Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. P. Shunkov, Abelian subgroups in biprimitively finite groups, *Algebra Logika*, 1973, Volume 12, Number 5, 603–614

https://www.mathnet.ru/eng/al1401

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
December 6, 2025, 05:36:42

Алгебра и логика, 12, № 5 (1973), 603-614.

УДК 519.48

ОБ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУППАХ В БИПРИМИТИВНО КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

В.П.ШУНКОВ

В первом издании книги [1] сформулирован следующий вопрос О.Ю. Шмидта: существуют ли бесконечные некоммутативные группы, все истинные подгруппы которых конечны? Это и есть хорошо теперь известная проблема Шмидта. Поскольку формулировка этого вопроса воспроизведена без изменений во втором издании [2] (еще при жизни Отто Юльевича), то надо полагать, что она не вызывала возражений у О.Ю.Шмидта. Для локально разрешимых групп отрицательное решение проблемы Шмидта вытекало уже из описания локально разрешимых групп с условием минимальности, полученного С.Н.Черниковым в 1939 г. (доказательство его теоремы опубликовано в [3, 4]). Сам О.Ю.Шмидт решил отрицательно свою проблему для $p = 2$ [5]. Однако уже в случае локально конечных групп указанная проблема долгое время оставалась открытой и лишь в 1963 г. М.И.Каргаполов решил ее отрицательно [6].

Для некоторых классов групп проблема Шмидта тесным образом связана с вопросом о существовании бесконечной абелевой подгруппы в произвольных группах. В [6] доказано, что любая бесконечная локально конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой. П.С.Новиковым и С.И.Адяном доказано [7], что эта теорема не имеет места даже в периодических группах ограниченного нечетного периода (отрицательное решение вопроса 1.24 [8]: всякая ли бесконечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой?). Еще раньше С.Н.Черниковым вопрос 1.24 [8] был решен положительно для локально разрешимых групп [9], а в [10] - для локально конечных групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами. Позднее в [11] метод доказательства из [6] был обобщен на группы, в которых любые два элемента порождают конечную подгруппу, и для таких групп вопрос 1.24 [8] решен положительно. Там же доказано,

что в случае положительного решения проблемы Шмидта всякая бесконечная некоммутативная группа, все собственные подгруппы которой конечны, порождается двумя элементами. В [12, 13] доказано, что в бесконечной группе, в которой все собственные подгруппы конечны, 2-элементы принадлежат ее центру. Этот результат является принципиальным обобщением упомянутого выше результата О.Ю.Шмидта для $p=2$, так как он позволяет при решении проблемы Шмидта исключить из рассмотрения не только 2-группы, но и произвольные группы, обладающие элементами 2-го порядка.

Обзор исследований по обсуждаемой выше проблематике отражен в работах [14, 15].

В настоящей статье автор решает положительно вопрос 1.24 [8] для бипримитивно конечных групп (класс таких групп был введен в [16]) (см. теорему 2). В частности, проблема Шмидта для таких групп решается отрицательно.

Доказательство теоремы 1 по существу является реализацией некоторых идей из [12, 17], но уже для случая $p \neq 2$.

Теорема 3, являющаяся в действительности следствием основного результата из [18], доказывает, что в классе периодических групп конечная 2-группа может быть максимальной только в конечной группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Периодическая группа G называется бипримитивно конечной относительно данного простого числа p, если для любой конечной подгруппы H из G в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два элемента порядка p порождают конечную подгруппу. Если G бипримитивно конечна относительно любого простого делителя порядков ее элементов, то G называется просто бипримитивно конечной.

Очевидно, из бипримитивной конечности группы относительно p вытекает, что и любая ее подгруппа обладает таким же свойством. Что касается инвариантности свойства бипримитивной конечности при переходе к фактор-группе, то этот вопрос остается открытым. Но все же в одном случае мы можем утверждать:

Фактор-группа бипримитивно конечной группы относительно p по черниковской подгруппе бипримитивно конечна относительно этого же p.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – бипримитивно конечная группа относительно p, N – ее черниковская нормальная подгруппа. Если N – конечная группа, то наше предложение вытекает непосредственно из приве –

денного выше определения.

