ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 12 (151)

УДК 517.537

И. Ю. Рыжаков

О НАИМЕНЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ НУЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМАХ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ УДОВЛЕТВОРЯЮТ ЗАДАННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Пусть φ_k, $k=1, 2, \dots, n$, — функции, непрерывные на некотором компактном множестве G точек комплексной плоскости, а α_k, $k=1, 2, \dots, n$, — заданные комплексные числа, не все равные нулю. Введем следующие обозначения: $\Phi=\{\varphi_k\}_1^n$; $A=\{\alpha_k\}_1^n$; $P=\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$, где c_k — некоторые комплексные числа; $\mathscr{P}^A$ — множество полиномов P, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k c_k=1$;

$$\rho(A, \Phi, G)=\inf_{P\in\mathscr{P}^A}\sup_{z\in G}|P(z)|;$$

P_* — полином из $\mathscr{P}^A$, отклонение которого от нуля на G равно $\rho(A, \Phi, G)$ (известно, что хотя бы один такой полином всегда существует). Задачу отыскания величины $\rho(A, \Phi, G)$ и полинома P_* назовем задачей (A, Φ, G), а полином P_* — экстремальным полиномом этой задачи; $\rho(A, \Phi, G)>0$ в том и только том случае, когда всякий тождественно на G равный нулю полином P удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k c_k=0$. Везде ниже предполагаем, что это условие выполнено. В частности, оно заведомо выполнено, если система функций Φ линейно независима на G.

1°. Пусть $Z_m=\{z_l\}_1^m$ — некоторое множество точек из G. Введем в рассмотрение матрицу

$$M(\Phi, Z_m)=\|\varphi_k(z_1)\,\varphi_k(z_2)\dots\varphi_k(z_m)\|,\ k=1, 2, \dots, n.$$

Через $M^A(\Phi, Z_m)$ обозначим матрицу, полученную добавлением к $M(\Phi, Z_m)$ вектора $\{-\alpha_k\}_1^n$ в качестве $(m+1)$-го столбца. Из известной теоремы В. С. Виденского ([1], с. 414) нетрудно вывести следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того чтобы полином $P\in\mathscr{P}^A$ был экстремальным полиномом задачи (A, Φ, G), необходимо и достаточно, чтобы существовало множество $Z_m=\{z_l\}_1^m$, $z_l\in G$, такое, что:* 1) $|P(z_l)|=\sup\limits_{z\in G}|P(z)|$, $l=1, 2, \dots, m$; 2) *существует строго ненулевой и ортогональный матрице $M^A(\Phi, Z_m)$ вектор $\Lambda=\{\lambda_l\}_1^{m+1}$ (см. [2], с. 39), удовлетворяющий условиям*

$$\arg[\lambda_l P(z_l)]=\arg\lambda_{m+1},\ l=1, 2, \dots, m.$$

2°. Множество точек $Z_m=\{z_l\}_1^m$, $z_l\in G$, $z_k\neq z_j$ при $k\neq j$, назовем W-множеством задачи (A, Φ, G), если найдется $P_*\in\mathscr{P}^A$ такой, что для этого полинома

и множества Z_m выполняются условия теоремы 1 (P_* является, таким образом, экстремальным полиномом). Характеристическое множество ([1], с. 414) представляет собой пример W-множества, а всякое W-множество содержит по крайней мере одно характеристическое множество.

Пусть P_* — экстремальный полином задачи (A, Φ, G), а $Z_m = \{z_l\}_1^m$ — некоторое множество точек из G. Введем в рассмотрение систему функций $\Psi = \{\psi_k\}_1^n$, $\psi_k = \overline{P_*}\,\varphi_k$, и матрицу $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_m)$ размерности $2n \times (m+1)$: $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_m) = \|a_{k,l}\|$, где $a_{k,l} = \psi_k(z_l)$, $l = 1, 2, \ldots, m$, $a_{k,m+1} = -\alpha_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, а $a_{k,l} = \overline{\psi_k(z_l)}$ $l = 1, 2, \ldots, m$, $a_{k,m+1} = -\overline{\alpha_k}$ при $k = n+1, \ldots, 2n$.

