

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Григорьев, Упрощение одномерных задач теплопроводности при импульсном радиационном нагреве плоских тел, *ТВТ*, 1973, том 11, выпуск 1, 133–137

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.220.255.141

8 ноября 2024 г., 23:12:05



УДК 536.33:536.2.02

УПРОЩЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ РАДИАЦИОННОМ НАГРЕВЕ ПЛОСКИХ ТЕЛ

Б. А. Григорьев

Проанализированы погрешности упрощенного расчета температур плоских тел при импульсном радиационном нагреве в случае перехода к поверхностному поглощению излучения (замена внутреннего источника тепла тепловым потоком на облучаемой поверхности) и в случае пренебрежения теплопроводностью (определение температуры по локальному тепловыделению источника тепла). Разработан графический экспресс-метод выбора способа упрощения и оценки погрешности по заданным значениям чисел Фурье и Бугера. Обсуждены возможности применения упрощений для тел с различными физическими параметрами. Предложено уравнение теплопроводности гиперболического типа с источником тепла.

В предлагаемой работе рассмотрены способы упрощения линейных одномерных задач теплопроводности при импульсном радиационном нагреве неограниченной пластины и полуограниченного тела; аналогичные упрощения применимы и при решении более сложных задач. Импульсный характер нагрева позволяет пренебречь теплоотдачей тела в окружающую среду. Возникающая при этом погрешность определения температуры может быть оценена, минуя решение задачи теплопроводности (методика предложена автором и составляет предмет отдельного сообщения).

При поглощении монохроматического (моноэнергетического) излучения по закону Бугера в теле возникает источник тепла, мощность которого — убывающая экспоненциальная функция координаты. Изменения мощности источника тепла во времени, соответствующие изменениям плотности потока падающего излучения (облученности), при импульсном радиационном нагреве можно, как правило, аппроксимировать, пользуясь семействами прямоугольных, экспоненциальных и экспоненциально-степенных функций.

В более сложных случаях (учет спектра излучения, внутренних отражений, рассеяния и т. д.) суперпозиция перечисленных функций достаточна для аппроксимации пространственно-временных зависимостей источника тепла, что позволяет при расчете температур применять суперпозицию соответствующих решений.

Дифференциальное уравнение теплопроводности для рассматриваемых задач имеет вид*

$$\frac{\partial \theta_{\psi(x)}}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta_{\psi(x)}}{\partial x^2} + \frac{k}{c\gamma} (1 - \rho) \mathcal{E}(\tau) \exp(-kx), \quad (1)$$

где $\theta_{\psi(x)} = (t_{\psi(x)} - t_0)$ — избыточная температура (t_0 — начальная температура); x — координата, отсчитываемая от облучаемой поверхности (рис. 1), причем толщина неограниченной пластины равна l ; τ — время, отсчитываемое от начала облучения; a — коэффициент температуропроводности;

* Индекс « ψ » относится к полуограниченному телу.

$c\gamma$ — объемная теплоемкость; k — показатель поглощения; ρ — коэффициент отражения; \mathcal{E} — плотность потока падающего излучения.

Адиабатические граничные условия

$$\frac{\partial \vartheta_{\psi(n)}}{\partial x}(0, \tau) = 0; \quad \frac{\partial \vartheta_{\psi}}{\partial x}(l, \tau) = 0; \quad \frac{\partial \vartheta_{\psi(n)}}{\partial x}(\infty, \tau) = 0. \quad (2)$$

Начальное условие, соответствующее равномерному начальному полю температур,

$$\vartheta_{\psi(n)}(x, 0) = 0.$$

Решения уравнения (1) можно записать в форме

$$\vartheta_{\psi}(x, \tau) = [(1 - \rho) / c\gamma l] [1 - \exp(-Bu^*)] \mathcal{H}\theta_{\psi}(\bar{x}, \bar{\tau}, Fo^*, Bu^*), \quad (3)$$

$$\vartheta_{\psi(n)}(x, \tau) = [(1 - \rho) / c\gamma \sqrt{a\tau^*}] \mathcal{H}\theta_{\psi(n)}(\bar{x}_n, \bar{\tau}, Bu_n^*), \quad (4)$$

