



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

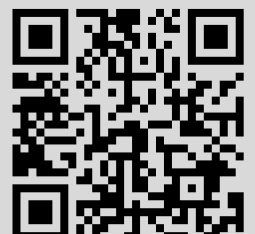
С. О. Сперанский, О логической непротиворечивости вероятностных предсказаний, *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2011, том 11, выпуск 1, 99–115

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.83

3 декабря 2024 г., 09:23:17



С. О. Сперанский

О ЛОГИЧЕСКОЙ НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ПРЕДСКАЗАНИЙ*

Обсуждается проблема статистической двусмысленности (SAP), поставленная Карлом Гемпелем в отношении объяснений, базирующихся на индуктивно-статистической аргументации. С целью устранения SAP вводится формализованное (в терминах логики и вероятности) требование максимальной специфичности (RMS), а также соответствующая ему схема осуществления предсказания. Отметим, определенная в итоге совокупность закономерностей, удовлетворяющих RMS, тесно связана с конструкцией семантического вероятностного предсказания, представленной в работах Евгения Витяева и автора статьи. Установлено, что использование rms-правил в конъюнкции со значимыми относительно рассматриваемой вероятностной меры наборами информационных данных не приводит к возникновению логических противоречий. Иными словами, вероятностные теории, полученные индуктивным образом на основании RMS, выступают в качестве непротиворечивых дедуктивных систем.

Ключевые слова: индуктивно-статистические объяснения и предсказания, проблема статистической двусмысленности, требование максимальной специфичности, вероятностная теория, индуктивная логика, непротиворечивость.

1. Экскурс и обоснование актуальности вопроса

Исследование посвящено работе с *индуктивно произведенным знанием*, синтезированным при совместном использовании логико-вероятностного и обучающего аппаратов [1–3], и сопряженным вопросам. Как известно, логика предикатов первой ступени подразумевает абсолютную достоверность *аксиом* и способов обращения с утверждениями (*правил вывода*). Однако в реальной жизни нам часто приходится оперировать различными видами *нечеткости*, а предположение о тождественной истинности наличествующих средств (их абсолютизация) ведет на практике к увеличению аппроксимационной ошибки округления — эта проблема весьма схожа, например, с возникающими в численном анализе [4], когда «теоретически хорошие» алгоритмы выдают значения, существенно отличные от искомым, и оказываются фактически неприложимы. При моделировании машинных вычислений указанные выше трудности связаны со способами представления величин, хранящихся в памяти компьютера, в то время как для физических и др. теорий — со статистической природой знаний и упрощенными исходными допущениями. Помимо прочего, хорошо известно, что даже маленькая ошибка приближения способна породить весьма большие отклонения результата работы алгоритма от наблюдаемых в действительности значений величин, если задействованы довольно длинные и сложные цепочки логических преобразований. Вдобавок логические модели

* Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект РФФИ-08-07-00272-а) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-3606.2010.1)

наблюдаемых феноменов несовершенны, а от выбранных понятий зависит, каково число шагов, требуемых для достижения ответа — доказательства верности или опровержения суждения, интерпретируемого в онтологии предметной области. Отсюда неизбежно вытекает [1–3]: чисто логическая аргументация обуславливает серьезные ограничения, накладываемые на применимость получаемого *знания*. Согласно Карлу Р. Попперу, обращение к логическому выводу будет справедливо при *дедуктивно-номологических*, но не *индуктивно-статистических* объяснениях [5] (терминология позаимствована у Карла Г. Гемпеля и может быть найдена в его работе [6]).

Итак, в повседневной жизни почти всегда найдутся отклонения (более или менее значительные) от идеальных постулатов теории, причем по аналогии с итерационными методами (в прикладной алгебре) логический вывод склонен накапливать ошибку в процессе своей реализации. При дедуктивном подходе к построению цепочки формул мы оперируем, вообще говоря, *закономерностями статистической природы*, но не имеем в распоряжении «корректной программы» для обращения с ними (классическая схема выводимости хоть и сохраняет истинность, но не сохраняет вероятностных значений). Коль скоро *вероятность* являет собой наиболее утвердившуюся и осознанную формализацию *степени доверия*, информация статистического характера описывается при помощи вероятностных распределений, истинностные значения обобщаются до булевозначных [7; 8] (в силу теоремы Стоуна можно ориентироваться на булевы алгебры подмножеств). Здесь вероятностная мера конструируется (объективно) по статистике, а не по субъективным мнениям экспертов. Отметим, многие люди привыкли думать о вероятности как о размытости, которая может быть сведена к чисто логической модели путем введения большего количества специальных понятий (дополнительного расширения сигнатуры), получаемых в ходе дальнейшего изучения; тем не менее целый ряд дискуссий в основаниях исчисления вероятностей и современной квантовой механике (см. лекцию [9]) указывают на фундаментальный характер случайности, не только устанавливая границы для логического позитивизма и легитимизируя философию индетерминизма, но и обращая наше пристальное внимание на природу явления как такового. Невозможность редукции случайных факторов к атрибутам детерминистского толка и сопутствующая эпистемология излагаются в монографиях [10] и [11].

