Дж. Э. Аллахвердиев, Р. М. Джабарзаде, Многопараметрическая система операторов, нелинейно зависящая от спектрального параметра,

Докл. АН СССР, 1988, том 299, номер 6, 1289–1291

https://www.mathnet.ru/dan7652

Доклады Академии наук СССР
1988. Том 299, № 6

УДК 517.984 МАТЕМАТИКА

Дж. Э. АЛЛАХВЕРДИЕВ, Р.М. ДЖАБАРЗАДЕ

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ОПЕРАТОРОВ, НЕЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩАЯ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком Н.Н. Моисеевым 18 XI 1986)

Целью настоящей статьи является изучение многопараметрической системы вида

$$A_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j)x_i = (A_{i0} + \lambda_1 A_{i1} + \ldots + \lambda_j A_{ij} + \lambda_j^2 A_{i,j+1})x_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, j, \tag{1}$$

где операторы $A_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_j)$ действуют в сепарабельных гильбертовых пространствах H_i. При $A_{i,j+1} = 0$ имеем хорошо изученные в работах Брауне, Аткинсона, Слимана, Роча и многих других авторов многопараметрические системы.

Через $H = H_1 \otimes \ldots \otimes H_j$ обозначаем тензорное произведение пространств $H_1, H_2, \ldots, H_j$.

Разложимый тензор $x = x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_j \in H$ есть собственный вектор системы (1), а $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j) \in C^j$ – соответствующее собственное значение, если

$$A_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_j)x_i = \left(\sum_{i=0}^{j-1} \lambda_s A_{is} + \lambda_j A_{ij} + \lambda_j^2 A_{i,j+1}\right)x_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, j.$$

Пусть теперь H_{j+1} – некоторое конечномерное пространство, H_{j+1}^2 – прямая сумма двух копий пространства H_{j+1}.

Обозначим: $\widetilde{H} = H_1 \otimes \ldots \otimes H_j \otimes H_{j+1}^2$ – тензорное произведение пространств $H_1, H_2, \ldots, H_j, H_{j+1}^2$. В пространстве H_{j+1}^2 рассмотрим операторы, заданные с помощью матриц

$$T_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 \sim \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad T_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix},$$

где J – единичный оператор в H_{j+1}.

Далее, пусть A_{ks}^+, T_i^+, $i = 0, 1, 2,$ – операторы, индуцированные в $\widetilde{H}$ операторами A_{ks} и T_i соответственно.

Положим, что для любого вектора $f \in \widetilde{H}$ единственным образом можно определить $j + 1$ векторов $g_0, g_1, \ldots, g_j \in \widetilde{H}$ таких, что для них выполнено

$$A_{kj}^+ f + \sum_{s=0}^{j-1} A_{ks}^+ g_s + A_{k,j+1}^+ g_j = 0, \tag{2}$$

$$T_0^+ f + T_1^+ g_1 + T_2^+ g_j = 0.$$

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *имеет место* (2);

б) A_{rs} – *самосопряженные операторы в* H_r, *при* $s \neq 0$ *они ограничены*;

в) *для произвольных неотрицательных чисел* $\alpha \geqslant 0$ *и* $\beta \geqslant 0$ *с* $\alpha + \beta > 0$ *имеем,* *что при* $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_j \otimes x_{j+1} \in \widetilde{H}$

$$(3)\qquad \det \begin{vmatrix} (A_{10}x_1, x_1) & \ldots & (A_{1,j-1}x_1, x_1) & (A_{1,j+1}x_1, x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A_{j0}x_j, x_j) & \ldots & (A_{j,j-1}x_j, x_j) & (A_{j,j+1}x_j, x_j) \end{vmatrix} \geqslant \delta \| x \| (\alpha + \beta).$$

Тогда существует система из $j+1$ *операторов, действующих в пространстве* $\widetilde{H}$, *разделяющая спектр системы* (1).

Доказательство. Делим (1) на λ_j. Приходим к системе

$$(4)\qquad \left(\frac{1}{\lambda_j} A_{i0} + \frac{\lambda_1}{\lambda_j} A_{i1} + \ldots + \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j} A_{i,j-1} + \frac{1}{\lambda_j} A_{i,j} + \lambda_j A_{i,j+1}\right) x_i = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, j.$$

В силу (3) деление на λ_j возможно, так как (1) не может иметь собственное значение $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_j)$ с $\lambda_j = 0$. В противном случае система

$$(\lambda_0 A_{i0} + \lambda_1 A_{i1} + \ldots + \lambda_{j-1} A_{i,j-1}) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, j,$$

имела бы собственное значение $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}) \in C^j$, отличное от нуля, что невозможно в силу (3). Имеем

$$(5)\qquad \begin{gathered} (\mu_0 A_{i0} + \mu_1 A_{i1} + \ldots + \mu_{j-1} A_{i,j-1} + A_{ij} + \mu_j A_{i,j+1}) x_i = 0, \\ \mu_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_j}, \quad \lambda_0 = 1, \quad k = 1, \ldots, j-1; \quad \mu_j = \lambda_j. \end{gathered}$$

Дополним (5) системой из одного уравнения, действующего в пространстве H^2_{j+1}, а именно:

$$(6)\qquad (T_0 + \mu_0 T_1 + \mu_j T_2) x_{j+1} = 0, \quad x_{j+1} \in H^2_{j+1},$$

где операторы T_0, T_1, T_2 *являются самосопряженными.*

Выражения (5) и (6) вместе составляют систему из $j+1$ уравнений с $j+1$ параметрами. $j+1$ уравнение системы означает, что $\mu_0 \mu_j = 1$.