Пусть N – бесконечная группа. Так как N является конечным расширением черниковской абелевой группы, то, очевидно, наше предложение достаточно доказать для случая, когда N – абелева p-группа.

Пусть a, b – p-элементы из G и R -характеристическая подгруппа из N ограниченного периода; a^p, $b^p \in R$. Так как N экстремальна, то R – конечная группа. Фактор-группа G/R, как отмечалось выше, бипримитивно конечна и, следовательно, подгруппа $\langle aR, bR\rangle$ конечна. Но $R \subset N$, а поэтому подгруппа $\langle aN, bN\rangle$ также конечна. Предложение доказано.

Понятно, что любая локально конечная группа бипримитивно конечна. Произвольная 2-группа также бипримитивно конечна, так как в ней две инволюции порождают конечную подгруппу. Бипримитивно конечными группами будут и группы, в которых любые два элемента порождают конечную подгруппу. Такие группы рассматривались в работе [11].

Нам будут необходимы некоторые факты о конечных группах Фробениуса [19]. Как известно, группой Фробениуса называется конечная группа G, обладающая собственной подгруппой H, совпадающей со своим нормализатором и взаимно простой со своими сопряженными.

1. Все элементы из G, не принадлежащие H и ее сопряженным, вместе с единицей составляют нормальный делитель Q и $G = Q \leftthreetimes H$ (теорема Фробениуса). H называется неинвариантным множителем, а Q – инвариантным множителем. Каждый неединичный элемент из H индуцирует в Q регулярный автоморфизм и $(|Q|, [G:Q]) = 1$.

2. Силовские p-подгруппы $(p \neq 2)$ из H циклические.

3. Если $|H|$ нечетен, то все элементы простых порядков из H порождают абелеву группу.

ЛЕММА 1. Пусть конечная группа G нечётного порядка обладает системой образующих $\tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ $(n \geq 1)$ такой, что выполняются условия:

1) $\langle \tau_{-1}, \tau_0 \rangle$ – p-группа;

2) $\tau_{k+1}^{-1} \tau_k \tau_{k+1} \in \langle \tau_{k-1} \rangle$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$;

3) для τ_n существует такой номер $s \leq n$, что $\tau_s^{-1} \tau_n \tau_s \in \langle \tau_{n-1} \rangle$. Тогда G – циклическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемму будем доказывать индукцией по порядку группы G, то есть предполагая, что для всех групп, удовлетворяющих условиям леммы и имеющих порядок меньший, чем $|G|$, утверждение леммы верно. По теореме Файта-Томпсона [20] G разрешима, а поэтому она обладает нормальной q-подгруппой $Q \neq 1$. Фактор-группа G/Q, очевидно, удовлетворяет условиям леммы и $|G/Q| < |G|$. По индуктивному предположению G/Q - циклическая p-подгруппа.

α) $q = p$. В этом случае G - конечная p-группа. Но тогда из условий 1-3) вытекает, что $G/\Phi(G)$ - циклическая группа и по теореме Бернсайда о базисе [21] G - также циклическая группа.

β) $q \neq p$. Очевидно, $|\langle \tau_i \rangle| \leq |\langle \tau_{-1} \rangle|$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и G можно представить в виде $G = Q \leftthreetimes \langle \tau_{-1} \rangle$. Отсюда и из условий 1-3) вытекает, что $Q = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть G - группа, $\mathfrak{M}$ - бесконечное множество конечных подгрупп, пересечение которых отлично от единицы. Если все неединичные элементы из пересечения подгрупп любого бесконечного подмножества $\mathfrak{M}$ почти регулярны в G, то $\mathfrak{M}$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{A}$ таким, что любая подгруппа из $\mathfrak{A}$ - группа Фробениуса с неинвариантным множителем $T = \bigcap_{H \in \mathfrak{A}} H$, причем T совпадает с пересечением подгрупп любого бесконечного подмножества из $\mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T = \bigcap_{H \in \mathfrak{M}} H$. Множество $\mathfrak{M}$ может обладать бесконечным подмножеством $\mathfrak{M}_1$ таким, что $T_1 = \bigcap_{H \in \mathfrak{M}_1} H \neq T_1$. Очевидно, $T \subset T_1$. Относительно $\mathfrak{M}_1$ рассуждаем аналогично. Рассуждая таким образом, построим строго возрастающую цепочку подгрупп $T = T_0 \subset T_1 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots$. Эта цепочка должна оборваться на конечном номере. В противном случае по теореме Каргаполова [6] объединение таких подгрупп (а оно локально конечно) обладало бы неединичным элементом с бесконечным централизатором, что противоречило бы условиям леммы. Следовательно, для какого-то номера n в множестве $\mathfrak{M}_n$ пересечение подгрупп любого бесконечного подмножества совпадает с T_n. Будем предпо-