Наша конечная задача (в общей постановке) — это *извлечение знаний из данных* [2; 3; 12], причем вид индуктивно синтезируемых закономерностей должен быть по возможности прост и удобен в обращении. *Вероятностная аргументация* призвана служить инструментом для предсказания и объяснения свойств малоизученных объектов. В настоящей статье мы сфокусируемся на непротиворечивости совместного использования вероятностных правил и доступных нам данных. Оперирование частичным типом знания (статистической природы) обязывает нас прибегать к индуктивного сорта суждениям. Последние образуют своего рода *макроуровень*, в то время как *микробазой* является исходный материал (например, статистики и модели первого порядка, по которым и была сконструирована вероятностная мера). Обобщение одним уровнем другого не означает лишь поглощения множества элементов или значений истинности, суть обобщения заключается в способности к возврату на первоначальный уровень, к выделению

обобщаемого понятия из более общего, в чем нередко возникает необходимость, ибо надстройка пусть и полезна подчас, но сама есть абстракция, при реальном применении нуждающаяся в уточнении контекста. Решения, таким образом, принимаются в рамках традиционной логики (событий микромира). Следовательно, с одной стороны, естественно апеллировать именно к вероятностным рассуждениям (тем более, это в немалой степени может облегчить нагрузку в плане количества предсказываемых свойств, потому что вероятностно независимых признаков обычно сравнительно немного); с другой — важно быть в состоянии проинтерпретировать полученные в результате вероятностной аргументации заключения на логическом уровне предметной области. Выводимые на основе вероятностных соображений теории должны быть *статистически не двусмысленны* (логически непротиворечивы), однако совокупности вероятностных правил часто включают противоречия — указанная проблема и была выявлена Гемпелем в отношении знания, опирающегося на индуктивно-статистические объяснения [6; 13; 14]. Благополучный возврат с макро- на микроуровень будет обеспечен, как только правомерный вопрос о непротиворечивости итоговых предсказаний будет решен положительно.

Несмотря на несомненный интерес к поднимаемой теме согласования и взаимоотношения уровней (их обратной связи), само наличие отрицаний игнорируется во многих работах по синтезу логики и вероятности. Отсутствие таких исследований относит мысли по поводу упомянутого синтеза скорее к разряду неких эвристик, нежели к объективно обоснованной методике обращения с данными. Между тем отрицания крайне важны при вероятностной аргументации. Подробнее опишем возникающие трудности. Разумеется, находясь в рамках чисто логической структуры, имея набор тождественно истинных правил и фактов, мы не испытываем затруднений, связанных со степенями доверия: все ложные формулы (отрицания упомянутых выше фактов и правил) можно отбросить, ведь промежуточных значений истинности нет, а посему нет и смысла в сохранении указанных отрицаний. При работе с вероятностной мерой ситуация меняется категорически: отрицание теперь не только фиксирует жесткую семантическую зависимость P_i и $\neg P_i$, но и подводит нас к идее о невозможности исключения одного из них из рассмотрения: *a priori* при составлении посылок закономерностей нет никаких причин предпочесть предложение Φ с вероятностью, отличной от нуля, предложению $\neg\Phi$, ведь в конъюнкции с другими формулами каждое может оказаться существенно полезно (без заранее известного приоритета) и специфично. Точнее, будучи прикреплено к посылке, любое из них (при этом не важно, выполнено ли $\mu(\Phi) > \mu(\neg\Phi)$ или обратное неравенство) потенциально способно увеличить условную вероятность: в ходе предсказания для замкнутой формулы Ψ (отличной от Φ) вполне может оказаться

$$\mu(\Psi | \neg\Phi) > \mu(\Psi) > \mu(\Psi | \Phi)$$

или наоборот («<>» вместо «>»), где μ — *вероятность на формулах* [15; 16].

