Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Е. П. Шустова, О взаимосвязи геометрий касательного расслоения третьего порядка и суммы Уитни,
Тр. геом. сем., 1997, том 23, 211–221

https://www.mathnet.ru/kutgs19

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
9 декабря 2025 г., 14:17:54

Е. П. ШУСТОВА

О ВЗАИМОСВЯЗИ ГЕОМЕТРИЙ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА И СУММЫ УИТНИ[1]

Аннотация

Аффинная связность, заданная на n-мерном дифференцируемом многообразии M_n, позволяет определить диффеоморфизм касательного расслоения третьего порядка T^3M_n в сумму Уитни $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ трех экземпляров касательных расслоений. Это отображение порождает диффеоморфное отображение дифференциально геометрических объектов из T^3M_n в сумму Уитни $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$. Для произвольной базы найден тензор аффинной деформации связностей полного лифта в T^3M_n и в $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$. Показано, что в случае баз без кручения этот тензор аффинной деформации выражается через тензор кривизны связности, заданной на базе, и его ковариантные производные. Доказано, что при указанном диффеоморфизме связность полного лифта в T^3M_n переходит в связность полного лифта в $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ тогда и только тогда, когда база плоская. Приведен вид основных тензоров, возникающих в касательном расслоении третьего порядка и в сумме Уитни трех экземпляров касательных расслоений.

Abstract

E.P. Shustova **Connection between geometries of third order tangent bundle and Whitney sum**

An affine connection on an n-dimensional differentiable manifold M_n gives rise to a diffeomorhism σ of the third order tangent bundle T^3M_n into the Whitney sum $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$. This diffeomorphism carries differential geometric objects from T^3M_n to $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$. For an arbitrary base M we find the tensor of affine deformation between

[1] Работа выполнена при поддержке гранта №96-15-96276 Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ.

complete lifts of connections into T^3M_n and into $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$. In case the connection on the base is torsion-free we demonstrate that this tensor can be expressed in terms of the curvature tensor of the connection given on the base and covariant derivatives of this tensor. Moreover, σ carries the connection of complete lift on T^3M_n into the connection of complete lift in $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ if and only if the base is flat.

§1. Геометрические объекты в касательном расслоении третьего порядка.

Под касательным расслоением [1] третьего порядка T^3M_n пространства аффинной связности M_n будем понимать множество 3-струй гладких отображений $\gamma : R \longrightarrow M_n$, где R это вещественная прямая. Пусть отображение γ, 3-струя $j_0^3\gamma$ которого служит элементом расслоения T^3M_n, задано в локальных координатах формулами $x^i = x^i(t)$, причем при $t = 0$ получается рассматриваемая точка $x \in M_n$. Тогда указанная 3-струя отображения γ определяется точкой x и значениями первых трех производных от функции $x^i(t)$ по t при $t = 0$. Пусть $(x^i; x^{n+i}; x^{2n+i}; x^{3n+i})$ локальная система координат в T^3M_n, где $x^{n+i} = \dot{x}^i$, $x^{2n+i} = \ddot{x}^i$, $x^{3n+i} = \dddot{x}^i$. Через $\dot{x}^i$ обозначена производная dx^i/dt. $\mathrm{Dim}\, T^3M_n = 4n$.

Касательное расслоение третьего порядка можно рассматривать как пространство над алгеброй [2] плюральных чисел порядка 3 ($R(\epsilon)$, $\epsilon^4 = 0$). В T^3M_n возникают полный $\overset{c(3)}{v}$, полувертикальные (F — структурный аффинор в T^3M_n) $\overset{c1(3)}{v} = F\overset{c(3)}{v}$, $\overset{c2(3)}{v} = F\overset{c1(3)}{v}$ и вертикальный $\overset{v(3)}{v} = F\overset{c2(3)}{v}$ лифты векторного поля v, полный $\overset{c(3)}{w}$, полувертикальные $\overset{c1(3)}{w} = F\overset{c(3)}{w}$, $\overset{c2(3)}{w} = F\overset{c1(3)}{w}$ и вертикальный $\overset{v(3)}{w} = F\overset{c2(3)}{w}$ лифты ковекторного поля $w = w_i dx^i$, полный $\overset{c(3)}{g}$, полувертикальные $\overset{c1(3)}{g}_{\alpha\beta} = F\overset{c(3)}{g}_{\alpha\beta}$, $\overset{c2(3)}{g}_{\alpha\beta} = F\overset{c1(3)}{g}_{\alpha\beta}$ и вертикальный $\overset{v(3)}{g}_{\alpha\beta} = F\overset{c2(3)}{g}_{\alpha\beta}$ лифты тензорного поля g_{ij}, заданного на базе M_n, полный $\overset{c(3)}{F}$, полувертикальные $\overset{c1(3)}{F}{}^{\alpha}{}_{\beta} = F\overset{c(3)}{F}{}^{\alpha}{}_{\beta}$, $\overset{c2(3)}{F}{}^{\alpha}{}_{\beta} = F\overset{c1(3)}{F}{}^{\alpha}{}_{\beta}$ и вертикальный $\overset{v(3)}{F}{}^{\alpha}{}_{\beta} = F\overset{c2(3)}{F}{}^{\alpha}{}_{\beta}$ лифты аффинора F^i_j, заданного на базе M_n, $\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{i}_{jk}$ — полный лифт в T^3M_n связности Γ^i_{jk}, заданной на базе M_n.