лагать, что уже $\mathfrak{M}$ обладает таким свойством и $T \notin \mathfrak{M}$.

Если бы $\mathfrak{M}$ обладало бесконечным подмножеством $\mathfrak{B}$ таким, что $T \neq N_H(T)$ $(H \in \mathfrak{B})$, то из конечности $N_G(T)$ $(N_G(T)$ не может быть бесконечным, так как $T \neq 1$ и все неединичные элементы из T почти регулярны в G) вытекало бы существование в пересечении подгрупп некоторого бесконечного подмножества из $\mathfrak{B}$ элемента из $N_G(T)$, не принадлежащего T. Однако это противоречило бы отмеченному выше свойству множества $\mathfrak{M}$. Следовательно, число подгрупп из $\mathfrak{M}$, в которых T отлична от своего нормализатора, конечно. Выбросив их из $\mathfrak{M}$, мы получим бесконечное множество $\mathfrak{A}_1$, в каждой подгруппе которого T совпадает со своим нормализатором. Теперь предположим, что $\mathfrak{A}_1$ обладает подмножеством $\mathfrak{B}_1$ таким, что для любой подгруппы H из $\mathfrak{B}_1$ найдется в H подгруппа $T_H \neq T$, сопряженная с T в H, и $D_H = T \cap T_H \neq 1$. Так как T конечна и содержится в любой подгруппе из $\mathfrak{B}_1$, то, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $D = D_H = D_{H'}$ для любой пары подгрупп H, H' из $\mathfrak{B}_1$.

Пусть P - силовская p-подгруппа из D $(p \in \pi(D))$. Если P не является силовской в T, то она не будет силовской в T_H ни для какой подгруппы H из $\mathfrak{B}_1$ (теорема Силова [22]). Но тогда ввиду нормализаторного условия в конечных p-группах [22] $N_H(P) \not\subseteq T$, а так как $N_G(P)$ не может быть бесконечным ввиду почти регулярности в G всех неединичных элементов из P, то из $N_H(P) \not\subseteq T$ вытекало бы существование в пересечении подгрупп некоторого бесконечного подмножества из $\mathfrak{B}_1$ элемента из $N_G(P)$, не принадлежащего T, а это, как уже было показано выше, невозможно. Выбросив конечное число нежелательных подгрупп из $\mathfrak{B}_1$, получим множество $\mathfrak{B}_2$, в каждой подгруппе из которого силовские p-подгруппы из D являются силовскими в T. Однако и в последнем случае $N_H(P) \not\subseteq T$ $(H \in \mathfrak{B}_2)$. Действительно, в H существует такой элемент h, что $T_H = h^{-1}Th$. Так как P - силовская p-подгруппа в T и T_H и $P \subseteq T \cap T_H$, а в T силовские p-подгруппы сопряжены, то для некоторого элемента τ из T получим $h^{-1}\tau^{-1}P\tau h = P$, то есть $s = \tau h \in N_H(P)$. Но $h \notin T$ и, значит, $s \notin T$. Поскольку H - произвольная подгруппа из $\mathfrak{B}_2$, то мы пришли к уже рассмотренной выше ситуации (когда P не была силовской в T). Полученное противоречие означает, что в $\mathfrak{A}_1$ имеется лишь конечное число подгрупп, в которых T не является неинва-