В представленном вниманию тексте вводятся конструкции, формализующие *требование максимальной специфичности* (RMS), накладываемое на правила и развивающее предложенные Гемпелем концепции по устранению статистической двусмысленности. Интуитивно: применяемые закономерности должны обладать всей специфичной информацией относительно предсказываемых по ним свойств; такая информация оптимизи-

рует правдоподобность и объяснительную силу рассматриваемой закономерности. Хотя идеология, стоящая за требованием, и была представлена в работах Гемпеля [13; 14], в литературе RMS обычно фигурирует в довольно туманной форме либо дается при весьма серьезных ограничениях (скажем, для основных предложений языка монадических предикатов, причем вероятности входящих в аргументацию правил полагаются приблизительно равными единице), от которых в общем случае хотелось бы избавиться. Наше *формальное* RMS, главным образом, связано с парадигмой *семантического вероятностного предсказания* [1–3], а серия доказанных в статье теорем (см. п. 4–6) решает означенную проблему двусмысленности для различных теорий, удовлетворяющих вариантам RMS (нами будет определено несколько разновидностей RMS-требования), и тем самым снимает вопрос о логической непротиворечивости соответствующих данным вариантам вероятностных теорий (см. также [23]).

2. Вероятностная мера над языком 1-й степени

В первую очередь зафиксируем язык \mathcal{L} не более чем счетной сигнатуры

$$\Sigma = \{P_1, P_2, \dots; f_1, f_2, \dots; c_1, c_2, \dots\};$$

с операциями \wedge , \vee и \neg . Пусть X — счетное множество переменных. Обозначим: $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}$ — множество всех термов языка; $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0$ — множество основных термов (термов, не содержащих переменных); $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ — множество всех атомов; $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}^0$ — множество основных атомов (атомов, не содержащих переменных); $\mathbf{F}_{\mathcal{L}}$ — множество всех формул; $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}$ — множество предложений; $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}^0$ — множество основных предложений (бескванторных формул без свободных переменных). Отметим, что $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}^0$ совпадет с замыканием $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}^0$ относительно рассматриваемых логических операций. Затем Θ — совокупность всевозможных подстановок, а $\Theta^0 \equiv \{\theta \mid \theta : X \rightarrow \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\}$ — подстановки основных термов.

Определение 1. Назовем *литералом* всякий атом, либо его отрицание. Обозначим $\mathbf{L}_{\mathcal{L}}$ — множество всех литералов; $\mathbf{L}_{\mathcal{L}}^0 \equiv \mathbf{L}_{\mathcal{L}} \cap \mathbf{S}_{\mathcal{L}}^0$ — основные литералы.

Под *отрицанием* литерала A будем понимать непосредственно $\neg A$, если $A \in \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, и B , если $A \equiv \neg B$, где $B \in \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$. На письме используется обозначение « $\neg A$ », т.е. двойное отрицание отождествляется с отсутствием таковых. Разрешим присутствие литералов (не только атомов) в качестве структурных элементов *правил* — традиционных объектов логического программирования [17].

Определение 2. *Правило* — это запись вида $C \equiv \tilde{\vee}(A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$, где A, B_1, \dots, B_n суть литералы. *Вариантом правила* C называется любое $C\theta \equiv \tilde{\vee}(A\theta \leftarrow B_1\theta \wedge \dots \wedge B_n\theta)$, где θ — произвольная биекция множества переменных на себя. Далее обозначим $\mathbf{Rule}_{\mathcal{L}}$ — множество всех правил языка \mathcal{L} .

Замечание. Отношение следования « \leftarrow » чуть ниже будет нами пояснено и сопровождается вероятностной семантикой; при рассмотрении же вопроса о непротиворечивости связка « \leftarrow » в правилах логически интерпретируется как классическая импликация.

Опираясь на анализ, проведенный в работах [15; 16], дадим следующее определение.

Определение 3. Вероятность на множестве $F \subseteq \mathbf{S}_{\mathcal{L}}^0$, замкнутом относительно \wedge, \vee и \neg, \leftarrow — это функция $\mu : F \rightarrow [0, 1]$, обладающая следующими свойствами:

- (1) если $\vdash \Phi$ (« Φ — тавтология»), то $\mu(\Phi) = 1$;
- (2) если $\vdash \neg(\Phi \wedge \Psi)$, то $\mu(\Phi \vee \Psi) = \mu(\Phi) + \mu(\Psi)$.