Ассоциированные с системой (5) и (6) операторы Δ_i, определенные в тензорном произведении $\widetilde{H}$ на разложимых тензорах из $\widetilde{H}$, задаются с помощью равенства

$$\sum_0^j \alpha_i \Delta_i x = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{j-1} & \alpha_j \\ A_{1j}x_1 & A_{10}x_1 & \ldots & A_{1,j-1}x_1 & A_{1,j+1}x_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{jj}x_j & A_{j0}x_j & \ldots & A_{j,j-1}x_j & A_{j,j+1}x_j \\ T_0 x_{j+1} & T_1 x_{j+1} & \ldots & 0 & T_2 x_{j+1} \end{vmatrix},$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_j$ – произвольные комплексные числа. На всех разложимых ненулевых элементах пространства $\widetilde{H}$, учитывая также то, что

$$(T_1 x_{j+1}, x_{j+1}) = \left(\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_{j+1} \\ x''_{j+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_{j+1} \\ x''_{j+1} \end{pmatrix}\right) = (x'_{j+1}, x'_{j+1}) = \alpha \geqslant 0,$$

$$(T_2 x_{j+1}, x_{j+1}) = (x''_{j+1}, x''_{j+1}) = \beta \geqslant 0,$$

имеем $(\Delta_0 x, x) > 0$.

Тогда для собственного значения $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_j)$ системы (5), (6) с собственным элементом $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_j \otimes x_{j+1}$ имеем

$$\begin{aligned}
\Delta_1 x &= \mu_0 \Delta_0 x,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_{j-1} x &= \mu_{j-2} \Delta_0 x,\\
\Delta_j x &= \mu_{j-1} \Delta_0 x
\end{aligned}$$

и, учитывая, что

$$\mu_j = \lambda_j, \quad \mu_0 = \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\lambda_j}, \quad \mu_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_j},$$

получаем

$$\begin{aligned}
\Delta_0 x &= \lambda_j \Delta_1 x,\\
\Delta_2 x &= \mu_1 \lambda_j \Delta_1 x = \lambda_1 \Delta_1 x,\\
\Delta_3 x &= \lambda_2 \Delta_1 x,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_j x &= \lambda_{j-1} \Delta_1 x,\\
\Delta_{j+1} x &= \lambda_j^2 \Delta_1 x,
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 x = \otimes \begin{vmatrix} A_{1j} x_1 & A_{11} x_1 \ldots A_{1,j-1} x_1 & A_{1,j+1} x_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_{jj} x_j & A_{j1} x_j \ \ldots A_{j,j-1} x_j & A_{j,j+1} x_j \\ T_0 x_{j+1} & 0 \quad \ldots 0 & T_2 x_{j+1} \end{vmatrix}, \quad x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_{j+1}.$$

Таким образом, разделяющая система операторов для (1) построена.

Обозначим $E_i(\lambda)$ разложение единицы оператора $\Gamma_i = \Delta_0^{-1} \Delta_i$, а $E(\lambda)$ – разложение единицы системы (1) и определим

$$E(\lambda) = E_1\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\right) \cdot E_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_j}\right) \ldots E_{j+1}(\lambda_j).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* (1). *Тогда для любого элемента* $f \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_{j+1}^2$ *имеем*

$$(\Delta_0 f, f) = \int_\sigma [E(d\mu) f, f) = \int_\sigma (E(d\mu) f, \Delta_0 f), \quad f = \int_\sigma E(d\mu) f,$$

где интеграл сходится по норме в H, σ – *носитель функции* $E(\lambda)$.

З а м е ч а н и е. Пусть операторы A_{i0} вполне непрерывны. Тогда из (1) имеем, что спектр системы (5) и (6) дискретен, т.е. состоит только из собственных значений. Ясно, что если $f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 \otimes \ldots \otimes f_{j+1}$ – собственный элемент (5) и (6), то $f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_j$ является собственным элементом (1). Полагая, что $H_{j+1} = R$, получаем полноту системы собственных элементов системы (1).

Институт кибернетики и
Институт математики и механики
Академии наук АзССР
Баку

Поступило
18 XI 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Browne P.J.* – Ind. Univ. Math. J., 1964, vol. 24, № 3, p. 249–257. 2. *Roach G.F.* – Nieuw. Arch. wiskinde, 1976, vol. 24, № 3.