риантным множителем группы Фробениуса. Выбросив их из $\mathfrak{A}_1$, получим искомое множество $\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть G - бесконечная периодическая группа нечетного порядка, в которой любой неединичный элемент почти регулярен, i -некоторый элемент простого порядка p из G. Если в G любой элемент порядка p и элемент i порождают конечную подгруппу, то силовская p-подгруппа из G, содержащая i, -циклическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $C_G(i)$ конечен, а G - бесконечная группа, то подгруппы типа $\langle i, g^{-1}ig\rangle$ $(g \in G)$ конечны (условие леммы) и их множество $\mathfrak{M}$ бесконечно. По лемме 2 $\mathfrak{M}$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{A}$, состоящим из групп Фробениуса с неинвариантными множителями, содержащими i. Обозначим через $\mathfrak{N}_i$ множество различных элементов из инвариантных множителей подгрупп из G, являющихся группами Фробениуса с неинвариантными множителями, содержащими i. Очевидно, $\mathfrak{N}_i$ бесконечно.

Предположим теперь, что i содержится в нециклической конечной p-подгруппе R. Так как $p \neq 2$, то R можно считать группой типа $R = \langle i\rangle \times \langle b\rangle$, $b^p = 1$ [21].

Подгруппы $\langle i, s^{-1}bs\rangle$ $(s \in \mathfrak{N}_i)$ конечны (условие леммы) и их множество бесконечно.

Ввиду леммы 2 $\mathfrak{N}_i$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{D}$ таким, что $H_s = \langle i, s^{-1}bs\rangle$ $(s \in \mathfrak{D})$ - группа Фробениуса и $\langle i\rangle$- её неинвариантный множитель: $H_s = A_s \lambda \langle i\rangle$ $(s \in \mathfrak{D})$ (свойства группы Фробениуса). Так как $s^{-1}bs \in H_s$ и $\langle i\rangle, \langle s^{-1}bs\rangle$ сопряжены в H_s (теорема Силова [22]), то в A_s найдется такой элемент c_s, что $c_s^{-1}s^{-1}bsc_s \in \langle i\rangle$. Обозначим $m_s = sc_s$. Очевидно, число различных элементов вида $m_s = sc_s$ $(s \in \mathfrak{D})$ конечно (в противном случае $C_G(b)$ был бы бесконечным). Отсюда вытекает существование в G некоторого элемента τ_1, а в $\mathfrak{D}$ бесконечного подмножества $\mathfrak{D}_1$ таких, что $\tau_1 = sc_s$ $(s \in \mathfrak{D}_1)$. Равенство $s = \tau_1 c_s^{-1}$ умножим справа на i: $si = \tau_1 c_s^{-1} i$. Если бы $\tau_1 = 1$, то $b \in \langle i\rangle$, а это невозможно. Следовательно, $\tau_1 \neq 1$. Далее, так как s и c_s - элементы, взятые из инвариантных множителей ко-

нечных групп Фробениуса, в которых i содержится в неинвариантных множителях, то $|\langle si\rangle| = |\langle c_s^{-1} i\rangle| = p$ (свойства группы Фробениуса), причём подгруппы $\langle i\rangle$ и $\langle si\rangle$ сопряжены в $\langle i, s\rangle$ (теорема Силова [22]). Но тогда подгруппы $B_s = \langle si, c_s^{-1} i\rangle = \langle si, \tau_1\rangle$ $(s \in \mathfrak{B}_1)$ конечны (условие леммы) и их множество бесконечно. По лемме 2 $\mathfrak{B}_1$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{H}$ таким, что B_s $(s \in \mathfrak{H})$ – группы Фробениуса и τ_1 содержится в неинвариантном множителе подгруппы B_s $(s \in \mathfrak{H})$. Пусть Q_s – инвариантный множитель подгруппы B_s $(s \in \mathfrak{H})$. Так как

$$B_s = \langle si, c_s^{-1} i\rangle, \quad Q_s \lhd B_s, \quad (|Q_s|, [B_s : Q_s]) = 1$$