где $\vartheta_{\psi(n)}$ — безразмерная избыточная температура; τ^* — масштаб безразмерного преобразования времени, специфичный для каждого семейства функций времени $\mathcal{E}(\tau)$; $\bar{\tau} = \tau / \tau^*$ — безразмерное время; $\bar{x} = x / l$, $\bar{x}_n = x / \sqrt{a\tau^*}$ — безразмерные координаты; $Fo^* = a\tau^* / l^2$ — число Фурье; $Bu^* = kl$, $Bu_n^* = k\sqrt{a\tau^*}$ — числа Бугера; количество облучения

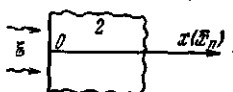
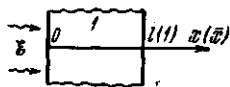


Рис. 1. Схема облучения и система координат:

1 — неограниченная пластина; 2 — полубограниченное тело

$$\mathcal{H} = \int_0^{\tau_n} \mathcal{E}(\tau) d\tau, \quad (5)$$

причем τ_n — время окончания облучения*. В дальнейшем используются также числа подобия в обобщенной форме, не зависящей от вида функций времени

$$Fo = a\tau / l^2 = Fo^* \bar{\tau}; \quad Bu_n = k\sqrt{a\tau} = Bu_n^* \sqrt{\bar{\tau}}.$$

Безразмерные преобразования, формулы и таблицы безразмерных избыточных температур приведены в [1].

Упрощение рассматриваемых задач можно производить двумя способами: с помощью перехода к эффективному (поверхностному) поглощению и путем пренебрежения теплопроводностью. Оба способа значительно расширяют возможности аналитического решения задач и существенно сокращают объем вычислений. Хотя эти способы (особенно первый) нередко используются в расчетах, однако область их корректного применения с точки зрения погрешности результатов требует специального исследования, которое впервые выполнено в предлагаемой работе.

При первом способе упрощения внутренний источник тепла заменяется тепловым потоком на облучаемой поверхности. Пользуясь в этом случае выражениями (1) — (4), нужно заменить индекс ψ на q . При этом в (1) последний член становится равным нулю ($k = \infty$), а в граничных условиях (2) нулевое значение градиента температуры на облучаемой поверхности заменяется условием

$$\frac{\partial \vartheta_{q(n)}}{\partial x}(0, \tau) = -\frac{(1 - \rho)}{\kappa} \mathcal{E}(\tau), \quad (6)$$

где κ — коэффициент теплопроводности.

В решениях отпадают интегралы по координате и остаются только интегралы по времени. Безразмерные избыточные температуры принима-

* Для экспоненциальных и экспоненциально-степенных функций $\tau_n = \infty$.

ют форму $\theta_q(\bar{x}, \bar{\tau}, Fo^*)$, $\theta_{qн} = (\bar{x}_н, \bar{\tau})$. При расчете $\theta_q(x, \tau)$ в (3) сохраняется реальное значение сомножителя $[1 - \exp(-Bu^*)]$, что дает возможность применять первый способ упрощения и для пропускающих излучение тел, т. е. при $Bu^* < 10$.

Второй способ упрощения позволяет определять локальную избыточную температуру по тепловыделению источника, не решая уравнения (1). Пользуясь в этом случае выражениями (3), (4), нужно дополнительно к ψ ввести верхний индекс «0», указывающий на данный способ упрощения задачи, а безразмерные локальные избыточные температуры определять по выражениям

$$\theta_{\psi^0}(\bar{x}, \bar{\tau}, Bu^*) = \frac{Bu^* \bar{\theta}(\bar{\tau}) \exp(-Bu^* \bar{x})}{1 - \exp(-Bu^*)} \quad (7)$$

$$\theta_{\psi н^0}(\bar{x}_н, \bar{\tau}, Bu_{н^*}) = Bu_{н^*} \bar{\theta}(\bar{\tau}) \exp(-Bu_{н^*} \bar{x}_н), \quad (8)$$

где $\bar{\theta}(\bar{\tau})$ — средняя безразмерная избыточная температура неограниченной пластины [1].