В голономном поле реперов $\partial/\partial x^i$ указанные основные объекты имеют вид:

$$\overset{c(3)}{v}(v^i; x^{n+p}\partial_p v^i; x^{2n+p}\partial_p v^i + \frac{1}{2}x^{n+p}x^{n+q}\partial_{pq}v^i;$$
$$x^{3n+p}\partial_p v^i + x^{2n+p}x^{n+q}\partial_{pq}v^i + \frac{1}{3!}x^{n+p}x^{n+q}x^{n+r}\partial_{pqr}v^i),$$

$$\overset{c(3)}{w}(x^{3n+p}\partial_p w_i + x^{2n+p}x^{n+q}\partial_{pq}w_i + \frac{1}{3!}x^{n+p}x^{n+q}x^{n+r}\partial_{pqr}w_i;$$
$$x^{2n+p}\partial_p w_i + \frac{1}{2}x^{n+p}x^{n+q}\partial_{pq}w_i; \quad x^{n+p}\partial_p w_i; w_i),$$

$$\overset{c(3)}{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g3_{ij} & g2_{ij} & x^{n+p}\partial_p g_{ij} & g_{ij} \\ g2_{ij} & x^{n+p}\partial_p g_{ij} & g_{ij} & 0 \\ x^{n+p}\partial_p g_{ij} & g_{ij} & 0 & 0 \\ g_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$g3_{ij} = x^{3n+p}\partial_p g_{ij} + x^{2n+p}x^{n+q}\partial_{pq}g_{ij} + \frac{1}{3!}x^{n+p}x^{n+q}x^{n+r}\partial_{pqr}g_{ij},$$
$$g2_{ij} = x^{2n+p}\partial_p g_{ij} + \frac{1}{2}x^{n+p}x^{n+q}\partial_{pq}g_{ij},$$

первый нижний индекс α означает номер строки и i — номер строки в каждом из блоков, на которые разбита вся матрица $\overset{c(3)}{g}_{\alpha\beta}$,

$$\overset{c(3)}{f}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{pmatrix} f^i_j & 0 & 0 & 0 \\ x^{n+p}\partial_p f^i_j & f^i_j & 0 & 0 \\ f2^i_j & x^{n+p}\partial_p f^i_j & f^i_j & 0 \\ f3^i_j & f2^i_j & x^{n+p}\partial_p f^i_j & f^i_j \end{pmatrix},$$

где

$$f3^i_j = x^{3n+p}\partial_p f^i_j + x^{2n+p}x^{n+q}\partial_{pq}f^i_j + \frac{1}{3!}x^{n+p}x^{n+q}x^{n+r}\partial_{pqr}f^i_j,$$
$$f2^i_j = x^{2n+p}\partial_p f^i_j + \frac{1}{2}x^{n+p}x^{n+q}\partial_{pq}f^i_j$$

индекс α означает номер строки и i — номер строки в каждом из блоков, на которые разбита вся матрица $\overset{c(3)}{f}{}^{\alpha}{}_{\beta}$.

Из условия $\overset{c(3)}{\nabla}_{\overset{c(3)}{v}} \overset{c(3)}{u} = (\nabla_v u)^{c(3)}$, где $v = v^i\partial/\partial x^i$, $u = u^i\partial/\partial x^i$ — произвольные векторные поля на M_n и $\nabla_v u = v^s \nabla_s u$, находятся компоненты полного лифта $\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ связности Γ^i_{jk} в рассматриваемое