и

$$p / [B_s : Q_s],$$

то $si \notin Q_s$ и $B_s = Q_s \leftthreetimes \langle si\rangle$ $(s \in \mathfrak{H})$ (см. свойства группы Фробениуса). Но тогда $|\langle \tau_1\rangle| = p$ и $\langle \tau_1\rangle, \langle si\rangle$ сопряжены в B_s (теорема Силова [22]). Отсюда и из сопряженности $\langle i\rangle, \langle si\rangle$ в G вытекает сопряженность $\langle i\rangle, \langle \tau_1\rangle$ в G.

Теперь рассмотрим пару элементов b, τ_1. Пусть $\mathfrak{N}_b$ – множество элементов из G, имеющее тот же смысл относительно b, что и $\mathfrak{N}_i$ относительно i ($\langle i\rangle, \langle b\rangle$ сопряжены в G). Как и в предыдущем случае, докажем существование в G элемента τ_2 порядка p такого, что $\tau_2^{-1} \tau_1 \tau_2 \in \langle b\rangle$. Относительно пары τ_1, τ_2 рассуждаем аналогично. Рассуждая таким образом, построим в G последовательность элементов порядка p

$$i = \tau_{-1}, \; b = \tau_0, \; \tau_1, \; \tau_2, \ldots, \tau_n, \; \tau_{n+1}, \ldots,$$

которая не обрывается на конечном номере и удовлетворяет условию:

$$\tau_{n+1}^{-1} \tau_n \tau_{n+1} \in \langle \tau_{n-1}\rangle \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Подгруппа $M = \langle \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots\rangle$ локально конечна, так как она является объединением конечных подгрупп: $\langle \tau_{-1}\rangle \subset \langle \tau_0, \tau_1\rangle \subseteq \ldots \subseteq \langle \tau_n, \tau_{n+1}\rangle \subseteq \ldots$. Но тогда если бы M была бесконечной, то она обладала бы бесконечной абелевой подгруппой [6], что невозможно. Следовательно, M конечна. С помощью леммы 1 заключаем, что M – циклическая группа, вопреки предположению (τ_{-1} и τ_0 не содержатся в циклической группе). Полученное противоречие доказывает, что силовская p-подгруппа из G, содержащая i, – циклическая группа. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – бесконечная периодическая группа, i – ее некоторый эле-

мент простого порядка p. Если в G любой элемент порядка p и элемент i порождают конечную подгруппу, то G обладает бесконечной подгруппой с нетривиальным центром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G содержит инволюцию, то она обладает искомой подгруппой [12]. Предположим, что G – группа нечётного порядка и в ней любой неединичный элемент почти регулярен. В этом случае G удовлетворяет условиям леммы 3. Пусть $\mathfrak{N}_i$ – множество, определенное в доказательстве леммы 3. Возьмем в $\mathfrak{N}_i$ некоторый элемент $a \neq 1$ и обозначим $\kappa = aia^{-1}$.

Подгруппы типа $\langle i, c^{-1}\kappa c\rangle$ $(c \in \mathfrak{N}_i)$ конечны (условие теоремы) и их множество бесконечно. По лемме 2 в $\mathfrak{N}_i$ существует бесконечное подмножество $\mathfrak{A}$ такое, что $\langle i, c^{-1}\kappa c\rangle$ $(c \in \mathfrak{A})$ – группы Фробениуса. По тем же соображениям, что и в доказательстве леммы 3, существует в $\mathfrak{N}_i$ элемент g_c такой, что

$$g_c^{-1} c^{-1}\kappa c g_c \in \langle i\rangle \quad (c \in \mathfrak{A}). \tag{1}$$

С другой стороны, $a^{-1}\kappa a \in \langle i\rangle$. Отсюда и из (1) получим

$$c g_c a^{-1} = r_c \in N_G(\langle \kappa\rangle) \quad (c \in \mathfrak{A}).$$