Отныне считем, что μ — вероятность на основных предложениях. В п. 3 мы также определим μ через *вероятностную меру по Колмогорову* [18], что потенциально позволяет оперировать счетными дизъюнкциями и конъюнкциями, финитно приближать вероятности последних, в пределе получая точное значение.

«Материальность» классической импликации служит аргументом в пользу отказа от введения меры правила как значения вероятности соответствующей замкнутой формулы; вместо этого продуктивным оказывается распространить вероятность на основные экземпляры правил как условную (см. также [2; 16]), а именно

$$\mu(A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \Leftarrow \mu(A \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n) = \mu(A) / \mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n).$$

Такое определение более адекватно улавливает причинно-следственную связь между посылкой и заключением. Сопутствующие обозначения:

$$\text{Rule}_{\mathcal{L}}^0 \Leftarrow \{C\theta \mid C \in \text{Rule}_{\mathcal{L}} \text{ и } \theta \in \Theta^0\} \text{ —}$$

основные частные случаи правил рассматриваемого языка \mathcal{L} ;

$$\text{Rule}_{\mathcal{L}}^{0,\mu} \Leftarrow \{C \mid C \Leftarrow (A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}^0 \text{ и } \mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \neq 0\} \text{ —}$$

те из элементов $\text{Rule}_{\mathcal{L}}^0$, чья условная вероятность определена.

Определение 4. Пусть $C_1 \Leftarrow \tilde{\vee}(A_1 \leftarrow \bigwedge_{i=1}^{m_1} B_i)$ и $C_2 \Leftarrow \tilde{\vee}(A_2 \leftarrow \bigwedge_{k=1}^{m_2} D_k)$ — некоторые правила (выберем варианты с непересекающимися множествами входящих переменных). Отношение $C_1 \succ C_2$ («*быть более общим*») имеет место тогда и только тогда, когда можно подобрать такую $\theta \in \Theta$, что $A_1\theta \equiv A_2$, $\{B_1\theta, \dots, B_{m_1}\theta\} \subseteq \{D_1, \dots, D_{m_2}\}$, причем $m_1 \leq m_2$ и C_1 не является вариантом C_2 . Легко видеть, второе правило будет логическим следствием первого (если воспринимать « \leftarrow » как материальную импликацию). Обозначим \succsim — рефлексивное замыкание для \succ .

Введем нижнюю оценку для значений вероятности основных случаев правила с переменными:

$$\begin{aligned} \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{\mu} &\Leftarrow \left\{ C \in \text{Rule}_{\mathcal{L}} \mid C\theta \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{0,\mu} \text{ для какого-нибудь } \theta \in \Theta^0 \right\}; \\ \underline{\mu}(C) &\Leftarrow \inf \left\{ \mu(C\theta) \mid \theta \in \Theta^0 \text{ и } C\theta \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{0,\mu} \right\}, \quad \text{где } C \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{\mu}. \end{aligned}$$

Определение 5. Отношение $C_1 \sqsubset C_2$ («*вероятностное следование*») для $\{C_1, C_2\} \subseteq \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{\mu}$ эквивалентно $C_1 \succ C_2$ вместе с $\underline{\mu}(C_1) < \underline{\mu}(C_2)$.

Определение 6. Назовем μ -законом всякое C из $\text{Rule}_{\mathcal{L}}^{\mu}$, для которого $C' \succ C$ влечет $C' \sqsubset C$ при любом $C' \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{\mu}$; обозначим $\text{GLaw}_{\mathcal{L}}^{\mu}$ — совокупность всех μ -законов.

3. Семантическое μ -предсказание на данных

Для начала обоснуем задачу предсказания свойств, выраженных формулами в языке \mathcal{L} , а затем перейдем к ее формализации и постановке вопроса непротиворечивости.

Чаще всего *случайной величиной* называется измеримая функция из пространства элементарных исходов в \mathbb{R} (см. [18]), тогда статистические выборки представляют собой конечные последовательности вещественных чисел. Из желания подчеркнуть, что всякий исход может иметь довольно произвольную природу, вместо \mathbb{R} (или \mathbb{Q}) мы воспользуемся некоторым классом моделей первого порядка. Подобный переход, разумеется, не позволяет непосредственно производить алгебраические операции и сравнивать значения случайных величин на вещественной прямой, поэтому подразумевается наличие взаимно-однозначного соответствия (своего рода шкалирования) между рассматриваемым классом и поднабором из \mathbb{R} (при надобности отождествляя одно с другим).