касательное расслоение третьего порядка. В голономном поле реперов $\partial/\partial x^\alpha$ эти компоненты имеют вид:

$$\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{i}_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma^i_{jk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где β — номер строки,

$$\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{n+i}_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} x^{n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} & \Gamma^i_{jk} & 0 & 0 \\ \Gamma^i_{jk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{2n+i}_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma 2^i_{jk} & x^{n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} & \Gamma^i_{jk} & 0 \\ x^{n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} & \Gamma^i_{jk} & 0 & 0 \\ \Gamma^i_{jk} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{3n+i}_{\beta\gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma 3^i_{jk} & \Gamma 2^i_{jk} & x^{n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} & \Gamma^i_{jk} \\ \Gamma 2^i_{jk} & x^{n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} & \Gamma^i_{jk} & 0 \\ x^{n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} & \Gamma^i_{jk} & 0 & 0 \\ \Gamma^i_{jk} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\Gamma 3^i_{jk} = x^{3n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} + x^{2n+p}x^{n+q}\partial_{pq}\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{3!}x^{n+p}x^{n+q}x^{n+r}\partial_{pqr}\Gamma^i_{jk},$$
$$\Gamma 2^i_{jk} = x^{2n+p}\partial_p\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}x^{n+p}x^{n+q}\partial_{pq}\Gamma^i_{jk},$$

индекс β означает номер строки и j — номер строки в каждом из блоков, на которые разбита вся матрица $\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ для каждого фиксированного $\alpha = \overline{1,4n}$, $(i = \overline{1,n})$.

В расслоении T^3M_n возникает также полный лифт $\overset{c(3)}{R}{}_{\beta\gamma\tau}{}^{\alpha}$ (антисимметрия по первым двум индексам) тензора кривизны $R_{jkl}{}^{i}$ связности Γ^i_{jk}, заданной на базе M_n. Компоненты $\overset{c(3)}{R}{}_{\beta\gamma\tau}{}^{\alpha}$ в голономном

поле реперов $(\partial/\partial x^\alpha)_{\alpha=\overline{1,4n}}$ имеют вид:

$$\overset{c(3)}{R}{}_{jk\lambda}{}^{\alpha} = \begin{pmatrix} R_{jkl}{}^{i} & 0 & 0 & 0 \\ x^{n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} & R_{jkl}{}^{i} & 0 & 0 \\ R2_{jkl}{}^{i} & x^{n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} & R_{jkl}{}^{i} & 0 \\ R3_{jkl}{}^{i} & R2_{jkl}{}^{i} & x^{n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} & R_{jkl}{}^{i} \end{pmatrix},$$

где

$$R3_{jkl}{}^{i} = x^{3n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} + x^{2n+p}x^{n+q}\partial_{pq} R_{jkl}{}^{i} + \frac{1}{3!}x^{n+p}x^{n+q}x^{n+r}\partial_{pqr} R_{jkl}{}^{i},$$

$$R2_{jkl}{}^{i} = x^{2n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} + \frac{1}{2}x^{n+p}x^{n+q}\partial_{pq} R_{jkl}{}^{i},$$

индекс α означает номер строки и i — номер строки в каждом из блоков, на которые разбита вся матрица $\overset{c(3)}{R}{}_{jk\lambda}{}^{\alpha}$ для каждых фиксированных $j, k = \overline{1,n}$.

$$\overset{c(3)}{R}{}_{j\ n+k\ \lambda}{}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{jkl}{}^{i} & 0 & 0 & 0 \\ x^{n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} & R_{jkl}{}^{i} & 0 & 0 \\ R2_{jkl}{}^{i} & x^{n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} & R_{jkl}{}^{i} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{c(3)}{R}{}_{j\ 2n+k\ \lambda}{}^{\alpha} = \overset{c(3)}{R}{}_{n+j\ n+k\ \lambda}{}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{jkl}{}^{i} & 0 & 0 & 0 \\ x^{n+p}\partial_p R_{jkl}{}^{i} & R_{jkl}{}^{i} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{c(3)}{R}{}_{j\ 3n+k\ \lambda}{}^{\alpha} = \overset{c(3)}{R}{}_{n+j\ 2n+k\ \lambda}{}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{jkl}{}^{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{c(3)}{R}{}_{\beta\gamma\lambda}{}^{\alpha} = -\overset{c(3)}{R}{}_{\gamma\beta\lambda}{}^{\alpha},$$

остальные $\overset{c(3)}{R}{}_{\beta\gamma\lambda}{}^{\alpha} = 0$.

Заметим, что $\overset{c(3)}{R}{}_{\beta\gamma\tau}{}^{\alpha}$ совпадает с тензором кривизны связности $\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Причем скалярная кривизна касательного расслоения третьего порядка T^3M_n со связностью $\overset{c(3)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ равна нулю, где M_n — риманово пространство с метрическим тензором g_{ij}.

