу см. также работу С.П. Новикова о классификации гладких структур на многообразиях [16]). Результат Кервера был обобщен вначале Брауном и Петерсоном [7] на случай $n \equiv 2 \pmod 8$ (и $n > 2$) и затем Браудером, который доказал следующее.

Теорема 1.2 [5]. *Для $n \equiv 2 \pmod 4$ если $n+2$ не является степенью 2, тогда инвариант Кервера произвольного погружения $N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ориентированного многообразия равен 0 и тем самым это погружение кобордантно погружению гомотопической сферы.*

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (П.М. Ахметьев; проект 96-01-00211) и гранта Лондонского королевского общества Великобритании (П.М. Ахметьев, П.Дж. Экклз).

[2]ИЗМИРАН, Московская обл., Россия, 142092. E-mail: pmakhmet@mi.ras.ru

[3]Отделение математики, Университет Манчестера, Великобритания, M13 9PL. E-mail: pjeccles@man.ac.uk

Общий случай до сих пор не исследован. Для $n = 6$ и $n = 14$ существуют погружения коразмерности 1 многообразий $S^3 \times S^3$ и $S^7 \times S^7$, которые не кобордантны гомотопическим сферам. Известно, что такие погружения существуют для $n = 30$ [15] и $n = 62$ [4], причем явное построение погружения для $n = 30$ было проведено Джонсом [11]. До сих пор не известно, существуют ли подобные примеры в старших размерностях. Это и есть проблема об инвариантах Кервера.

Кервер и Милнор решали проблему 1.1, используя технику перестроек, которая позволяет в данном классе кобордизма найти многообразие, у которого гомотопические группы до средней размерности нулевые. Для случая, изученного в теореме 1.1, нет препятствия к перестройке гомотопической группы в средней размерности, тем самым в классе кобордизма будет найдена гомотопическая сфера. Для $n \equiv 2 \pmod 4$ инвариант Кервера исходного погружения, или, эквивалентно, оснащенного многообразия, и есть полное препятствие к перестройке на заключительном этапе: погружение коразмерности 1 кобордантно погружению гомотопической сферы, если и только если инвариант Кервера этого погружения равен 0. Кервер и Милнор определили этот инвариант в терминах инварианта Арфа квадратичной формы, которая определена на когомологиях средней размерности того многообразия, которое представляет данный класс кобордизма после соответствующих перестроек. Заметим, что это определение достаточно сложное. Доказательство Браудера теоремы 1.2 требует привлечения технических соображений и выражает инвариант Кервера через гомотопическую группу некоторого комплекса Тома. Далее оказывается, что в случае $n+2 = 2^j$ погружение с инвариантом Кервера 1 (т.е. не кобордантное погружению гомотопической сферы) существует тогда и только тогда, когда элемент h_{j-1}^2 в спектральной последовательности Адамса выживает на бесконечности. Затем Браун [6] упростил определение Браудера, а Джонс и Риис [12] дали альтернативное доказательство результата Браудера, которое основывалось на этом упрощении и на наблюдении Рея [18].

Второй автор получил геометрическое определение инварианта Кервера погружения коразмерности 1 ориентированного многообразия $f\colon N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, где $n \equiv 2 \pmod 4$, посредством следующей конструкции. Используя соображения общего положения, рассмотрим погружение $(n-1)$-мерного многообразия $\Delta_2(f) \to \mathbb{R}^{n+1}$, параметризующее точки двойного самопересечения погружения f. Это погружение имеет ненулевое нормальное векторное поле, которое образовано суммой двух векторов ориентирующих нормалей к двум листам многообразия N в соответствующих точках. По теории Хирша определено погружение коразмерности 1 $g\colon \Delta_2(f) \to \mathbb{R}^n$, которое также находится в общем положении. Множество точек n-кратного самопересечения этого погружения является конечным.

Теорема 1.3 [8]. *Для $n \equiv 2 \pmod 4$ инвариант Кервера погружения $f\colon N^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ ориентированного многообразия определяется четностью числа n-кратных точек погружения $g\colon \Delta_2(f) \to \mathbb{R}^n$.*

Подобная конструкция может быть итерирована. Погружение $g\colon \Delta_2(f) \to \mathbb{R}^n$ самопересекается по многообразию двойных точек $h\colon \Delta_2(g) = M^{n-2} \to \mathbb{R}^n$. Следующий результат вытекает из вычислений [8].