Пусть \mathfrak{G}^* — некоторый счетный класс алгебраических систем первого порядка, наблюдаемых в изучаемом нами явлении; иными словами, любой исход эксперимента трактуется как некий элемент из \mathfrak{G}^* (однако нам не обязательно известно, какой конкретно). Непосредственно осуществлению предсказания предшествует ряд этапов:

- построение вероятностной меры μ по репрезентативной выборке $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}^*$, состоящей из хорошо исследованных структур, чьи свойства нами полностью идентифицированы;
- индуктивный синтез предсказывающих закономерностей, а вместе с тем и подбор статистически значимых данных для изучаемой нами системы $\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}^*$ — в соответствии с ними будут приниматься / отклоняться гипотезы относительно свойств последней.

Остановимся подробнее на описании указанных выше этапов. Первый из них сопровождается применением аппарата математической статистики, в результате чего получаем вероятностное распределение P , действующее на пространстве элементарных исходов $\Omega = \mathfrak{G}^*$ (при обобщении здесь потребуются колмогоровская аксиоматизация); в том или ином смысле оно должно аппроксимировать «настоящие» значения *эмпирической вероятности* P^* (подробнее о теории интервального и точечного оценивания можно прочесть в монографии А. А. Боровкова [19], для нас же это сейчас не столь важно). Качество *репрезентативности* выборки из генеральной совокупности обеспечивает нашу возможность говорить о вероятностной мере в целом, заменяя в рассуждениях P^* на P . Имея P , для произвольного предложения Φ определяем

$$\mu(\Phi) \Leftrightarrow P([\Phi]) = \sum_{\omega \in [\Phi]} P(\omega), \quad \text{где } [\Phi] \Leftrightarrow \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{G}^* \mid \mathfrak{A} \models \Phi\}.$$

Нам понадобится только μ на основных предложениях. Нетрудно понять, все необходимые свойства вероятности на $\mathbf{S}_{\mathcal{L}}^0$ (см. определение 3) выполнены. В приведенной схеме происходит естественный переход от двузначной истинности к булевозначной (ибо $2^{\mathfrak{G}^*}$ есть булева алгебра), которую, в свою очередь, можно «померить» при помощи P .

Далее берется интересующая нас $\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}^*$ (знание относительно ее свойств частично, т. е. наблюдается некоторая модель, однако все ее характеристики нам не известны) и

ставится задача предсказания, точнее — для произвольного основного литерала H выяснить, что более достоверно: $\mathfrak{B} \models H$, $\mathfrak{B} \not\models H$ или у нас недостаточно информации для какого-либо из представленных выводов; причем в первых двух случаях приводится *вероятностная оценка* степени правдоподобия. Ниже будут определены правила и наборы данных, по которым эта задача решается в *семантическом μ -предсказании* [1–3].

Зафиксируем $\text{Fact}_o \subset \mathbf{A}_\Sigma^0$ — те из основных атомов, что позволяют непосредственную проверку в любой реально возникающей модели $\mathfrak{B} \in \mathfrak{G}^*$; иначе говоря, постулируется наличие $\zeta : \mathfrak{G}^* \times \text{Fact}_o \rightarrow \{0, 1\}$ (считаем, что задано произвольное такое отображение). Нами также используется аббревиатура $\zeta_{\mathfrak{B}}(\cdot)$ для одноместной функции $\zeta(\mathfrak{B}, \cdot)$.

Определим *полный набор альтернатив*, допускающих проверку, как

$$\text{Fact}_o^* \equiv \text{Fact}_o \cup \text{Fact}_o^{\neg}, \quad \text{где} \quad \text{Fact}_o^{\neg} \equiv \{\neg A \mid A \in \text{Fact}_o\}.$$

Теперь положим (не накладывая дополнительных ограничений на тип функции $\zeta_{\mathfrak{B}}$)

$$\text{Data}[\mathfrak{B}] \equiv \{A \mid A \in \text{Fact}_o \text{ и } \zeta_{\mathfrak{B}}(A) = 1\} \cup \{\neg A \mid A \in \text{Fact}_o \text{ и } \zeta_{\mathfrak{B}}(A) = 0\}.$$

Итак, *данные* являют собой не что иное, как максимальное непротиворечивое подмножество полного набора альтернатив.

Определение 7. Подмножество $S \subseteq \mathbf{L}_\Sigma^0$ называется *μ -совместным* или *статистически значимым относительно μ* (для вероятности μ , построенной по распределению P) в том и только том случае, когда $P(\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models S\}) \neq 0$.