Лемма 1. *Пусть Z_m есть W-множество задачи* (A, Φ, G), *а P_* — полином, удовлетворяющий на Z_m условиям теоремы* 1. *Тогда $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_m)$ есть НР-матрица* (*см.* [2], *с.* 39) *и, если ее ранг меньше m, то всякая ее НР-компонента* (*см.* [2], *с.* 40) *содержит последний столбец этой матрицы.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Для того чтобы W-множество Z_m являлось характеристическим множеством, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_m)$ равнялся m.*

Доказательство. Пусть $Z_m = \{z_p\}_1^m$ есть характеристическое множество и пусть ранг $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_m)$ меньше m. Тогда (см. [2], с. 40) существует подмножество $Z_p \subset Z_m$, $p < m$, такое, что $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_p)$ есть HP-матрица ранга p. Допустим для простоты, что $Z_p = \{Z_l\}_1^p$. Найдутся положительные числа $\{\delta_l\}_1^{p+1}$, удовлетворяющие равенствам

$$\sum_{l=1}^{p} \delta_l \overline{P_*(z_l)}\, \varphi_k(z_l) - \delta_{p+1}\alpha_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, P_* есть экстремальный полином задачи (A, Φ, Z_p), а это невозможно, т. к. z_m — характеристическое множество. Необходимость доказана. Докажем достаточность. Пусть $\Delta = \{\delta_l\}_1^{m+1}$ — положительный (см. [2], с. 39) вектор, ортогональный матрице $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_m)$. Так как ее ранг равен m, то всякий другой ортогональный ей вектор можно записать в виде $\mu\Delta$, где μ — число. Предположим, что Z_m не является характеристическим множеством. Тогда найдется некоторое собственное подмножество (пусть это будет $Z_p = \{z_l\}_1^p$, $p < m$), являющееся характеристическим множеством. По доказанному выше $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_p)$ есть HP-матрица ранга P и, следовательно, существует положительный вектор $\{\gamma_l\}_1^{p+1}$, ортогональный этой матрице. Тогда вектор $\Delta' = \{\delta_l'\}_1^{m+1}$, где $\delta_l' = \gamma_l$, $l = 1, 2, \ldots, p$, $\delta_{m+1}' = \gamma_{p+1}$, и $\delta_l' = 0$ при $l = p+1, \ldots, m$ ортогонален матрице $\mathfrak{M}^A(\Psi, Z_m)$. Так как Δ' нельзя представить в виде $\mu\Delta$, то мы получили противоречие.

3°. Введем следующее

Определение. Пусть $q > 1$ — некоторое натуральное число; будем говорить, что система функций Φ обладает на G свойством H_q^A, если: 1) каково бы ни было множество Z_m, состоящее из $m < q$ точек из G, $\rho(A, \Phi, Z_m) = 0$; 2) существует множество $Z_q = \{z_l\}_1^q$, $z_l \in G$, $z_k \neq z_j$ при $k \neq j$, такое, что $\rho(A, \Phi, Z_q) > 0$. Будем говорить, что Φ обладает на G свойством H_1^A, если в G найдется точка, в которой отличен от нуля каждый полином множества $\mathscr{P}^A$.

Лемма 2. *Пусть $Z_m = \{z_l\}_1^m$ — некоторое множество точек из G. Для того*

чтобы $\rho(A, \Phi, Z_m) > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц* $M(\Phi, Z_m)$ *и* $M^A(\Phi, Z_m)$ *были одинаковы.*

При $m \geqslant n$ ранги этих матриц, очевидно, одинаковы. Значит, если для заданных A, Φ и G $\rho(A, \Phi, G) > 0$, то существует натуральное q, $1 \leqslant q \leqslant n$, такое, что система Φ обладает на G свойством H_q^A.

Теорема 3. *Для того чтобы система* Φ *обладала на* G *свойством* H_q^A, *необходимо и достаточно, чтобы:* 1) *для любого множества* $Z_m \subset G$, $m < q$, *матрица* $M^A(\Phi, Z_m)$ *не являлась Н-матрицей и* 2) *существовало множество* $Z_q = \{z_l\}_1^q$, $z_l \in G$, $z_k \neq z_j$ *при* $k \neq j$, *такое, что* $M^A(\Phi, Z_q)$ *есть Н-матрица.*

Теорема 4. *Пусть система* Φ *обладает на* G *свойством* H_q^A. *Тогда всякое характеристическое множество задачи* (A, Φ, G) *содержит не менее* q *точек, а размерность множества экстремальных полиномов этой задачи не превышает* $n - q$.