Теорема 1.4. *Для $n = 4k+2$ четность числа n-кратных точек самопересечения погружения $g\colon L^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ дается числом Штифеля–Уитни нормального расслоения $\langle \overline{w}_2^{2k}; [\Delta_2(g)] \rangle$.*

Таким образом, теорема 1.2 является прямым следствием следующего результата.

Теорема 1.5. *Для $n = 2m$, если $n+2$ не является степенью 2, для произвольного погружения h: $M^{n-2} \to \mathbb{R}^n$ нормальное число Штифеля–Уитни $\langle \overline{w}_2^{m-1}; [M] \rangle$ обращается в нуль.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4

Напомним вначале некоторые результаты (подробности см. в [8]).

Уэллс доказал [19], что группа кобордизма погружений $L^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ коразмерности 1 изоморфна гомотопической группе $\pi_n^S MO(1) = \pi_n QMO(1)$. Здесь QX определяется как прямой предел $\lim \Omega^n \Sigma^n X$ и $MO(1)$ является комплексом Тома универсального линейного расслоения. Напомним, что пространство $MO(1)$ совпадает с вещественным проективным пространством $\mathbb{RP}^\infty$ бесконечной размерности. Для $i \geq 1$ обозначим через $a_i \in H_i\mathbb{RP}^\infty \cong Z/2$ образующую. (Везде далее гомологии и когомологии рассматриваются с коэффициентами в $Z/2$.) Кольцо Понтрягина $H_*Q\mathbb{RP}^\infty$ имеет базис, определенный мономами некоторых элементов вида $Q^{i_1}Q^{i_2}\dots Q^{i_r}a_s$, где Q^i обозначает операции Кудо–Араки, известные как базис Дайера–Лашофа. Определена естественная функция на базисе Дайера–Лашофа по формулам $\operatorname{height}(a_i) = 1$, $\operatorname{height}(\xi\eta) = \operatorname{height}(\xi) + \operatorname{height}(\eta)$ и $\operatorname{height}(Q^i\xi) = 2\operatorname{height}(\xi)$.

Произвольное погружение g: $L^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ общего положения соответствует элементу $\alpha \in \pi_n QMO(1)$. В работе [9] показано, что каждый элемент веса r в образе гомоморфизма Гуревича $h(\alpha) \in H_n QMO(1)$ определяет нормальные характеристические числа и, следовательно, класс кобордизма подмногообразия r-кратных точек самопересечения погруженного многообразия g. (Подробности об этих вычислениях можно найти в [2] или [3].) В частности, четность числа n-кратных точек определяется коэффициентом $\lambda \in Z/2$ при мономе a_1^n в выражении $h(\alpha)$, записанном в базисе Дайера–Лашофа (это частный случай теоремы 2.3 работы [8]). Для $n = 4k+2$ в соответствии с [8, лемма 3.1] получаем, что коэффициент a_{2k+1}^2 также совпадает с λ. Далее методами работы [9] (см. [9, теорема 3.2]) легко показать, что многообразие двойных точек $\Delta_2(g) \to \mathbb{R}^n$ представляет элемент β из $\pi_n^S MO(2)$ такой, что если $h(\beta) \in H_n MO(2)$ записать в базисе $\{a_i a_{n-i}\}$, то коэффициент при a_{2k+1}^2 совпадает с λ. Здесь $a_i a_{n-i} \in H_n MO(2)$ обозначает образ $a_i \otimes a_{n-i} \in \tilde{H}_* MO(1) \otimes \tilde{H}_* MO(1) \cong \tilde{H}_*(MO(1) \wedge MO(1))$ при гомоморфизме, индуцированном отображением $MO(1) \wedge MO(1) \to MO(2)$ комплексов Тома, который соответствует прямому суммированию в смысле Уитни для отображения баз $BO(1) \times BO(1) \to BO(2)$. Переходя к когомологиям, получаем $\tilde{H}^* MO(2) \cong \tilde{H}^* BO(2)/BO(1) \cong w_2 Z/2[w_1, w_2]$, где w_1 и w_2 являются универсальными классами Штифеля–Уитни, $\tilde{H}^*(MO(1) \wedge MO(1)) \cong x_1 x_2 Z/2[x_1, x_2]$, где $\dim x_1 = \dim x_2 = 1$ и $m^*(w_2) = x_1 x_2$. Далее, коэффициент при a_{2k+1}^2 в $h^S(\beta)$ совпадает с λ тогда и только тогда, когда $\langle w_2^{2k+1}, h^S(\beta) \rangle = \lambda$. Наконец, аналогично [9, лемма 2.2] получаем на языке кратных точек погружений, что $\langle \overline{w}_2^{2k}, [\Delta_2(g)] \rangle = \lambda$, что и требуется.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5

