



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Фоменко, О поведении автоморфных L -функций в центре критической полосы,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2001, том 276, 300–311

<https://www.mathnet.ru/zns11423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.87

16 мая 2025 г., 02:51:13



О. М. Фоменко

**О ПОВЕДЕНИИ АВТОМОРФНЫХ L -ФУНКЦИЙ
В ЦЕНТРЕ КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ**

1. В этом пункте рассматривается задача заголовка в аспекте по ступени. Пусть $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$ – пространство голоморфных $\Gamma_0(N)$ -параболических форм целого веса k и характера $\chi(\bmod N)$; при четном k будем обозначать $S_k(\Gamma_0(N), 1) = S_k(\Gamma_0(N))$. Пусть $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N))$,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}, \quad z \in H = \{z = x + iy : y > 0\};$$

$$a_f(n) n^{-\frac{k-1}{2}} = b_f(n);$$

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{-s};$$

$$L_f\left(s + \frac{k-1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_f(n) n^{-s} = \mathcal{H}_f(s).$$

Свойства $L_f(s)$ как функции от s хорошо известны и мы не будем их перечислять.

В настоящем пункте $k \geq 2$ – постоянное четное число, $N = p$ – растущее простое число. Пусть \mathcal{F} – базис Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_k(\Gamma_0(N))$, состоящий из собственных форм Гекке; если $a_f(1) \neq 0$, то $a_f(1) = 1$. Пусть \mathcal{F}_0 – множество всех новых форм пространства $S_k(\Gamma_0(N))$. Как показал Делинь, $|b_f(n)| \leq d(n)$, $f \in \mathcal{F}_0$; здесь $d(n)$ – количество натуральных делителей n . На пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$ вводится метрика Петерсона $\langle f, g \rangle$; пусть

$$\omega_f = \frac{\Gamma(k-1) a_f(1)}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle}.$$

В работах [1–3] были доказаны следующие соотношения ($N = p$ – растущее простое число):

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_0} \omega_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + O\left(N^{-\frac{1}{2} + \varepsilon}\right);$$

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_0} \omega_f \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \log N + c_1 + O\left(N^{-1} \log^4 N\right).$$

Здесь $c_1 = c_1(k)$; как обычно, ε – сколь угодно малое постоянное положительное число. В качестве следствия указанных соотношений в [3, 2] было показано, что

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_0: \mathcal{H}_f(\frac{1}{2}) \neq 0} 1 \gg \frac{N}{\log^2 N}. \quad (1)$$

В работе [4] оценка (1) была улучшена для веса 2. Пользуясь некоторыми результатами из [4], докажем следующую теорему (отметим, что $\dim S_2(\Gamma_0(N)) = \frac{N}{12} + O(1)$).

Теорема 1. Пусть \mathcal{F} – базис Гекке–Аткина–Ленера пространства $S_2(\Gamma_0(N))$, где $N = p$ – простое число. Тогда справедливы следующие соотношения

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{N}{12} \zeta(2) + O\left(N^{\frac{31}{32} + \varepsilon}\right); \quad (2)$$

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{\zeta^3(2)}{\zeta(4)} \frac{N}{12} \log N + O\left(N \log \log N\right). \quad (3)$$

Известно, что в случае группы $\Gamma_0(p)$ и веса 2 имеем $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$. Для простоты будем писать

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \dots = \sum_f \dots$$

Введем обозначение

$$\mathrm{Tr}(T_n) = \mathrm{Tr}\left(T_n \mid S_k(\Gamma_0(N))\right) = \sum_f b_f(n)$$

(след оператора Гекке T_n в пространстве $S_k(\Gamma_0(N))$). Формула для $\mathrm{Tr}(T_n)$ была доказана Айхлером [5] и Сельбергом [6]. В случае веса 2 формула следа принимает сравнительно простой вид (см. [7, 4]). Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма (см. [4]).

Лемма 1. Рассмотрим пространство $S_2(\Gamma_0(N))$, где $N = p$ – простое число. Пусть $\{a_n\}$ – любая последовательность чисел. Для любого $C > 1$ и любого $B < N^2/4C$ имеем

$$\sum_{n=B}^{CB} a_n \operatorname{Tr}(T_n) = \frac{N}{12} \sum_{n=B}^{CB} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \delta_{\square} + a_{\max} O\left(B^{7/4} N^{-\frac{1}{2}} + B^{39/32+\varepsilon} N^{1/4}\right),$$

где a_{\max} означает наибольшее значение $|a_n|$ в рассматриваемом промежутке и O -константа зависит лишь от C и ε ; δ_{\square} означает 1, если n является квадратом, и 0 в противном случае.