Заметим также, что как и в случае касательного расслоения первого порядка, очевидно, не существует таких баз M_n (римановых

пространств), для которых касательное расслоение третьего порядка являлось бы пространством ненулевой постоянной кривизны с метрическим тензором $\overset{c(3)}{g}_{\alpha\beta}$. Расслоение T^3M_n с метрическим тензором $\overset{c(3)}{g}_{\alpha\beta}$ является пространством нулевой постоянной кривизны тогда и только тогда, когда база M_n плоская.

§2. Геометрические объекты в сумме Уитни трех экземпляров касательных расслоений.

Сумма [3] Уитни $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ трех экземпляров касательных расслоений TM_n есть множество троек векторов, касательных к M_n в некоторой точке $y \in M_n$,, т.е.

$$TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n = \{(V_1, V_2, V_3) \in TM_n \times TM_n \times TM_n \mid \\ \pi(V_1) = \pi(V_2) = \pi(V_3)\},$$

где $V_p = y^{pn+j}\partial/\partial y^j$, $(p = 1, 2, 3)$, это три вектора, касательных к M_n в точке $y \in M_n$. Тогда указанная тройка векторов в точке $y(y^i) \in M_n$ определяется точкой $y(y^i)$ и значениями координат y^{pn+i} p-того вектора в этой точке. Пусть $(y^i; y^{n+i}; y^{2n+i}; y^{3n+i})$ — локальная система координат с сумме Уитни. $\mathrm{Dim}\,(TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n) = 4n$.

Известно, что в сумме Уитни $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ может быть введена алгебра $R(e_1, e_2, e_3)$ ($e_i e_j = 0$ $\forall i, j = 1, 2, 3$ $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$ — три структурных аффинора, отвечающих базисным единицам e_1, e_2, e_3 соответственно) [1].

Будем предполагать, что на базе M_n задана аффинная связность Γ^i_{jk}. В $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ можно рассматривать горизонтальный $\overset{H}{v}$, полный $\overset{cy}{v}$ и вертикальные $\overset{cy1}{v}$, $\overset{cy2}{v}$, $\overset{y3}{v}$ лифты векторного поля v, лифты $\overset{cy3}{w}$, $\overset{cy2}{w}$, $\overset{cy1}{w}$, $\overset{cy0}{w}$, $\overset{cy3}{g}$, $\overset{cy2}{g}$, $\overset{cy1}{g}$, $\overset{cy0}{g}$, $\overset{cy3}{f}$, $\overset{cy2}{f}$, $\overset{cy1}{f}$, $\overset{cy0}{f}$, ковекторного $w = w_i dy^i$, и тензорных полей g_{ij}, f^i_j, заданных на базе M_n, соответственно, $\overset{cy}{\Gamma}{}^i_{jk}$ — полный лифт в $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ связности Γ^i_{jk}, заданной на базе M_n.

В голономном поле реперов $\partial/\partial y^\alpha$ эти объекты имеют вид:

$$\overset{cy}{v}(v^i; y^{n+p}\partial_p v^i; y^{2n+p}\partial_p v^i; y^{3n+p}\partial_p v^i),$$

$$\overset{cy1}{v} = \overset{1}{F}\overset{cy}{v} = (0; v^i; 0; 0),\ \overset{cy2}{v} = \overset{2}{F}\overset{cy}{v} = (0; 0; v^i; 0),\ \overset{cy3}{v} = \overset{3}{F}\overset{cy}{v} = (0; 0; 0; v^i),$$

где

$$\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \overset{2}{F}{}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \overset{3}{F}{}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

E — единичная матрица размерности n на n , индекс α — номер строки.

$$\overset{H}{v}(v^i; -\Gamma^i_{pq} y^{n+p} v^q; -\Gamma^i_{pq} y^{2n+p} v^q; -\Gamma^i_{pq} y^{3n+p} v^q),$$