В совместной работе первого автора с А. Сючем было дано геометрическое доказательство аналога теоремы 1.5 для погружений коразмерности 1.

Теорема 3.1 [1]. *В предположении, что $n+1$ не является степенью числа 2, для произвольного погружения h: $M^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ характеристическое число $\langle w_1^{n-1}; [M] \rangle$ равно 0, где w_1 — ориентирующий класс.*

Этот результат эквивалентен решению легкой части проблемы об инвариантах Хопфа, равных 1. Решение этой проблемы было получено Адемом, который использовал соотношения для композиций квадратов Стинрода.

В настоящей работе мы доказываем теорему 1.5, используя методы работы [1].

Предположим, что n — четное число и $n+2$ не является степенью 2. Тогда мы можем предположить, что $n+2=(2p+1)2^{k+l}+2^l$, где $k>0$, $l>0$ и $p\geq 0$. Пусть $h\colon M^{n-2}\to\mathbb{R}^n$ — погружение с нормальным расслоением ν. Пусть полный класс Штифеля–Уитни расслоения ν равен $1+w_1+w_2$. Тогда $w_1\in H^1M$ является ориентирующим классом многообразия M и $w_2\in H^2M$ является редукцией по модулю 2 эйлерова класса расслоения ν. Мы можем построить подмногообразие в M, которое двойственно в смысле Пуанкаре когомологическому классу w_2. Достаточно выбрать сечение общего положения нормального расслоения ν и рассмотреть подмногообразие нулей. Аналогично мы можем построить подмногообразие, которое двойственно в смысле Пуанкаре когомологическому классу w_1, проводя аналогичную конструкцию для ориентирующего расслоения ξ многообразия M. Эта конструкция может быть итерирована и построено подмногообразие $K(w_1^aw_2^b)$ многообразия M (размерности $n-a-2b-2$), двойственное в смысле Пуанкаре коциклу $w_1^aw_2^b$. Нормальное расслоение к многообразию $K=K(w_1^aw_2^b)$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как обратный образ $a\xi\oplus(b+1)\nu$, а полный класс Штифеля–Уитни этого расслоения вычисляется по формуле

$$\overline{w}(K)=(1+w_1)^a(1+w_1+w_2)^{b+1},$$

где w_1 и w_2 определены как ограничения на K классов Штифеля–Уитни расслоения ν.

Мы докажем, что $\langle w_2^{(2p+1)2^{k+l-1}+2^{l-1}-2},[M]\rangle=0$. Для этого рассмотрим подмногообразие $K=K(w_2^{p\cdot 2^{k+l}+2^{k+l-2}+2^{l-1}-2})$, причем по двойственности Пуанкаре

$$\langle w_2^{(2p+1)2^{k+l-1}+2^{l-1}-2},[M]\rangle=\langle w_2^{2^{k+l-2}},[K]\rangle. \tag{1}$$

Полный нормальный класс Штифеля–Уитни многообразия K вычисляется по формуле

$$\overline{w}(K)=(1+w_1+w_2)^{p\cdot 2^{k+l}+2^{k+l-2}+2^{l-1}-1}=$$
$$=(1+w_1+w_2)^{p\cdot 2^{k+l}}(1+w_1^{2^{k+l-2}}+w_2^{2^{k+l-2}})(1+w_1+w_2)^{2^{l-1}-1}.$$

Теперь предположим, что $k>1$. При этом предположении старший класс расслоения k определен формулой

$$\overline{w}_{2^{k+l-1}}(K)=w_2^{2^{k+l-2}}.$$

По теореме Уитни о погружении этот старший класс обращается в нуль. Наконец, из формулы (1) следует требуемый результат.