Переходим к доказательству соотношения (2). Рассмотрим функциональное уравнение L -функции $\mathcal{H}_f(s)$:

$$\xi_f\left(\frac{1}{2} + t\right) = \varepsilon_f \xi_f\left(\frac{1}{2} - t\right),$$

где

$$\xi_f\left(\frac{1}{2} + t\right) = \left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^t \Gamma(1+t) \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2} + t\right),$$

$\varepsilon_f = \pm 1$. Выразим $\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)$ в виде быстро сходящегося ряда. Интегрируя функцию

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\xi_f(1/2+t) X^t}{t}$$

по прямой $\operatorname{Re} t = 3/4$, сдвигая затем контур до прямой $\operatorname{Re} t = -3/4$ и используя функциональное уравнение, получим

$$\mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_f(k)}{k^{1/2}} F_0\left(\frac{2\pi k}{\sqrt{N} X}\right) + \varepsilon_f \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_f(k)}{k^{1/2}} F_0\left(\frac{2\pi X k}{\sqrt{N}}\right), \quad (4)$$

где

$$F_0(Y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} t = \frac{3}{4}} \frac{\Gamma(1+t)}{t} Y^{-t} dt.$$

Как показано в [4], при $Y > 1$

$$F_0(Y) \leq c_0 e^{-cY},$$

где $c > 0$, $c_0 > 0$, и если взять $X = \sqrt{N} \log N/c$, то второй член в (4) будет $\ll N^{-6}$. Легко показать, что при $0 < Y \leq c_1$

$$F_0(Y) = 1 + \varphi_0(Y),$$

где $\varphi_0(Y) \ll Y$. Имеем

$$\sum_f \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Tr}(T_k)}{k^{1/2}} F_0 \left(\frac{2\pi k c}{N \log N} \right) + O(1).$$

Бесконечную сумму делим на следующие части:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \dots = \sum_{1 \leq k \leq N \log N} \dots + \sum_{N \log N < k \leq N \log^3 N} \dots + \sum_{k > N \log^3 N} \dots.$$

Последняя сумма оценивается как $O(1)$. В результате имеем

$$\sum_f \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} \right) = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + O(1),$$

где

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{1 \leq k \leq N \log N} \frac{\text{Tr}(T_k)}{k^{1/2}}, \\ \sum_2 &= \sum_{1 \leq k \leq N \log N} \frac{\text{Tr}(T_k)}{k^{1/2}} \varphi_0 \left(\frac{2\pi k c}{N \log N} \right), \\ \sum_3 &= \sum_{N \log N < k \leq N \log^3 N} \frac{\text{Tr}(T_k)}{k^{1/2}} F_0 \left(\frac{2\pi k c}{N \log N} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму \sum_1 . Разобьем её на $\ll \log N$ сумм с интервалами суммирования $[B, CB]$. Возьмем каждую из этих сумм $\sum_1(B)$ и применим к ней лемму 1:

$$\begin{aligned} \sum_1(B) &= \frac{N}{12} \sum_{k=B}^{CB} \frac{a_k}{\sqrt{k}} \delta_{\overline{[k]}} + a_{\max} O \left(B^{7/4} N^{-1/2} + B^{39/32} N^{1/4} \right); \\ a_k &= \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad a_{\max} \asymp \frac{1}{\sqrt{B}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sum_1 = \frac{N}{12} \zeta(2) + O \left(N^{\frac{31}{32} + \epsilon} \right).$$

Сумму \sum_2 разобьем на две:

$$\begin{aligned} \sum_2 &= \sum_{1 \leq k \leq \sqrt{N}} \frac{\text{Tr}(T_k)}{k^{1/2}} \varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N \log N}\right) + \\ &+ \sum_{\sqrt{N} < k \leq N \log N} \frac{\text{Tr}(T_k)}{k^{1/2}} \varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N \log N}\right) = \sum_2^{(1)} + \sum_2^{(2)}. \end{aligned}$$

В сумме $\sum_2^{(1)}$ применим оценку

$$\varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N \log N}\right) \ll \frac{1}{\sqrt{N} \log N};$$

поэтому по лемме 1 получаем

$$\sum_2^{(1)} \ll \frac{N^{1/2}}{\log N}.$$

С помощью леммы 1 и тривиальной оценки

$$\varphi_0\left(\frac{2\pi kc}{N \log N}\right) \ll 1$$

получаем

$$\sum_2^{(2)} \ll N^{\frac{31}{32} + \varepsilon}.$$

Аналогично имеем

$$\sum_3 \ll N^{\frac{31}{32} + \varepsilon}.$$

Соотношение (2) доказано.

