В.А.Лифшиц

ПРОБЛЕМА РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОНСТРУКТИВНЫХ ТЕОРИЙ РАВЕНСТВА*)

В настоящей заметке рассматривается вопрос о существовании разрешающего алгорифма для следующих трех дедуктивных теорий, построенных на основе конструктивного исчисления предикатов.

Чистая конструктивная теория равенства - теория, формулы которой суть предикатные формулы, содержащие единственную двуместную предикатную букву $\mathfrak{S}$, а специфические аксиомы которой суть следующие три формулы:

$$\forall x_1 \mathfrak{S}(x_1, x_1); \ \forall x_1 x_2 (\mathfrak{S}(x_1, x_2) \supset \mathfrak{S}(x_2, x_1));$$

$$\forall x_1 x_2 x_3 ((\mathfrak{S}(x_1, x_2) \& \mathfrak{S}(x_2, x_3)) \supset \mathfrak{S}(x_1, x_3)).$$

---

*)Результаты настоящей заметки были доложены на Ленинградском семинаре по математической логике 17 июня 1966 г.

Конструктивная теория нормального равенства*) - теория, получающаяся из чистой конструктивной теории равенства в результате добавления к числу специфических аксиом формулы

$$\forall x_1 x_2 (\neg\neg \mathcal{E}(x_1, x_2) \supset \mathcal{E}(x_1, x_2)).$$

Конструктивная теория разрешимого равенства - теория, получающаяся из чистой конструктивной теории равенства в результате добавления к числу специфических аксиом формулы

$$\forall x_1 x_2 (\mathcal{E}(x_1, x_2) \vee \neg \mathcal{E}(x_1, x_2)).$$

<u>Теорема 1</u>. Чистая конструктивная теория равенства неразрешима.

<u>Теорема 2</u>. Конструктивная теория нормального равенства неразрешима.

Теорема 3. Конструктивная теория разрешимого равенства разрешима.

Ниже намечен путь доказательства теорем 1 и 2. При этом используются терминология и обозначения заметки [2].

---

*) Употребление термина "нормальный" в данном случае связано с употреблением этого термина в статье [1].

Обозначим посредством Γ_1 (Γ_2) конъюнкцию специфических аксиом чистой конструктивной теории равенства (соответственно, конструктивной теории нормального равенства). Пусть $\mathfrak{N}$ обозначает множество всех предикатных формул, содержащих единственную двуместную предикатную букву $\mathcal{E}$, а $\mathfrak{M}_i$ $(i=1,2)$ обозначает множество всех предикатных формул вида $\Gamma_i \supset B$, где B - предикатная формула из $\mathfrak{N}$. Для доказательства теорем 1 и 2 достаточно показать, что $\mathfrak{M}_i$ - классы сведения для K. Покажем это, следуя (с точностью до некоторых деталей) методу, описанному в заметке [2].

Рассмотрим конструктивную теорию T, обладающую следующими свойствами: формулы теории T отличаются от предикатных формул тем, что в них, наряду с предикатными переменными, могут входить две двуместные предикатные константы: $=$, $\approx$; логическими аксиомами и правилами вывода теории T являются аксиомы и правила вывода конструктивного исчисления предикатов; специфическими аксиомами теории T являются следующие формулы:

$$\forall x_1 (x_1 = x_1);\ \forall x_1 x_2 (x_1 = x_2 \supset x_2 = x_1);$$

$$\forall x_1 x_2 x_3 ((x_1 = x_2 \,\&\, x_2 = x_3) \supset x_1 = x_3);$$

$$\forall x_1 (x_1 \approx x_1);\ \forall x_1 x_2 (x_1 \approx x_2 \supset x_2 \approx x_1);$$

$$\forall x_1 x_2 x_3 ((x_1 \approx x_2 \,\&\, x_2 \approx x_3) \supset x_1 \approx x_3);$$

$$\forall x_1 x_2 (x_1 = x_2 \vee \neg (x_1 = x_2));\ \forall x_1 \neg \forall x_2 (\neg (x_1 \approx x_2) \vee \neg\neg (x_1 \approx x_2)$$

$$\forall a b (a = b \supset (\mathfrak{A}(a) \supset \mathfrak{A}(b)));\ \forall a b (a \approx b \supset (\mathfrak{A}(a) \supset \mathfrak{A}(b)));$$

где a, b - предметные переменные, $\mathfrak{A}$ - предикатная формула

и выполнены обычные ограничения на подстановку.

<u>Лемма 1</u>. Если предикатная формула доказуема в теории T, то она доказуема и в K.

Для доказательства леммы 1 можно, например, доказать сначала аналогичное утверждение для теорий T^+ и T^-, получающихся из конструктивного исчисления предикатов с равенством в результате добавления в качестве аксиом формул

$$\forall x_1 x_2 \, (x_1 = x_2 \vee \neg (x_1 = x_2)) \quad \text{для } T^+$$

$$\forall x_1 \neg \forall x_2 \, (\neg (x_1 \approx x_2) \vee \neg\neg (x_1 \approx x_2)) \text{ для } T^-$$

(что, в свою очередь, можно сделать при помощи генценовских методов), а затем применить последовательно эти два результата.

Таким образом, как следует из леммы пункта 4 заметки [2], теория T - геделевская для конструктивного исчисления предикатов.

Пусть A - предикатная формула. Будем обозначать посредством $\tilde{A}$ предикатную формулу, которая получается из предикатной формулы A в результате замены каждой атомарной предикатной формулы C во всех ее вхождениях на предикатную формулу $\neg C$.