В случае $k=1$ вычисления немного усложняются. Результат здесь доказывается методом математической индукции по параметру l. Вначале рассмотрим случай $l=1$ так, что $n=4(2p+1)=8p+4$. В этом случае имеем погружение $h\colon M^{8p+2}\to\mathbb{R}^{8p+4}$. Если мы рассмотрим $K=K(w_2^{4p})$, то $\overline{w}(K)=(1+w_1+w_2)^{4p+1}$ и для старшего характеристического класса получаем соотношение $\overline{w}_2(K)=w_2$. Теперь результат следует из теоремы Уитни и формулы (1). Это вычисление служит основанием индукции.

При $l=2$ имеем $n=8(2p+1)+2=16p+10$. В этом случае задано погружение $h\colon M^{16p+8}\to\mathbb{R}^{16p+10}$. Если мы рассмотрим $K=K(w_2^{8p+2})$, то $\overline{w}(K)=(1+w_1+w_2)^{8p+3}$ и для старшего характеристического класса получаем соотношение $\overline{w}_4(K)=w_1^2w_2+w_2^2$. По теореме Уитни этот класс равен 0, следовательно, $w_2^2 = w_1^2 w_2$. Теперь рассмотрим подмногообразие в K, двойственное в смысле Пуанкаре коциклу w_1^2, которое ранее было определено как $K_1 = K(w_1^2 w_2^{8p+2})$. Полный нормальный класс задан формулой $\overline{w}(K_1) = (1+w_1+w_2)^{8p+3}(1+w_1)^2$, и, следовательно, старший класс определен как w_2 и равен 0 по теореме Уитни. Следовательно, по двойственности Пуанкаре

$$\langle w_2^{8p+4}, [M]\rangle = \langle w_2^2, [K]\rangle = \langle w_1^2 w_2, [K]\rangle = \langle w_2, [K_1]\rangle = 0.$$

Проведем индуктивное построение, рассматривая случай $l = 3$. В этом случае $n = 16(2p+1) + 6 = 32p + 22$ и определено погружение h: $M^{32p+20} \to \mathbb{R}^{32p+22}$. Возьмем подмногообразие $K = K(w_2^{16p+6})$ и вычислим старший класс Штифеля–Уитни по формуле

$$0 = \overline{w}_8(K) = w_1^6 w_2 + w_1^4 w_2^2 + w_2^4.$$

Далее, снова используя соображения двойственности в смысле Пуанкаре, мы докажем, что первые два слагаемых в правой части уравнения оказываются нулевыми. Для $w_1^6 w_2$ мы рассмотрим подмногообразие $K_1 = K(w_1^6 w_2^{16p+6})$ со старшим нормальным характеристическим классом, заданным формулой $\overline{w}_2(K_1) = w_2$ так, что

$$\langle w_1^6 w_2, [K]\rangle = \langle w_2, [K_1]\rangle = 0.$$

Для $w_1^4 w_2^2$ мы рассмотрим $K_2 = K(w_1^4 w_2^{16p+6})$, которое имеет старший класс $w_1^2 w_2 + w_2^2$. Как и в случае $l = 2$, непосредственно получаем, что $\langle w_2^2, [K_2]\rangle = 0$. Следовательно,

$$\langle w_1^4 w_2^2, [K]\rangle = \langle w_2^2, [K_2]\rangle = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\langle w_2^{16p+10}, [M]\rangle = \langle w_2^4, [K]\rangle = \langle w_1^6 w_2, [K]\rangle + \langle w_1^4 w_2^2, [K]\rangle = 0.$$

Для произвольного значения l доказательство индуктивного перехода аналогично. Оно использует аргументы, доказанные на предыдущих шагах. Формальное доказательство опускается.