$$\overset{cy3}{w}(y^{3n+p}\partial_p w_i;\ 0;\ 0;\ w_i),$$

$$\overset{cy2}{w}(y^{2n+p}\partial_p w_i;\ 0;\ w_i;\ 0),$$

$$\overset{cy1}{w}(y^{n+p}\partial_p w_i;\ w_i;\ 0;\ 0),$$

$$\overset{cy0}{w} = (w_i;\ 0;\ 0;\ 0),$$

$$\overset{cy3}{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} y^{3n+p}\partial_p g_{ij} & 0 & 0 & g_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{cy2}{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} y^{2n+p}\partial_p g_{ij} & 0 & g_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{cy1}{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} y^{n+p}\partial_p g_{ij} & g_{ij} & 0 & 0 \\ g_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{cy0}{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{cy3}{f}{}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} f^i_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^{3n+p}\partial_p f^i_j & 0 & 0 & f^i_j \end{pmatrix}, \quad \overset{cy2}{f}{}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ f^i_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ y^{2n+p}\partial_p f^i_j & 0 & f^i_j & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overset{cy1}{f}{}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f^i_j & 0 & 0 & 0 \\ y^{n+p}\partial_p f^i_j & f^i_j & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overset{cy0}{f}{}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ f^i_j & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из условия $\overset{cy}{\nabla}_{\overset{cy}{v}} \overset{cy}{u} = (\nabla_v u)^{cy}$ для произвольных векторных полей $v = v^i\partial/\partial y^i$, $u = u^i\partial/\partial y^i$ находятся компоненты полного лифта $\overset{cy}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ связности Γ^i_{jk} в рассматриваемую сумму Уитни. В голономном поле

реперов $\partial/\partial y^\alpha$ ненулевые компоненты полного лифта $\overset{cy}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\overset{cy}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = \Gamma^i_{jk},\\
&\overset{cy}{\Gamma}{}^{pn+i}_{jk} = y^{pn+s}\partial_s\Gamma^i_{jk},\\
&\overset{cy}{\Gamma}{}^{pn+i}_{ln+jk} = \overset{cy}{\Gamma}{}^{pn+i}_{jln+k} = \delta^p_l\Gamma^i_{jk}, \quad (p=1,2,3).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Вычислив в голономном поле реперов $\partial/\partial y^\alpha$ компоненты

$$\overset{cy}{R}{}_{\beta\gamma\rho}{}^{\alpha} = \partial_\beta \overset{cy}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\rho\gamma} - \partial_\gamma \overset{cy}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\rho\beta} + \overset{cy}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\beta}\overset{cy}{\Gamma}{}^{\mu}_{\rho\gamma} - \overset{cy}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\mu\gamma}\overset{cy}{\Gamma}{}^{\mu}_{\rho\beta}$$

тензора кривизны связности $\overset{cy}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\overset{cy}{R}{}_{jkr}{}^{i} = \overset{cy}{R}{}_{j\ k\ qn+r}{}^{qn+i} = \overset{cy}{R}{}_{j\ qn+k\ r}{}^{qn+i} = R_{jkr}{}^{i},\\
&\overset{cy}{R}{}_{jkr}{}^{qn+i} = y^{qn+s}\partial_s R_{jkr}{}^{i}, \quad (q=1,2,3)
\end{aligned}$$

остальные $\overset{cy}{R}{}_{\beta\gamma\rho}{}^{\alpha} = 0$.

§3. О взаимосвязи связностей полных лифтов в сумму Уитни и в касательное расслоение третьего порядка.

Аффинная связность Γ^i_{jk}, заданная на базе M_n, позволяет определить диффеоморфизм $\sigma : T^3M_n \longrightarrow TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ по формуле $\sigma(j^3_0\gamma) = (y^i\,|_{t=0};\quad \dot y^i\,|_{t=0};\quad \delta\dot y^i\,|_{t=0};\quad \delta^2\dot y^i\,|_{t=0})$, то есть 3-струе $j^3_0\gamma \in T^3M_n$ ставится в соответствие при $t=0$ в рассматриваемой точке $y \in M_n$ три вектора $\dot y^i, \delta\dot y^i, \delta^2\dot y^i$ касательных к M_n в рассматриваемой точке $y \in M_n$.

В T^3M_n рассматривалась следующая локальная система координат: $(x^i; x^{n+i}; x^{2n+i}; x^{3n+i})$. При отображении σ возникают соотношения:

$$\begin{aligned}
&y^i = x^i, \quad y^{n+i} = x^{n+i}, \quad y^{2n+i} = 2x^{2n+i} + \Gamma^i_{sm}x^{n+s}x^{n+m},\\
&y^{3n+i} = 6x^{3n+i} + 6\Gamma^i_{pq}x^{2n+p}x^{n+q} + x^{n+p}x^{n+q}x^{n+r}(\partial_r\Gamma^i_{pq} + \Gamma^i_{sr}\Gamma^s_{pq}).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
P^i_{jkpq} = &-\partial_l\Gamma^i_{jk}\Gamma^l_{pq} + \partial_s\Gamma^i_{pq}\Gamma^s_{jk} + \Gamma^i_{ps}\partial_q\Gamma^s_{jk} + \Gamma^i_{sq}\partial_p\Gamma^s_{jk} +\\
&+ \partial_{pq}\Gamma^i_{jk} - \partial_k\Gamma^m_{pq}\Gamma^i_{jm} - \partial_j\Gamma^m_{pq}\Gamma^i_{mk} - \partial_{jk}\Gamma^i_{pq},\\
Q_{jpq}{}^{i} = &2\partial_j\Gamma^i_{qp} - \partial_p(\Gamma^i_{qj} + \Gamma^i_{jq}) + 2\Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{qp} - \Gamma^i_{mp}(\Gamma^m_{qj} + \Gamma^m_{jq}).
\end{aligned}$$