Так как $N_G(\langle\kappa\rangle)$ конечен и $\mathfrak{A}$ бесконечно, то существует в $\mathfrak{A}$ бесконечное подмножество $\mathfrak{B}$, а в $N_G(\langle\kappa\rangle)$ – элемент r_a такие, что $c g_c a^{-1} = r_a$ $(c \in \mathfrak{B})$ или

$$c = r_a a g_c^{-1}. \tag{2}$$

Из $r_a \in N_G(\langle\kappa\rangle)$ и $a^{-1}\kappa a = i$ следует, что $a^{-1} r_a a = h_a \in N_G(\langle i\rangle)$. Подставив $r_a = a h_a a^{-1}$ в (2), получим $c = a h_a g_c^{-1}$. Умножим последнее равенство справа на i: $ci = a h_a g_c^{-1} i$. Ввиду $c, g_c \in \mathfrak{N}_i$ и определения $\mathfrak{N}_i$ подгруппы $\langle c, i\rangle$ и $\langle g_c, i\rangle$ – группы Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle i\rangle$ (свойства группы Фробениуса). Но тогда $|\langle ci\rangle| = |\langle g_c^{-1} i\rangle| = p$, причём $\langle ci\rangle$ и $\langle i\rangle$ сопряжены в $\langle c, i\rangle$ (теорема Силова [22]). Отсюда и из условия теоремы вытекает, что подгруппы $\langle ci, g_c^{-1} i\rangle = \langle ci, a h_a\rangle$ $(c \in \mathfrak{B})$ конечны. По лемме 2 $\mathfrak{B}$ обладает бесконечным подмножеством $\mathfrak{B}_1$ таким, что $H_c = \langle ci, a h_a\rangle$ $(c \in \mathfrak{B}_1)$ – группы Фробениуса с неинвариантными множителями,

содержащими элемент ah_a. Так как H_c порождается двумя элементами порядка p, то из свойств группы Фробениуса вытекает, что $|\langle ah_a\rangle| = p$. Далее, ввиду $a \in \mathfrak{N}_i$ и определения $\mathfrak{N}_i$ подгруппа $\langle i, a\rangle$ - группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle i\rangle$, а поэтому $|\langle ia^{-1}\rangle| = p$. По теореме Силова [22] $\langle i\rangle$ и $\langle ia^{-1}\rangle$ сопряжены в $\langle i, a\rangle$ и по условию теоремы подгруппа $\langle ia^{-1}, ah_a\rangle$ конечна, причём она содержит элемент $ih_a \in N_G(\langle i\rangle)$.

1) $ih_a \in \langle i\rangle$. Покажем, что этот случай невозможен.

Предположим, что $h_a = i^n$ (n - целое число) и рассмотрим

$$c = ai^n g_c^{-1} \quad (c \in \mathfrak{B}) . \tag{3}$$

Пусть $i^n \neq 1$. Умножим (3) справа на i^n: $ci^n = ai^n g_c^{-1} i^n$ или $ci^n = ai^{2n}\bar{g}_c^{-1}$ $(\bar{g}_c = i^{-n} g_c i^n \in \mathfrak{N}_i)$. Так как G не содержит инволюций, то $i^{2n} \neq 1$. В этом случае, как доказано выше, $|\langle ci^n\rangle| = |\langle i^{2n} g_c^{-1}\rangle| = p$. Подгруппы $\langle ci^n\rangle$ и $\langle i^n\rangle$ сопряжены в $\langle c, i\rangle$ (теорема Силова [22]), и по условию теоремы подгруппы $H_c = \langle ci^n, i^{2n}\bar{g}_c^{-1}\rangle = \langle ci^n, a\rangle$ $(c \in \mathfrak{B})$ конечны, и их множество бесконечно. Но тогда из порождаемости H_c $(c \in \mathfrak{B})$ двумя элементами порядка p, леммы 2 и свойств группы Фробениуса вытекает, что $a^p = 1$. Это противоречит тому, что $\langle i\rangle$ - неинвариантный множитель порядка p в группе Фробениуса $\langle a, i\rangle$, а a принадлежит ее инвариантному множителю, порядок которого не делится на p (a был выбран в $\mathfrak{N}_i$). Полученное противоречие означает, что $i^n = 1$. В этом случае $c = ag_c^{-1}$ $(c \in \mathfrak{B})$ умножим справа на i: $ci = ag_c^{-1} i$ и, рассуждая аналогично предыдущему, снова докажем $a^p = 1$, а это, как отмечалось выше, невозможно. Следовательно, для любого $a \neq 1$ из $\mathfrak{N}_i$.