Теорема доказана.

4. ЗАМЕЧАНИЯ

Выше было изложено геометрическое доказательство теоремы 1.5. Тем не менее доказательство теоремы 1.2 Браудера, полученное вследствие наших построений, нельзя считать геометрическим, поскольку наши построения используют вычисления гомологий пространства Тома. Полное геометрическое доказательство должно включать геометрические доказательства теорем 1.3 и 1.4. Эта работа пока не закончена.

Пусть дано n-мерное векторное расслоение ξ над пространством B с классом Тома $t \in H^n(T\xi)$. Соотношения Тома–Ву связывают классы Штифеля–Уитни $w_i(\xi) \in H^i(B)$ с когомологическими классами $\mathrm{Sq}^i t \in H^{i+n}T\xi$ (где Sq^i — квадраты Стинрода) посредством изоморфизма Тома. Это показывает, что приведенное нами геометрическое доказательство теоремы 1.5, использующее вычисление характеристических чисел нормальных расслоений, соответствует вычислениям, связанным с действием алгебры Стинрода в $H^*MO(2)$. Таким образом, другое доказательство теоремы Браудера может быть получено из тех соображений, что алгебра Стинрода действует на гомологиях $H_*QMO(1)$ и все сферические элементы в кольце Понтрягина обязательно переходят в нуль при действии операций Стинрода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Akhmetiev P.M., Szűcs A.* On the Hopf invariant in the homotopy groups of spheres: a geometric approach // Math. Slovaca. 1999. To appear.
2. *Asadi-Golmankhaneh M.A.* Self-intersection manifolds of immersions: Ph.D. Thes. Univ. Manchester, 1998.
3. *Asadi-Golmankhaneh M.A., Eccles P.J.* Determining the characteristic numbers of self-intersection manifolds // J. London Math. Soc. 1999. To appear.
4. *Barratt M.G., Jones J.D.S., Mahowald M.E.* Relations amongst Toda brackets and the Kervaire invariant in dimension 62 // J. London Math. Soc. Ser. 2. 1984. V. 30. P. 533–550.
5. *Browder W.* The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization // Ann. Math. Ser. 2. 1969. V. 90. P. 157–186.
6. *Brown E.H.* Generalizations of the Kervaire invariant // Ann. Math. Ser. 2. 1972. V. 95. P. 368–383.
7. *Brown E.H., Peterson F.P.* The Kervaire invariant of $(8k+2)$-manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V. 71. P. 190–193.
8. *Eccles P.J.* Codimension one immersions and the Kervaire invariant one problem // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1981. V. 90. P. 483–493.
9. *Eccles P.J.* Characteristic numbers of immersions and self-intersection manifolds // Proc. Colloq. Topology. Szekszárd (Hungary), Aug. 1993. Budapest: J. Bolyai Math. Soc., 1995. P. 197–216. (Bolyai Soc. Math. Stud.; V. 4).
10. *Hirsch M.W.* Immersions of manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 93. P. 242–276.
11. *Jones J.D.S.* The Kervaire invariant of extended power manifolds // Topology. 1978. V. 17. P. 249–266.
12. *Jones J., Rees E.* Kervaire's invariant for framed manifolds // Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. 1978. V. 32. P. 141–147.
13. *Kervaire M.A.* A manifold which does not admit any differentiable structure // Comment. Math. Helv. 1960. V. 34. P. 257–270.
14. *Kervaire M.A., Milnor J.W.* Groups of homotopy spheres. I // Ann. Math. 1963. V. 77. P. 504–537.
15. *Mahowald M.E., Tangora M.C.* Some differentials in the Adams spectral sequence // Topology. 1967. V. 6. P. 249–369.
16. *Новиков С.П.* Гомотопические эквивалентные гладкие многообразия. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28. С. 365–474.
17. *Понтрягин Л.С.* Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1983.
18. *Ray N.* A geometrical observation on the Arf invariant of a framed manifold // Bull. London Math. Soc. 1972. V. 4. P. 163–164.
19. *Wells R.* Cobordism groups of immersions // Topology. 1966. V. 5. P. 281–294.