Непосредственными вычислениями доказывается следующая

Лемма 3.1. Для произвольной базы M_n в голономном поле реперов $\partial/\partial y^\alpha$ ненулевые компоненты тензора аффинной деформации $T^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{cy}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} - \overset{c(3)}{\tilde{\Gamma}}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&T^{2n+i}_{jk} = y^{n+p}y^{n+q}P^i_{jkpq}\,,\\
&T^{2n+i}_{j\ n+k} = y^{n+p}[\partial_j(\Gamma^i_{pk}+\Gamma^i_{kp}) + \Gamma^i_{jm}(\Gamma^m_{kp}+\Gamma^m_{pk}) - (\Gamma^i_{mp}+\Gamma^i_{pm})\Gamma^m_{jk} - 2\partial_p\Gamma^i_{jk}],\\
&T^{2n+i}_{n+j\ k} = y^{n+p}[\partial_k(\Gamma^i_{pj}+\Gamma^i_{jp}) + \Gamma^i_{mk}(\Gamma^m_{jp}+\Gamma^m_{pj}) - (\Gamma^i_{mp}+\Gamma^i_{pm})\Gamma^m_{jk} - 2\partial_p\Gamma^i_{jk}],\\
&T^{2n+i}_{n+j\ n+k} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk},\\
&T^{3n+i}_{j\ k} = 3y^{2n+p}y^{n+q}P^i_{jkpq} + y^{n+p}y^{n+q}y^{n+r}\{\partial_r P^i_{jkpq} + \Gamma^i_{mr}P^m_{jkpq} -\\
&\quad - 2\Gamma^m_{pq}P^i_{jkmr} - (\Gamma^i_{mr}-\Gamma^i_{rm})\,\partial_{pq}\Gamma^m_{jk} - 2\,\partial_j\Gamma^m_{pq}\,R_{krm}{}^i - 2\,\partial_k\Gamma^m_{pq}\,R_{jrm}{}^i -\\
&\qquad - 2\partial_k\Gamma^m_{pq}[\partial_r(\Gamma^i_{mj}-\Gamma^i_{jm}) + \Gamma^s_{mr}(\Gamma^i_{js}-\Gamma^i_{sj}) + \Gamma^i_{sr}(\Gamma^s_{mj}-\Gamma^s_{jm})]\},\\
&T^{3n+i}_{j\ n+k} = 3y^{2n+p}[\partial_j\Gamma^i_{pk} - \partial_p\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{pk} - \Gamma^i_{pm}\Gamma^m_{jk}] +\\
&\qquad + y^{n+p}y^{n+q}\{3P^i_{jkpq} + \Gamma^m_{jk}Q_{mpq}{}^i - \Gamma^i_{jm}Q_{kpq}{}^m - \partial_j Q_{kpq}{}^i -\\
&\quad - 3(\Gamma^m_{pk}+\Gamma^m_{kp})[\partial_j\Gamma^i_{mq} - \partial_q\Gamma^i_{jm} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{mq} - \Gamma^i_{sq}\Gamma^s_{jm}] - 3\partial_q\Gamma^s_{jk}(\Gamma^i_{sp}-\Gamma^i_{ps})\},\\
&T^{3n+i}_{n+j\ k} = 3y^{2n+p}[\partial_k\Gamma^i_{pj} - \partial_p\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{pj} - \Gamma^i_{pm}\Gamma^m_{jk}] +\\
&\qquad + y^{n+p}y^{n+q}\{3P^i_{jkpq} + \Gamma^m_{jk}Q_{mpq}{}^i - \Gamma^i_{mk}Q_{jpq}{}^m - \partial_k Q_{jpq}{}^i -\\
&\qquad\qquad - 3(\Gamma^m_{qj}+\Gamma^m_{jq})R_{kpm}{}^i - 3\partial_q\Gamma^s_{jk}(\Gamma^i_{sp}-\Gamma^i_{ps})\},\\
&T^{3n+i}_{j\ 2n+k} = 3y^{n+p}[\partial_j\Gamma^i_{kp} - \partial_p\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{kp} - \Gamma^i_{mp}\Gamma^m_{jk}],\\
&T^{3n+i}_{2n+j\ k} = -3y^{n+p}R_{pkj}i,\\
&T^{3n+i}_{n+j\ n+k} = y^{n+p}[\partial_k(\Gamma^i_{pj}+\Gamma^i_{jp}) + \partial_j(\Gamma^i_{pk}+\Gamma^i_{kp}) + \partial_p\Gamma^i_{kj} - 5\partial_p\Gamma^i_{jk} +\\
&\qquad + \Gamma^i_{mk}(\Gamma^m_{pj}+\Gamma^m_{jp}) + \Gamma^i_{sp}(\Gamma^s_{kj}-5\Gamma^s_{jk}) + (3\Gamma^i_{jm}-2\Gamma^i_{mj})(\Gamma^m_{pk}+\Gamma^m_{kp})],\\
&T^{3n+i}_{n+j\ 2n+k} = 3(\Gamma^i_{kj}-\Gamma^i_{jk}).
\end{aligned}
$$