После окончания облучения, когда $\bar{\tau} \geq \bar{\tau}_к$, $\bar{\theta}(\bar{\tau}) = 1$, безразмерные локальные избыточные температуры стабилизируются и перестают зависеть от вида функций времени*.

Поля приближенных значений избыточных температур, полученные путем решения упрощенных задач, отличаются от полей истинных значений тем, что на облучаемой поверхности ($x = 0$) и на участке $x < x'$ приближенные значения выше, а на участке $x > x'$ — ниже истинных. Существует координата x' , где приближенные значения равны истинным (см. рис. 2). На основании (3), (4) для заданных значений времени и чисел подобия можно получить относительные погрешности определения избыточных температур** при рассматриваемых способах упрощения задач

$$\begin{aligned} \Delta_{q(n)}(x) &= 1 - \theta_{\psi(n)} / \theta_{q(n)} \text{ при } x < x'_q, & \Delta_{q(n)}(x) &= 1 - \theta_{q(n)} / \theta_{\psi(n)} \text{ при } x > x'_q, \\ \Delta_{\psi(n)}(x) &= 1 - \theta_{\psi(n)} / \theta_{\psi(n)}^0 \text{ при } x < x'_\psi, & \Delta_{\psi(n)}(x) &= 1 - \theta_{\psi(n)}^0 / \theta_{\psi(n)} \text{ при } x > x'_\psi. \end{aligned}$$

$$\Delta_{q(n)}(x'_q) = \Delta_{\psi(n)}(x'_\psi) = 0. \quad (9)$$

Установлено, что в основной зоне температурного поля, где $\theta_{\psi(n)}(x) / \theta_{\psi(n)}(0) \geq 0,1$, $\Delta_{q(n)}(0) \geq \Delta_{q(n)}(x)$, $\Delta_{\psi(n)}(0) \geq \Delta_{\psi(n)}(x)$. Поэтому для основной зоны погрешности на облучаемой поверхности — предельные и можно ограничиться их рассмотрением. При $Fo > 10^{-2}$ предельные погрешности определяются применительно к модели неограниченной пластины и могут быть представлены функциями $\bar{\tau}$, Fo , Bu^* . При $Fo \leq 10^{-2}$ они определяются применительно к модели полуограниченного тела и могут быть представлены функциями $\bar{\tau}$, $Bu_{н^*}$. Например, для семейства прямоугольных функций времени $\mathcal{E}(\bar{\tau})$ при $\bar{\tau} \leq 1$, когда зависимость от $\bar{\tau}$ отпадает

$$\begin{aligned} \Delta_{qн}(0) &= (\sqrt{\pi} / 2Bu_{н^*}) [1 - \exp(Bu_{н^*}^2) \operatorname{erfc}(Bu_{н^*})], \\ \Delta_{\psi н}(0) &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi} Bu_{н^*}} + \frac{1}{Bu_{н^*}^2} [1 - \exp(Bu_{н^*}^2) \operatorname{erfc}(Bu_{н^*})]. \end{aligned} \quad (10)$$

При идентичных значениях $\bar{\tau}$ и Fo предельные погрешности $\Delta_{q(n)}(0)$ и $\Delta_{\psi(n)}(0)$ как функции числа Бугера монотонно изменяются в противо-

* Для экспоненциальных и экспоненциально-степенных функций времени $\bar{\theta}(\bar{\tau} \geq 10) = 1,000$.

** В дальнейшем для краткости они будут именоваться просто погрешностями. В (9) обеспечена неотрицательность погрешностей, т. е. $0 \leq \Delta_{q, \psi(n)} < 1$.

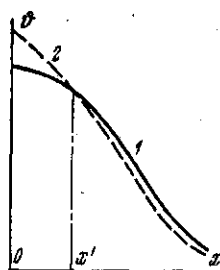


Рис. 2. Схема распределения температур:

1 — точное решение;
2 — приближенное решение

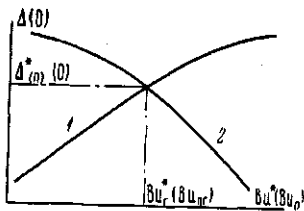


Рис. 3. Зависимость предельных относительных погрешностей от числа Бугера:

1 — $\Delta_{\Phi}(\infty)(0)$; 2 — $\Delta_{q(\infty)}(0)$

откуда $Bu_{\pi} = 2/\sqrt{\pi}$; после подстановки Bu_{π} в (10) легко получить $\Delta_{\pi}^*(0) = (\pi/4) [1 - \exp(4/\pi) \operatorname{erfc}(2/\sqrt{\pi})] = 0,4753$.