Переходим к доказательству соотношения (3). Пусть

$$\tau_\nu(n) = |n|^{\nu-1/2} \sigma_{1-2\nu}(n),$$

где

$$\sigma_a(n) = \sum_{d|n, d>0} d^a.$$

Легко показать, что

$$\mathcal{H}_f\left(s + \nu - \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_f\left(s - \nu + \frac{1}{2}\right) = \zeta_p(2s) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_f(l) \tau_\nu(l)}{l^s}, \quad (5)$$

где

$$\zeta_p(s) = \zeta(s) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad p = N.$$

Положим $\nu = \frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{2} + t$. Тогда

$$\mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} + t\right)^2 = \zeta_p(1 + 2t) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_f(l)d(l)}{l^s}.$$

Представим $\mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2}\right)^2$ в виде быстро сходящегося ряда. Имеем

$$\mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 2 \sum_{1 \leq l, n < \infty} \frac{b_f(l)d(l)}{l^{1/2}n} G_0 \left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right),$$

где

$$G_0(Y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} t = \frac{3}{4}} \Gamma(1+t)^2 Y^{-t} \frac{dt}{t}.$$

Как показано в [4], при $Y > 1$

$$G_0(Y) \ll e^{-c\sqrt{Y}}, \quad c > 0.$$

Легко показать, что при $0 < Y \leq c_1$

$$G_0(Y) = 1 + \varphi_1(Y),$$

где

$$\varphi_1(Y) \ll Y \left(|\log Y| + 1\right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_f \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 2 \sum_{1 \leq l, n < \infty} \frac{d(l)\operatorname{Tr}(T_l)}{l^{1/2}n} G_0 \left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot 2 \sum_0. \end{aligned}$$

Разобьем сумму \sum_0 на следующие подсуммы:

$$\begin{aligned} \sum_0 &= \sum_{1 \leq ln^2 \leq N} \frac{d(l)\text{Tr}(T_l)}{l^{1/2}n} + \\ &+ \sum_{1 \leq ln^2 \leq N} \frac{d(l)\text{Tr}(T_l)}{l^{1/2}n} \varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) + \\ &+ \sum_{N < ln^2 \leq N \log^4 N} \frac{d(l)\text{Tr}(T_l)}{l^{1/2}n} G_0\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) + \\ &+ \sum_{N \log^4 N < ln^2 < \infty} \frac{d(l)\text{Tr}(T_l)}{l^{1/2}n} G_0\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) = \\ &= \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + O(1). \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму \sum_1 . Разобьем её на $\ll \log N$ сумм с интервалами суммирования $[B, CB]$. Возьмем каждую из этих сумм и применим к ней лемму 1. Суммируя затем по B , получаем

$$\sum_1 = \frac{N}{12} \sum_{l=1}^N \frac{a_l}{\sqrt{l}} \delta_{\lfloor \frac{N}{l} \rfloor} + O\left(N^{\frac{31}{32} + \varepsilon}\right),$$

где

$$a_l = \frac{d(l)}{l^{1/2}} \left(\sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N/l} \rfloor} \frac{1}{n} \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \frac{N}{12} \sum_{\substack{l=1 \\ l=l_1^2}}^N \frac{d(l)}{l} \left(\frac{1}{2} \log N - \frac{1}{2} \log l + O(1) \right) + O\left(N^{\frac{31}{32} + \varepsilon}\right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{N}{12} \log N \sum_{l_1=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{d(l_1^2)}{l_1^2} + O(N) = \frac{1}{2} \frac{\zeta^3(2)}{\zeta(4)} \frac{N}{12} \log N + O(N). \end{aligned}$$

Сумму \sum_2 разобьем на две:

$$\sum_2 = \sum_{1 \leq ln^2 \leq \frac{N}{\log^3 N}} \frac{d(l)\text{Tr}(T_l)}{l^{1/2}n} \varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) +$$

$$+ \sum_{\frac{N}{\log^3 N} < ln^2 \leq N} \frac{d(l)\text{Tr}(T_l)}{l^{1/2}n} \varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) = \sum_2^{(1)} + \sum_2^{(2)}.$$

На интервале $[1, \frac{N}{\log^3 N}]$ справедлива оценка

$$\varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) \ll \frac{\log \log N}{\log^3 N},$$