Здесь $\overset{c(3)}{\tilde{\Gamma}}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ это компоненты связности $\overset{c(3)}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ в локальных координатах $\partial/\partial y^\alpha$.

Из леммы 3.1 имеем следующее

Следствие 3.1. Для того, чтобы тензор аффинной деформации $T^\alpha_{\beta\gamma}$ был равен нулю необходимо, чтобы тензор кручения связности Γ^i_{jk} был нулевой.

Замечание 3.1. Если $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, то P^i_{jkpq} имеет вид:

$$P^i_{jkpq} = (\nabla_j R_{kpq}{}^i - \nabla_p R_{qjk}{}^i) - \Gamma^m_{pj} R_{qkm}{}^i - \Gamma^m_{qj} R_{pkm}{}^i + \Gamma^m_{pk} R_{jqm}{}^i + \Gamma^m_{qk} R_{jpm}{}^i.$$

Предложение 3.1. Если тензор кручения связности Γ^i_{jk} нулевой, то тензор аффинной деформации $T^\alpha_{\beta\gamma} = \overset{cy}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} - \overset{c(3)}{\tilde{\Gamma}}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ выражается через тензор кривизны $R_{jkl}{}^i$ связности Γ^i_{jk}, заданной на базе M_n, и в голономном поле реперов $\partial/\partial y^\alpha$ ненулевые компоненты его имеют вид:

$$T^{2n+i}_{jk} = y^{n+p} y^{n+q} \{\nabla_j R_{kpq}{}^i - \nabla_p R_{qjk}{}^i + 2\Gamma^m_{pk} R_{jqm}{}^i + 2\Gamma^m_{qj} R_{kpm}{}^i\},$$

$$T^{2n+i}_{j\ n+k} = T^{2n+i}_{n+k\ j} = -2y^{n+p} R_{pjk}{}^i,$$

$$\begin{aligned} T^{3n+i}_{j\ k} = {} & 3y^{2n+p} y^{n+q} P^i_{jkpq} + y^{n+p} y^{n+q} y^{n+r} \{\nabla_r (\nabla_j R_{kpq}{}^i - \nabla_p R_{qjk}{}^i) + \\ & + \Gamma^m_{jr} [\nabla_k R_{mpq}{}^i - 3 \nabla_p R_{qkm}{}^i] + \Gamma^m_{kr} [\nabla_j R_{mpq}{}^i - 3 \nabla_p R_{qjm}{}^i] + \\ & + 2R_{sqm}{}^i [\Gamma^s_{jr} \Gamma^m_{pk} + \Gamma^s_{kr} \Gamma^m_{pj}] + 2R_{rkm}{}^i R_{jpq}{}^m + 2R_{rjm}{}^i R_{kpq}{}^m \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{3n+i}_{j\ n+k} = T^{3n+i}_{n+k\ j} = {} & -3y^{2n+p} R_{pjk}{}^i + y^{n+p} y^{n+q} \{\nabla_j R_{kpq}{}^i - 3 \nabla_p R_{qjk}{}^i - \\ & - 2\Gamma^m_{qj} (R_{pkm}{}^i + R_{pmk}{}^i)\}, \end{aligned}$$

$$T^{3n+i}_{j\ 2n+k} = T^{3n+i}_{2n+k\ j} = -3y^{n+p} R_{pjk}{}^i,$$

$$T^{3n+i}_{n+j\ n+k} = -2y^{n+p} [R_{pjk}{}^i + R_{pkj}{}^i].$$

Доказательство. При доказательстве этого предложения надо воспользоваться леммой 3.1, замечанием 3.1, тождеством Бианки-Падова и тем, что в случае связности без кручения сумма компонент тензора кривизны, полученных при циклической перестановке нижних индексов, равна нулю.