Первое утверждение теоремы следует непосредственно из того, что множество Z_q, фигурирующее в условии 2) приведенного выше определения, есть характеристическое множество задачи (A, Φ, Z_q). Докажем второе утверждение. Пусть P_* — один из экстремальных полиномов задачи (A, Φ, G), а $Z_m = \{z_l\}_1^m$ — ее характеристическое множество. Тогда $m \geqslant q$, а коэффициенты любого экстремального полинома удовлетворяют системе

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k(z_l) = P_*(z_l), \quad l = 1, 2, \ldots, m; \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k(-\alpha_k) = -1.$$

Матрица этой системы уравнений представляет собой транспонированную матрицу $M^A(\Phi, Z_m)$. Нетрудно показать, что ранг $M^A(\Phi, Z_m)$ не меньше q. Следовательно, размерность множества решений системы не превышает $n - q$. Теорема доказана.

4°. Пусть $Z_m = \{z_l\}_1^m$ — некоторое множество точек из G. Здесь мы рассмотрим задачу (A, Φ, Z_m) в предположении, что $\rho(A, \Phi, Z_m) > 0$, т. е. что ранги матриц $M(\Phi, Z_m)$ и $M^A(\Phi, Z_m)$ одинаковы (см. лемму 2).

Пусть вектор $\Lambda = \{\lambda_l\}_1^{m+1}$, $\lambda_{m+1} = 1$, ортогонален матрице $M^A(\Phi, Z_m)$, а $\{\lambda_{l_j}\}_{j=1}^{p}$, $p \leqslant m$, — те и только те из координат $\{\lambda_l\}_1^m$, которые отличны от нуля. Вектор Λ назовем допустимым вектором задачи (A, Φ, Z_m), если совместна система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \varphi_k(z_{l_j}) = \mu(\Lambda)\,|\lambda_{l_j}|/\lambda_{l_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, p; \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k(-\alpha_k) = -1, \tag{1}$$

где $\mu(\Lambda) = \left(\sum_{l=1}^{m} |\lambda_l|\right)^{-1}$. Если $\{c_k\}_1^n$ — решение этой системы, то полином $P = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ является экстремальным полиномом задачи (A, Φ, Z_p), где $Z_p = \{z_{l_j}\}_{j=1}^{p}$ и $\rho(A, \Phi, Z_p) = \mu(\Lambda)$. Возможно, существует другой допустимый вектор $\Lambda' = \{\lambda'_l\}_1^{m+1}$ такой, что среди его координат $\{\lambda'_l\}_1^m$ отличны от нуля только λ'_{l_j}, $j = 1, 2, \ldots, p$. Тогда $\mu(\Lambda') = \mu(\Lambda) = \rho(A, \Phi, Z_p)$. Таким образом, на множестве всех допустимых векторов задачи (A, Φ, Z_m) величина $\mu(\Lambda)$ принимает лишь конечное множество значений (количество этих различных значений не превосходит числа H-компонент матрицы $M^A(\Phi, Z_m)$, содержащих ее последний столбец). Рассмотрим множество тех допустимых векторов Λ, для которых $\mu(\Lambda)$

наибольшее. Пусть вектор $\Lambda = \{\lambda_l\}_1^{m+1}$ принадлежит этому множеству, а среди его координат $\{\lambda_l\}_1^m$ отличны от нуля только $\{\lambda_{l_j}\}_{j=1}^p$. Тогда $\rho(A, \Phi, Zm) = \rho(A, \Phi, Z_p) = \mu(\Lambda)$, где $Z_p = \{z_{l_j}\}_{j=1}^p$. Полиномы, коэффициенты которых образуют решения системы (1), являются экстремальными полиномами задачи (A, Φ, Z_p), а те из них, для которых отклонение от нуля на множествах Z_p и Z_m одинаково, составляют множество всех экстремальных полиномов задачи (A, Φ, Z_m).

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М., „Наука", 1964.

2. Лебедев Н. А., Рыжаков И. Ю. О чебышевском приближении функций, непрерывных на компактных множествах комплексной плоскости. Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 13, вып. 3, 1969, с. 39—50.

г. Ленинград

Поступила
8 XII 1972