Определение 8. *Максимально специфичным правилом (ms-правилом) для предсказания литерала H* называется $C \equiv \check{\vee}(A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in \text{Rule}_\Sigma$, обладающее следующими характеристиками:

- (1) найдется подстановка $\theta \in \Theta^0$ такая, что $A\theta \equiv H\theta$,
 $\{B_1\theta, \dots, B_n\theta\} \subseteq \text{Fact}_o^*$, $\mu(B_1\theta \wedge \dots \wedge B_n\theta) \neq 0$ и $\mu(C\theta) > \mu(H\theta)$;
- (2) не существует $C' \in \text{Rule}_\Sigma^\mu$, для которого верно (1) и $C \sqsubset C'$;
- (3) его нельзя обобщить до некоторого $C' \in \text{Rule}_\Sigma^\mu$, не потеряв при этом в значении $\underline{\mu}(\cdot)$ и одновременно сохранив свойства (1–2).

Иногда, говоря о введенных нами условиях, мы будем употреблять аббревиатуру «**ms.i**» для обозначения i -го пункта ms-определения (когда из контекста ясно, о предсказании какого именно литерала идет речь).

Интуиция, стоящая за пунктами 1–3 определения, такова: **ms.1** отвечает за соответствие предсказываемому свойству и проверяемость посылки правила на возникающих данных; **ms.2** — непосредственно за максимальную специфичность в классе правил, чьи посылки и заголовки валидны по п.1; **ms.3** — за простоту (общность) закономерности. Кроме того, во избежание деления на ноль возникает техническое требование « $\mu(B_1\theta \wedge \dots \wedge B_n\theta) > 0$ », а также « $\mu(C\theta) > \mu(H\theta)$ », символизирующее производительность набора причин $\{B_1\theta, \dots, B_n\theta\}$ и называемое условием *мотивированности*. Последнее можно переписать как $\mu(A\theta \mid B_1\theta \wedge \dots \wedge B_n\theta) > \mu(H\theta \mid T)$, где T — символ

тавтологии (пустой конъюнкции). Конечно же, нет смысла предсказывать литерал по правилу, оценка вероятности которого хуже, чем безусловная вероятность самого литерала. Мы еще вернемся к анализу *ms.1–3* в некоторых модификациях, пока же заметим, что условия мотивации, сходные с упомянутым выше, встречаются и в вероятностной теории причинности Суппеса [20], и в индуктивной логике Карнапа [21].

Предположим, нас интересует правдоподобность $H \in \mathbf{L}_{\mathcal{C}}^0$. Сперва мы находим *ms*-правило $C \Leftrightarrow \tilde{\forall}(A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$ для предсказания H , причем должна существовать $\theta \in \Theta^0$ такая, что $\{B_1\theta, \dots, B_n\theta\}$ содержится в $\text{Data}[\mathfrak{B}]$. Тогда свойство H подтверждается в модели \mathfrak{B} с оценкой $\gamma(H) \Leftrightarrow \underline{\mu}(C)$. Последняя может служить критерием принятия или отклонения гипотезы об истинности запроса: например, доверяем лишь прогнозам с оценкой не меньше $1 - \varepsilon$, где ε — *доверительная граница*. Аналогично поступаем с предсказанием $\neg H$. При наличии нескольких *ms*-правил естественно выбрать то, которое доставляет максимум величине $\underline{\mu}(\cdot)$; отметим, на практике все множество *ms*-правил у нас обычно отсутствует (их нахождение наталкивается на проблемы вычислительной сложности), поэтому часто приходится оперировать поднаборами. Разумеется, особый интерес вызывает предвосхищение свойств, не лежащих в Fact_0^* .

Для каждого *ms*-правила C , предсказывающего некоторый литерал H , рассмотрим всевозможные экземпляры $C\theta$, где θ принадлежит к числу подстановок, удовлетворяющих п.1 *ms*-определения для C и H . Объединение всех таких основных случаев (по всем правилам и литералам) обозначим $\text{MSR}_{\theta}^{\mu}$. Множество $\text{MSR}_{\theta}^{\mu}$ можно считать итогом проведения так называемого *семантического μ -вывода*, идея которого была предложена в работах Е. Е. Витяева [1–3] и основывается на *требовании максимальной специфичности*, выдвинутом К. Г. Гемпелем для устранения *проблемы статистической двусмысленности* при обращении с индуктивно произведенным знанием [6; 13; 14]. Цель последующих разделов состоит в доказательстве логической непротиворечивости $\text{MSR}_{\theta}^{\mu} \cup \text{Data}[\mathfrak{B}]$, где $\text{Data}[\mathfrak{B}]$ статистически значимо. Отметим, что в разных вариациях непротиворечивость индуктивных схем постоянно фигурирует в философии науки: у Гемпеля — как необходимое условие при формировании рациональной системы убеждений [6]; у М. Родерика и Р. Мартина — как адаптация эпистемологических принципов, также принятых в концепции знания Я. Хинтикки [22]. Кроме того, в пятом параграфе конструкция *ms*-правила будет обобщена для введения переменных (ибо, хотя *ms*-правила и включают переменные, но в действительности закономерности присутствуют лишь в виде $\text{MSR}_{\theta}^{\mu}$ — соответствующих основных экземпляров); наконец, в шестом параграфе мы обсудим слабомотивированные предсказания с доверительным уровнем $1 - \varepsilon$ и установим, что для гарантии совместности достаточно взять любое $\varepsilon < 0,5$.