2) $h_a \notin \langle i\rangle$. Как уже доказано, подгруппа $\langle ia^{-1}, ah_a\rangle$ конечна, а так как $\langle ia^{-1}, ah_a\rangle = \langle ia^{-1}, ih_a\rangle$, $ih_a \in N_G(\langle i\rangle)$ и $N_G(\langle i\rangle)$ конечен, то, очевидно, множество подгрупп типа $\langle ia^{-1}, ih_a\rangle$ $(a \in \mathfrak{N}_i)$ бесконечно. Но тогда существуют в $\mathfrak{N}_i$ бесконечное подмножество $\mathfrak{G}$, а в $N_G(\langle i\rangle)$ элемент h такие, что подгруппы $\langle ia^{-1}, ih\rangle$ $(a \in \mathfrak{G})$ конечны и их множество бесконечно. С помощью рассуждений, которые уже неоднократно проводились выше (например, когда доказывали $(ah_a)^p = 1$), докажем $(ih)^p = 1$, а так как силовские p-подгруппы из $N_G(\langle i\rangle)$ циклические (лемма 3 и теорема Силова [22]), то $ih \in \langle i\rangle$ и $h \in \langle i\rangle$ вопреки предположению $h \notin \langle i\rangle$.

Полученное противоречие означает, что G обладает бесконечной подгруппой с нетривиальным центром. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Бесконечная бипримитивно конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G - бесконечная бипримитивно конечная группа. По любому $p \in \pi(G)$ G удовлетворяет условиям теоремы 1. Согласно этой теореме G обладает неединичным элементом d_1 с бесконечным $G_1 = C_G(d_1)$. Фактор-группа $\bar{G}_1 = G_1/\langle d_1 \rangle$ - бесконечная бипримитивно конечная группа и по теореме 1 $\bar{G}_1$ обладает неединичным элементом $\bar{d}_2$ с бесконечным $C_{\bar{G}}(\bar{d}_2)$ (d_2 - прообраз $\bar{d}_2$ в G_1). Обозначим $D_1 = \langle d_1 \rangle$, $D_2 = \langle d_1, d_2 \rangle$, $G_2 = C_{G_1}(D_2)$. Очевидно, $\bar{G}_2 = G_2/D_2$ - бесконечная бипримитивно конечная группа и по тем же соображениям, что и для $\bar{G}_1$, она обладает неединичным элементом $\bar{d}_3$ с бесконечным $C_{\bar{G}_2}(\bar{d}_3)$. Рассуждая таким образом, построим строго возрастающую цепочку абелевых подгрупп

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots ,$$

которая не обрывается на конечном номере. Объединение этой цепочки и есть искомая подгруппа. Теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает отрицательное решение проблемы Шмидта для бипримитивно конечных групп.

Так как в произвольной периодической группе четного порядка любые две инволюции порождают конечную группу, то с помощью теоремы 1 получаем следующий результат:

Если проблема Шмидта решается положительно, то всякая бесконечная некоммутативная группа G, все собственные подгруппы которой конечны, обладает следующими свойствами:

1) в группе автоморфизмов группы G нет элементов порядка 2;

2) для любого $p \in \pi(G/Z(G))$ группа $G/Z(G)$ порождается двумя элементами порядка p, один из которых можно считать произвольным, но фиксированным эле-

ментом порядка p.

ТЕОРЕМА 3. Если периодическая группа обладает конечной максимальной 2-подгруппой, то сама группа конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G - периодическая группа, S - ее конечная максимальная 2-подгруппа. Теорему будем доказывать методом индукции по порядку подгруппы S, то есть будем предполагать, что утверждение теоремы верно для любой периодической группы, в которой максимальная конечная 2-подгруппа имеет порядок, меньший чем $|S|$.