поэтому, применяя лемму 1, имеем

$$\sum_2^{(1)} \ll \frac{N}{\log^2 N}.$$

На интервале $[\frac{N}{\log^3 N}, N]$ берем оценку

$$\varphi_1\left(\frac{4\pi^2 ln^2}{N}\right) \ll 1$$

и применяем к $\sum_2^{(2)}$ лемму 1. В результате получаем

$$\sum_2^{(2)} \ll N \sum_{\substack{l=1 \\ l=1_1^2}} \frac{d(l)}{l} \sum_{\sqrt{N/(l \log^3 N)} \leq n \leq \sqrt{N/l}} \frac{1}{n} + O\left(N^{\frac{31}{32}+\epsilon}\right) \ll N \log \log N.$$

Аналогично имеем

$$\sum_3 \ll N \log \log N.$$

Соотношение (3), а с ним и теорема 1, доказаны.

2. В настоящем пункте изучается задача заголовка в аспекте по весу. Рассматривается пространство параболических форм $S_k(\Gamma)$, где $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ и $k \equiv 0 \pmod{4}$ – растущий вес. Пусть \mathcal{F} – базис пространства $S_k(\Gamma)$, состоящий из собственных форм Гекке. Можно считать, что $a_f(1) = 1$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

В теореме 2 работы [2] был получен аналог по весу соотношения (1). К сожалению, при доказательстве этой теоремы была допущена ошибка (в доказательстве предложения 2 из [2] неверна оценка величины S_2). В настоящей работе мы получаем слегка ослабленную версию теоремы 2 из [2].

Теорема 2. Пусть \mathcal{F} – базис пространства $S_k(\Gamma)$, состоящий из собственных форм Гекке. Тогда при $k = 4k_1$ имеем

$$\sum_{f \in \mathcal{F}: \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0} 1 \gg \frac{k}{\log^6 k}.$$

Доказательство начнем с формулировки некоторых результатов. В [8, 9] было получено следующее соотношение

$$\sum_{f \in \mathcal{F}} \omega_f \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \log k + c + O\left(k^{-1/2} \log k\right), \quad (6)$$

где c – некоторая абсолютная константа. В [10] был доказан результат

$$\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f(1)^2 = \zeta(2) + O(k^{-1} \log k). \quad (7)$$

Доказательства (6) и (7) опирались на пуассоновскую формулу суммирования, связанную с рядом Эйзенштейна–Маасса (см. [8, теорема 2.3]).

Сходным образом докажем еще одно соотношение:

$$\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f(1) \mathcal{H}_f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\zeta\left(\frac{3}{2}\right) + O(k^{-1}). \quad (8)$$

Для этого напишем аналог соотношения (5) для случая группы Γ :

$$\mathcal{H}_f\left(s + \nu - \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_f\left(s - \nu + \frac{1}{2}\right) = \zeta(2s) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_f(l) \tau_\nu(l)}{l^s}. \quad (9)$$

По известной формуле Петерсона, имеем

$$\sum_f \omega_f b_f(n) b_f(m) = \delta_{nm} + 2\pi \sum_{c \geq 1} \frac{1}{c} S(n, m; c) J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{nm}}{c}\right), \quad (10)$$

где δ_{nm} – символ Кронекера, $S(n, m; c)$ – сумма Клостермана, $J_{k-1}(x)$ – функция Бесселя порядка $k-1$.

Положим

$$Z_k(s, \nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_f \omega_f \mathcal{H}_f\left(s + \nu - \frac{1}{2}\right) \mathcal{H}_f\left(s - \nu + \frac{1}{2}\right).$$

Из (9), (10) следует, что

$$Z_k(s, \nu) = \frac{\zeta(2s)}{2\pi} + \zeta(2s) \sum_{n \geq 1} \frac{\tau_\nu(n)}{n^s} \sum_{c \geq 1} \frac{1}{c} S(n, 1; c) J_{k-1} \left(\frac{4\pi\sqrt{n}}{c} \right). \quad (11)$$

Формула (11) принадлежит Н. В. Кузнецову (см. [8, формула (84)]). Считаем, что в (11) $\operatorname{Re} s \gg 1$ (с условием сходимости ряда). Отметим, что в теореме 2.3 работы [8] в формуле Пуассона, ассоциированной с рядом Эйзенштейна–Маасса, берется ν с условием $\operatorname{Re} \nu = \frac{1}{2}$, $\nu \neq \frac{1}{2}$. Мы будем использовать вариант этой формулы с условием $\frac{1}{4} < \nu < \frac{3}{4}$, $\nu \neq \frac{1}{2}$. В качестве функции $\varphi(x)$, фигурирующей в формуле Пуассона, возьмем $\varphi(x) = x^{-2s} J_{k-1}(x)$. В результате применения формулы Пуассона к правой части соотношения (11) получаем выражение для $Z(s, \nu)$ со специальными функциями (ср. [10]), в котором предполагается, что $\operatorname{Re} s \gg 1$ и $\frac{1}{4} < \nu < \frac{3}{4}$, $\nu \neq \frac{1}{2}$. Но в этом выражении уже можно положить $s = 3/4$ и $\nu = 3/4$. Тем самым, мы приходим к асимптотической формуле для $Z(3/4, 3/4)$ при $k \rightarrow \infty$ и, следовательно, к (8).