<u>Лемма 2</u>*). Существует множество $\mathfrak{M}_0$ предикатных формул, обладающее следующими свойствами:

---

*) Лемма 2 и ее доказательство принадлежат В.П.Оревкову.

(1) множество $\mathfrak{M}_0$ есть класс сведения для K ;

(2) предикатные формулы из $\mathfrak{M}_0$ содержат одну одноместную предикатную переменную $\mathcal{P}$;

(3) для каждой предикатной формулы A из $\mathfrak{M}_0$ предикатная формула $\tilde{A}$ доказуема в K тогда и только тогда, когда предикатная формула A доказуема в K .

В качестве $\mathfrak{M}_0$ можно выбрать область значений алгорифма φ_3 , построенного в заметке [3].

Фиксируем множество $\mathfrak{M}_0$, удовлетворяющее условию леммы 2. Ниже описываются операции φ_i $(i=1,2)$, являющиеся отображениями $\mathfrak{M}_0$ в $\mathfrak{M}_i$.

Пусть A - предикатная формула из $\mathfrak{M}_0$. Обозначим посредством a первую в алфавитном порядке предметную переменную, не входящую в A ни свободно, ни связанно. Обозначим посредством A' формулу, которая получается из A в результате замены каждой атомарной предикатной формулы $\mathcal{P}(b)$ во всех ее вхождениях на формулу

$$\forall a\,(\mathcal{E}(a,b) \vee \neg \mathcal{E}(a,b)).$$

Результатом применения операции φ_i $(i=1,2)$ к формуле A будем считать формулу $\Gamma_i \supset A'$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть A - предикатная формула из $\mathfrak{M}_0$, $i=1,2$. Если предикат-

ная формула $\varphi_i(A)$ доказуема в K, то предикатная формула A также доказуема в K.

Доказательство. Пусть ψ - операция, сопоставляющая каждой предикатной формуле B из $\mathfrak{N}$ формулу теории T, получающуюся из B в результате замены каждой атомарной предикатной формулы $\mathcal{E}(a,b)$ во всех ее вхождениях на формулу

$$\neg\neg((a=b \,\&\, \neg\mathcal{P}(a)) \vee (a \approx b \,\&\, \mathcal{P}(a)).$$

Поскольку предикатная формула $\varphi_i(A)$ доказуема в K, формула $\psi(\varphi_i(A))$, т.е. $\psi(\Gamma_i) \supset \psi(A')$, доказуема в T. С другой стороны, можно доказать, что формулы $\psi(\Gamma_i)$ и $\psi(A') \equiv \tilde{A}$ доказуемы в T. Следовательно, формула $\tilde{A}$ доказуема в T. Но формула $\tilde{A}$ является предикатной формулой. Применяя к формуле $\tilde{A}$ лемму I, получаем, что формула $\tilde{A}$ доказуема в K. По свойству (3) множества $\mathfrak{M}_0$, предикатная формула A также доказуема в K.

Лемма 4. Операция φ_1 (операция φ_2) сводит проблему разрешения для множества $\mathfrak{M}_0$ к проблеме разрешения для множества $\mathfrak{M}_1$ (соответственно, $\mathfrak{M}_2$) в конструктивном исчислении предикатов.

Лемма 4 вытекает из леммы 3. Из леммы 4 и свойства (1)

множества $\mathfrak{M}_0$ следует, что множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ являются классами сведения для K ; отсюда непосредственно вытекают теоремы 1 и 2.

Покажем теперь, как доказать теорему 3 методом элиминации кванторов.

Обозначим посредством $E_n \ (n>1)$ формулу

$$\exists x_1 \dots x_n \underset{1 \le i < j \le n}{\&} \neg \mathcal{E}(x_i, x_j).$$

Замкнутую формулу из $\mathfrak{N}$ будем называть канонической, если она построена из формул $E_2, E_3, \dots$ при помощи пропозициональных связок. Формулу из $\mathfrak{N}$, содержащую свободно переменные $b_1, \dots, b_m$ будем называть канонической, если она является дизъюнкцией формул вида $K \& R$, где K - конъюнкция формул, имеющих вид $\mathcal{E}(b_i, b_j)$ или вид $\neg \mathcal{E}(b_i, b_j)$ $(1 \le i, j \le m)$, а R - замкнутая каноническая формула.

Для каждой формулы из $\mathfrak{N}$ можно построить каноническую формулу, эквивалентную ей в конструктивной теории разрешимого равенства. (Это утверждение нетрудно доказать индукцией по построению формулы). Соответствующий алгорифм сводит общую проблему разрешения для конструктивной теории разрешимого равенства к частичной проблеме разрешения для канонических формул этой теории. Проблему разрешения для канонических формул можно решить при помощи генценовских методов.

В заключение заметим, что три рассмотренные теории попарно отличаются друг от друга в смысле объема класса доказуемых формул. Формула

$$\forall x_1 x_2 \mathcal{E}(x_1, x_2) \vee \neg \forall x_1 x_2 \mathcal{E}(x_1, x_2)$$

не доказуема ни в одной из этих теорий.

Автор выражает благодарность Г.Е.Минцу и В.П.Оревкову за внимание к работе.

Литература

1. Шанин Н.А., О конструктивном понимании математических суждений."Труды Матем.ин-та АН СССР", 1958, 52, 226-311.

2. Лифшиц В.А., Дедуктивная общезначимость и классы сведения. Наст.сборник.

3. Маслов С.Ю., Минц Г.Е., Оревков В.П., Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные. "Докл. АН СССР", 1965, 163, № 2, 295-297.