Если $S=1$, то понятно, что G конечна. Пусть $S\neq 1$ и i - инволюция из $Z(S)$ Если i почти регулярна в G, то в силу теоремы из [18] G локально конечна и при наших условиях конечна. Пусть $C_G(i)$ бесконечен. Так как S конечна и $S\subseteq C_G(i)$, то $S\neq C_G(i)$. Но тогда $C_G(i)$ не может быть собственной подгруппой в G, ибо в противном случае S не была бы максимальной в G. Следовательно, $C_G(i)=G$. Очевидно, $G/\langle i\rangle$ и $S/\langle i\rangle$ удовлетворяют условиям теоремы, причём $|S/\langle i\rangle|<|S|$. По индуктивному предположению $G/\langle i\rangle$ конечна а, значит, и G конечна. Теорема доказана.

Литература

1. А.Г.КУРОШ, Теория групп, М.-Л., 1944.

2. А.Г.КУРОШ, Теория групп, М.-Л., 1953.

3. С.Н.ЧЕРНИКОВ, Бесконечные локально разрешимые группы, Матем. сб., 7, № 1 (1940), 35-64.

4. С.Н.ЧЕРНИКОВ, К теории бесконечных специальных групп, Матем. сб., 7, № 3 (1940), 539-548.

5. О.Ю.ШМИДТ, Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп, в кн.: "Избранные труды. Математика", М., 1959.

6. М.И.КАРГАПОЛОВ, О проблеме О.Ю.Шмидта, Сиб.матем.ж., 4, № 1 (1963), 232-235.

7. П.С.НОВИКОВ, С.И.АДЯН, О коммутативных подгруппах и проблеме сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка, ИАН СССР, сер.матем., 32, № 5 (1968).

8. Коуровская тетрадь (нерешенные задачи теории групп), изд. 1-е, 3-е, Новосибирск, 1965, 1969.

9. С.Н.ЧЕРНИКОВ, О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп, Матем. сб., 28, № 1 (1951), 119-129.

10. С.Н.ЧЕРНИКОВ, О бесконечных локально конечных группах с конечными силовскими подгруппами, Матем. сб., 52, № 1 (1960), 647-652.

11. С.П.СТРУНКОВ, Нормализаторы и абелевы подгруппы некоторых классов групп, ИАН СССР, сер.матем., 31, № 3 (1967), 657-670.

12. В.П.ШУНКОВ, К теории периодических групп, ДАН СССР, 175, №6 (1967), 1236-1237.

13. В.П.ШУНКОВ, О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы, Алгебра и логика, 6, № 3 (1967), 113-124.

14. С.Н.ЧЕРНИКОВ, О группах с ограничениями для подгрупп, в сб.: "Группы с ограничениями для подгрупп", Киев, 1971.

15. С.Н.ЧЕРНИКОВ, О проблеме Шмидта, Укр. матем.ж., 23, № 5 (1971), 598-603.

16. В.П.ШУНКОВ, Об одном классе p-групп, Алгебра и логика, 9, № 4 (1970), 484-496.

17. В.П.ШУНКОВ, О локально конечной группе с экстремальными силовскими p-подгруппами по некоторому простому числу p, Сиб.матем. ж., 8, № 1 (1967), 213-229.

18. В.П.ШУНКОВ, О периодических группах с почти регулярной инволюцией, Алгебра и логика, 11, № 4(1972), 470-493.

19. В.М.БУСАРКИН, Ю.М.ГОРЧАКОВ, Конечные расщепляемые группы, Наука, М., 1968.

20. W.FEIT, J.THOMPSON, Solvability of groups of odd order, Pacif.J.Math.,13 (1963), 775-1029.

21. М.ХОЛЛ, Теория групп, ИЛ, 1962.

22. М.И.КАРГАПОЛОВ, Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ, Основы теории групп, Наука, М., 1972.

Поступило 28 июля 1973 г.