По неравенству Коши, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f(1) \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} \right) \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\sum_{f: \mathcal{H}_f(1/2) \neq 0} \omega_f \mathcal{H}_f(1)^2 \right) \left(\sum_f \omega_f \mathcal{H}_f \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя к (12) соотношения (6) и (8), получаем

$$\frac{1}{\log k} \ll \sum_{f: \mathcal{H}_f(1/2) \neq 0} \omega_f \mathcal{H}_f(1)^2. \quad (13)$$

Известно, что

$$\omega_f \ll \frac{\log k}{k} \quad (f \in \mathcal{F}). \quad (14)$$

Неравенство (14) является следствием отсутствия зигелевского нуля у симметрического квадрата $L_f^{(f,f)}(s)$ L-функции Гекке $L_f(s)$ (см. [11]).

Оценим сверху $\mathcal{H}_f(1)$. По Ютиле [12],

$$\mathcal{H}_f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} b_f(n) e^{-n/U} n^{-1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} s = -\beta} \mathcal{H}_f(-s) \Psi(s+1) \Gamma(s) U^s ds, \quad (15)$$

где

$$\Psi(s) = (2\pi)^{2s-1} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2} - s\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + s\right)},$$

$\beta = 1 - \varepsilon$, $U \geq 1$. Выбираем $U = k^6$. Тогда

$$\int_{\operatorname{Re} s = -\beta} \mathcal{H}_f(-s) \Psi(s+1) \Gamma(s) U^s ds = O(1). \quad (16)$$

В силу оценки Делиня

$$|b_f(n)| \leq d(n),$$

имеем

$$\sum_{n \leq x} \frac{b_f(n)}{n} \ll \log^2 x. \quad (17)$$

Соотношения (15), (16) и (17) дают

$$\mathcal{H}_f(1) \ll \log^2 k, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (18)$$

Наконец, из соотношений (13), (14) и (18) получаем доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. М. Фоменко, *Применения формулы Петерсона для билинейной формы от коэффициентов Фурье параболических форм*, Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 143–166.
2. О. М. Фоменко, *Необращение в нуль автоморфных L-функций в центре критической полосы*, Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 193–204.
3. W. Duke, *The critical order of vanishing of automorphic L-functions with large level*, Invent. Math. **119**, No. 1 (1995), 165–174.
4. J. M. Vanderkam, *The rank of quotients of $J_0(N)$* , Duke Math. J. **97**, No. 3 (1999), 545–577.
5. M. Eichler, *Quadratische Formen und Modulformen*, Acta Arithm **4**, No. 3 (1958), 217–239.

6. A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous group in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20**, No. 1–3 (1956), 47–87; русский перевод: Математика. Период. сб. перев. ин. статей **1**, No. 4 (1957), 3–28.
7. A. Brumer, “*The rank of $J_0(N)$* ”, in Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992). Asterisque **228**, Soc. Math. France, Montrouge, 1995, 41–68.
8. Н. В. Кузнецов, *Свертка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна-Маасса*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **129** (1983), 43–84.
9. Р. Ф. Файзиев, *Оценка в среднем в аддитивной проблеме делителей*, В кн.: Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Теория чисел и ее приложения” (17–19 сентября 1985 г., г. Тбилиси), Тбилиси, 1985, 273–276.
10. Е. П. Голубева, О. М. Фоменко, *Поведение L -функций параболических форм в точке $s = 1$* , Зап. научн. семин. ПОМИ **204** (1993), 37–54.
11. D. Goldfeld, J. Hoffstein, and D. Lieman, *An effective zero free region*, appendix to: D. Hoffstein and P. Lockhart, *Coefficients of Maass forms and the Siegel zero*, Ann. Math. **140** (1994), 161–181.
12. M. Jutila, *On the mean value of $L(1/2, \chi)$ for real characters*, Analysis **1**, No. 2 (1981), 149–161.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 12 февраля 2001 г.