4. Доказательство непротиворечивости

Утверждение 1. Допустим, $C \Leftrightarrow (A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D) \in \text{Rule}_{\mathcal{C}}^{0,\mu}$, причем имеет место строгое неравенство

$$\underline{\mu}(A \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D) < \underline{\mu}(A \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n).$$

Тогда правило $C' \Leftrightarrow (A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg D)$ лежит в $\text{Rule}_{\mathcal{G}}^{0,\mu}$, а $\neg D$ уже увеличивает условную вероятность

$$\mu(A \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg D) > \mu(A \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если бы $\mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg D)$ равнялось нулю, то имеем

$$\begin{aligned} \mu(A \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D) &= \mu(A \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D) + \\ &+ \mu(A \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg D) = \mu(A \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D) &= \mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D) + \\ &+ \mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg D) = \mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n), \end{aligned}$$

откуда (с учетом условий)

$$\mu(C) = \frac{\mu(A \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D)}{\mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D)} = \frac{\mu(A \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n)}{\mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n)} = \mu(A \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n) > \mu(C).$$

Возникает противоречие. Значит, $\mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg D) > 0$, т. е. и условная вероятность для C' определена. В результате дальнейших преобразований получим:

$$\begin{aligned} &\mu\left(A \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \neg D\right) \times \mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \neg D\right) = \\ &= \mu\left(A \wedge \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \neg D\right) = \mu\left(A \wedge \bigwedge_{i=1}^n B_i\right) - \mu\left(A \wedge \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D\right) = \\ &= \mu\left(A \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i\right) \times \mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i\right) - \mu\left(A \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D\right) \times \mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D\right) > \\ &> \mu\left(A \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i\right) \times \mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i\right) - \mu\left(A \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i\right) \times \mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D\right) = \\ &= \mu\left(A \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i\right) \times \left(\mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i\right) - \mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D\right)\right) = \\ &= \mu\left(A \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i\right) \times \mu\left(\bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \neg D\right). \end{aligned}$$

И, таким образом, вслед за сокращением $\mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge \neg D) \neq 0$ требуемое нам неравенство будет установлено. \square

Лемма 1 (об альтернативах). Допустим, $C_{\text{pos}} \Leftrightarrow (H \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in \text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$ и $C_{\text{neg}} \Leftrightarrow (\neg H \leftarrow D_1 \wedge \dots \wedge D_m) \in \text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$ (заключения *ms*-экземпляров противоречат друг другу). Тогда с необходимостью $\mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_m) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что C_{pos} и C_{neg} суть основные случаи некоторых *ms*-правил C_1 и C_2 , причем для каждого выполнен соответствующий ему п. 1 определения *ms*-правила. Очевидно, $C_1 \succcurlyeq C_{\text{pos}}$. Отсюда (в силу *ms.2*) имеем $\underline{\mu}(C_1) \geq \mu(C_{\text{pos}})$; с другой стороны, $\underline{\mu}(C_1) \leq \mu(C_{\text{pos}})$ — всегда будет выполнено для нижней границы $\underline{\mu}(\cdot)$. Таким образом, $\mu(C_{\text{pos}}) = \underline{\mu}(C_1)$. Тем же методом получим и $\mu(C_{\text{neg}}) = \underline{\mu}(C_2)$.

«От противного». Пусть $\mu(B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_m) \neq 0$. Следовательно, и для любого подмножества $S \subseteq \{B_1, \dots, B_n, D_1, \dots, D_m\}$ имеет место $\mu(\bigwedge_{A \in S} A) \neq 0$. Далее зафиксируем какое-нибудь $D \in \{D_1, \dots, D_m\}$.