В общем $\Delta_{\pi}^*(0) = 0,4 \div 0,5$, а $\Delta^*(0) \leq 0,5$ и быстро уменьшается при росте $\bar{\tau}$ и Fo .

Автором предложен экспресс-метод выбора подходящего способа упрощения и оценки предельной погрешности по заданным значениям чисел Фурье и Бугера с помощью $F - B$ -диаграмм, представленных на рис. 4, 5.

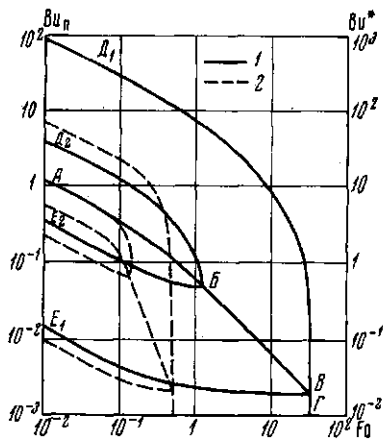


Рис. 4. $F - B$ -диаграмма для семейства прямоугольных функций времени:

1 — $\bar{\tau} \leq 1$; 2 — $\bar{\tau} = 10$

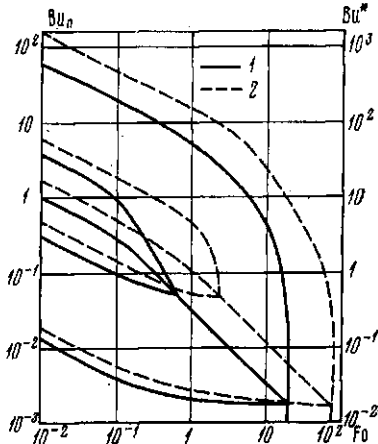


Рис. 5. $F - B$ -диаграмма для разных семейств функций времени ($\tau = 1$):

1 — экспоненциальные; 2 — экспоненциально-степенные ($m = 5$) функции

На оси абсцисс отложены значения Fo . На оси ординат справа отложены значения Bu^* , а слева нанесена шкала Bu_{π} . Масштабы диаграмм — логарифмические. Комплект изолиний, относящийся к одному семейству функций времени $\mathcal{S}(\tau)$ и определенному значению $\bar{\tau}$, представляет собой серию графиков зависимостей $Bu^* = f(Fo)$ для неограниченной пластины, каждый из которых соответствует определенному значению предельной погрешности. Левые, прямые участки изолиний, отвечают модели полуограниченного тела ($Bu_{\pi} = Bu^* \sqrt{Fo} = \text{const}$), а точки их пересечения с левой шкалой (при $Fo = 10^{-2}$) указывают величины Bu_{π} , однозначно связанные со значениями предельной погрешности. Изолиния ABB соответствует $\Delta_{(\infty)}^*(0) \geq 0,01$ и вместе с неограниченной прямой BG делит диаграмму на две зоны. Выше и правее линии $ABBG$ находится зона, где следует пользоваться первым способом упрощения, ниже и левее — зона, где применим второй способ. Изолиния D_1BE_2 соответствует $\Delta_{q(\infty)}(0) = \Delta_{\Phi(\infty)}(0) = 0,2$ и ограничивает снаружи замкнутую область, где предель-

ные погрешности находятся в диапазоне от 0,2 до $\Delta_{(n)}^*(0)$. Изолиния D_1BE_1 соответствует $\Delta_{q(n)}(0) = \Delta_{\psi(n)}(0) = 0,01$ и разграничивает две области: замкнутую внутреннюю, где предельные погрешности находятся в диапазоне от 0,01 до 0,2, и незамкнутую внешнюю, где их значения меньше 0,01. На диаграмму можно нанести дополнительно любое количество изолиний.