Проведем вычисления, например, для компоненты T^{3n+i}_{jk}. Применив лемму 3.1 и использовав замечание 3.1, получим:

$$\begin{aligned} & T^{3n+i}_{j\ k} = 3y^{2n+p} y^{n+q} P^i_{jkpq} + \\ & + y^{n+p} y^{n+q} y^{n+r} \{\partial_r (\nabla_j R_{kpq}{}^i - \nabla_p R_{qjk}{}^i) + 2\partial_r [\Gamma^m_{pk} R_{jqm}{}^i - \Gamma^m_{pj} R_{qkm}{}^i] + \\ & \quad + \Gamma^i_{sr} [\nabla_j R_{kpq}{}^s - \nabla_p R_{qjk}{}^s + 2\Gamma^m_{pk} R_{jqm}{}^s - 2\Gamma^m_{qj} R_{pkm}{}^s] - \\ & \quad - 2\Gamma^m_{pq} [\nabla_j R_{kmr}{}^i - \nabla_m R_{rjk}{}^i + \Gamma^s_{mk} R_{jrs}{}^i + \Gamma^s_{rk} R_{jms}{}^i - \\ & \qquad - \Gamma^s_{mj} R_{rks}{}^i - \Gamma^s_{rj} R_{mks}{}^i] - 2\partial_j \Gamma^m_{pq} R_{krm}{}^i - 2\partial_k \Gamma^m_{pq} R_{jrm}{}^i\}. \end{aligned}$$

Собрав члены при $\Gamma^m_{pk}, \Gamma^m_{pj}, R_{krm}{}^i, R_{jrm}{}^i$ и затем выделив в получившемся выражении $\nabla_r (\nabla_j R_{kpq}{}^i - \nabla_p R_{qjk}{}^i)$, $\nabla_r R_{jqm}{}^i$, $\nabla_r R_{qkm}{}^i$, $R_{jpq}{}^m$,

$R_{kpq}{}^{m}$, приведя подобные, получим:

$$T_{j\ k}^{3n+i} = 3y^{2n+p}y^{n+q}P^{i}_{jkpq} + y^{n+p}y^{n+q}y^{n+r}\{\nabla_r(\nabla_j R_{kpq}{}^{i} - \nabla_p R_{qjk}{}^{i}) +$$

$$+\Gamma^{m}_{jr}[\nabla_m R_{kpq}{}^{i} - \nabla_p R_{qmk}{}^{i} + 2\nabla_p R_{kqm}{}^{i}] +$$
$$+\Gamma^{m}_{kr}[\nabla_j R_{mpq}{}^{i} + \nabla_p R_{jqm}{}^{i} + 2\nabla_p R_{jqm}{}^{i}] +$$
$$+\Gamma^{m}_{pq}[-\nabla_j R_{kmr}{}^{i} + \nabla_m R_{rjk}{}^{i} + \nabla_j R_{krm}{}^{i} + \nabla_r R_{jmk}{}^{i}] +$$
$$+2R_{sqm}{}^{i}[\Gamma^{s}_{jr}\Gamma^{m}_{pk} + \Gamma^{s}_{kr}\Gamma^{m}_{pj}] + +2R_{rkm}{}^{i}R_{jpq}{}^{m} + 2R_{rjm}{}^{i}R_{kpq}{}^{m}\}$$

Воспользовавшись тождеством Бианки-Падова и тем, что в случае связности без кручения сумма компонент тензора кривизны, полученных при циклической перестановке нижних индексов, равна нулю, приходим к выражению для этой компоненты, указанной в этом предложении.

Заметим, что при отображении, порожденном диффеоморфизмом σ, тензор Риччи связности полного лифта в касательное расслоение третьего порядка переходит в тензор Риччи связности полного лифта в сумму Уитни трех экземпляров касательных расслоений.

Из следствия 3.1 и предложения 3.1 сразу видим, что связность полного лифта в T^3M_n переходит в связность полного лифта в $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ тогда и только тогда, когда база плоская.

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. Пространства над алгебрами.-Казань: Казанск. ун-т.-1985.-264 с.

2. Широков А.П. Геометрия касательных расслоений и пространств над алгебрами.-Итоги науки и техники.-ВИНИТИ: проблемы геометрии. – 1981. – Т. 12. – С. 61–95.

3. Хъюзмоллер Д. Расслоенные пространства.– М.:Мир.– 1970. – 442 с.

Адрес: *Казанский государственный университет, каф. геометрии, 420008, г.Казань, ул.Кремлевская, 18*

Address: *Kazan State University, Mathematical Department, Chair of Geometry, ul. Kremlevskaya, 18, Kazan: 420008, RUSSIA*