По мере увеличения $\bar{\tau}$ изолинии сдвигаются вниз и влево, что расширяет области малых погрешностей. Поэтому комплекты изолиний, соответствующие малым значениям $\bar{\tau}$, обеспечивают заведомо более жесткие оценки. Вид функций времени несколько влияет на расположение изолиний, но закономерность их хода сохраняется и является, таким образом, общей.

Задаваясь граничными значениями предельных погрешностей и физических параметров тел, можно, пользуясь $k-B$ -диаграммами, оценить допустимое время нагрева: минимальное $\tau_{q(n)}$ для первого способа упрощения и максимальное $\tau_{\psi(n)}$ — для второго.

Для неограниченной пластины

$$\tau_{q(\psi)} = Fo (Bu^*)^2 / ak^2. \quad (11)$$

Для полуограниченного тела

$$\tau_{q(\psi)n} = Bu_n^2 / ak^2. \quad (12)$$

Расчеты, выполненные по (12) применительно к семейству прямоугольных функций времени, показывают, что если $\Delta_{q(\psi)n}(0) = 0,01$, то для тел из металлов ($k \approx 10^5 \text{ см}^{-1}$, $a \approx 1 \text{ см}^2/\text{сек}$) $\tau_{qn} \approx 10^{-6} \text{ сек}$, $\tau_{\psi n} \approx 10^{-14} \text{ сек}$, а для тел из термозолоторов ($a \approx 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек}$) при $k = 1 \text{ см}^{-1}$ — $\tau_{qn} \approx 10^7 \text{ сек}$, $\tau_{\psi n} \approx 10^{-1} \text{ сек}$; при $k = 10^3 \text{ см}^{-1}$ — $\tau_{qn} \approx 10 \text{ сек}$, $\tau_{\psi n} \approx 10^{-7} \text{ сек}$.

Если $\Delta_{q(\psi)n}(0) = 0,2$, τ_{qn} сокращается, а $\tau_{\psi n}$ увеличивается более, чем в 500 раз.

Аналогичные расчеты, выполненные по (11), показывают, что $\tau_q \leq \tau_{qn}$ и $\tau_{\psi} \geq \tau_{\psi n}$.

Результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы. Для металлических тел целесообразно применение первого способа упрощения, причем минимальное время нагрева τ_{qn} превышает время тепловой (электрон-фононной) релаксации τ_p . Второй способ редко применим, так как обычно максимальное время нагрева $\tau_{\psi(n)} \leq \tau_p$. Если $\tau_{q(n)} > \tau_p$, то для времени нагрева, близких к τ_p , требуется решение (или суперпозиция решений) уравнения теплопроводности гиперболического типа с источником тепла, выведенного автором с помощью методики, предложенной А. В. Лыковым [2] *

$$\frac{\partial \vartheta_{\psi(n)}}{\partial \tau} + \tau_p \frac{\partial^2 \vartheta_{\psi(n)}}{\partial \tau^2} = a \frac{\partial^2 \vartheta_{\psi(n)}}{\partial x^2} + \frac{k}{c\gamma} (1 - \rho) \exp(-kx) \times \\ \times \left[\mathcal{E}(\tau) + \tau_p \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \tau} \right]. \quad (13)$$

Наоборот, для тел из термозолоторов первый способ упрощения мало перспективен, так как значения $\tau_{q(n)}$ обычно слишком велики с точки зрения импульсного облучения и пренебрежения теплоотдачей. Однако второй способ может в этом случае использоваться достаточно широко, особенно для пропускающих излучение тел, поскольку значения $\tau_{\psi(n)}$ (даже при $k = 10^3 \text{ см}^{-1}$) существенно превышают время тепловой (фонон-фононной) релаксации.

Институт высоких температур
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
29 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Григорьев, В. А. Нужный, Б. В. Шибанов. Таблицы для расчета нестационарных температур плоских тел при нагреве излучениями. «Наука», 1971.
2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. «Высшая школа», 1967.

* Использовано уравнение теплового баланса, включающее источник тепла.