Этап 1. Сначала докажем равенство $\mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i) = \mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D)$. В самом деле, $C \Leftrightarrow (H \leftarrow \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D)$ принадлежит $\text{Rule}_{\mathcal{L}}^{0,\mu}$, к тому же верно $C_1 \not\approx C_{\text{pos}} \succ C$. Легко понять, это C полностью удовлетворяет условиям п. 1 определения ms-правила (для литерала, предсказываемого с помощью C_1) за исключением, быть может, « $\mu(C) > \mu(H)$ ». Рассмотрим возможные альтернативы.

1. $\underline{\mu}(C_1) = \mu(C_{\text{pos}}) = \mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i) \leq \mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D)$. Из п. 2 определения ms-правила, однако, вытекает обратное неравенство (ибо появилось недостающее условие «мотивации» $\mu(C) \geq \mu(C_{\text{pos}}) > \mu(H)$); в итоге установим нужное равенство.

2. $\underline{\mu}(C_1) = \mu(C_{\text{pos}}) = \mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i) > \mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D)$. Исходя из утверждения 1, $\mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i) < \mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \neg D)$, где $C' \Leftrightarrow (H \leftarrow \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \neg D) \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{0,\mu}$. Повторяя предыдущие рассуждения (теперь с заменой « D » на « $\neg D$ »), приходим к противоречащему допущениям тождеству $\mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i) = \mu(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \neg D)$.

Этап 2. Ежели нами уже добавлена часть литералов $\{D_1, \dots, D_m\}$, берем очередное (по порядку) и еще не задействованное D_k . Индукционное предположение гласит

$$\underline{\mu}(C_1) = \mu\left(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i\right) = \mu\left(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge D_1\right) = \dots = \mu\left(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^{k-1} D_j\right).$$

Для последнего из выражений (внутри скобок) и D_k выкладки будут без изменений по отношению к проделанным ранее вплоть до момента наступления разобранных выше альтернатив (1–2) и не используют никаких дополнительных свойств. В (1–2) необходимо аккуратно применить индукционную гипотезу, после чего действия становятся тривиальны. Итак,

$$\underline{\mu}(C_1) = \mu\left(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^m D_j\right).$$

Аналогично

$$\underline{\mu}(C_1) = \mu\left(\neg H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^m D_j\right).$$

В результате нетрудно извлечь (с привлечением одной из составляющих п. 1 определения ms-правила для предсказания) противоречие:

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(\neg H) + \mu(H) < \mu(C_{\text{pos}}) + \mu(C_{\text{neg}}) = \\ &= \mu\left(H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^m D_j\right) + \mu\left(\neg H \mid \bigwedge_{i=1}^n B_i \wedge \bigwedge_{j=1}^m D_j\right) = 1. \end{aligned}$$

□

Замечание. Из доказательства леммы видно, что нами установлен следующий факт. Пусть $C \Leftrightarrow (H \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in \text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$ и $\{B_1 \dots B_n\} \subseteq S \subseteq \text{Fact}_{\emptyset}^*$, где S конечно и μ -совместно. Тогда окажется выполненным равенство $\mu(C) = \mu(H \mid \bigwedge_{B \in S} B)$.

$$\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\emptyset}^{\mu} \Leftrightarrow \text{MSR}_{\emptyset}^{\mu} \cup \text{Data}[\mathfrak{B}].$$

Теорема 1 (о непротиворечивости ms-теории). Теория $\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\emptyset}^{\mu}$ логически непротиворечива для всякого μ -совместного множества $\text{Data}[\mathfrak{B}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для выполнимости $\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\emptyset}^{\mu}$ достаточно показать выполнимость множества

$$\begin{aligned} \Gamma &\Leftarrow \text{Pr} \cup \text{Dt}_1, \quad \text{где } \text{Dt}_1 \Leftarrow \{ D \mid D \in \text{Data}[\mathfrak{B}] \text{ и } \mu(D) = 1 \}, \\ \text{Pr} &\Leftarrow \{ A \mid (A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in \text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}, \quad \{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \text{Data}[\mathfrak{B}] \}, \end{aligned}$$

ибо $\text{Dt}_{<} \Leftarrow \{ D \mid D \in \text{Data}[\mathfrak{B}], \mu(D) < 1 \} \subseteq \text{Pr}$. В самом деле, для каждого $D \in \text{Data}[\mathfrak{B}]$ команда $C \Leftarrow (D \leftarrow D)$ лежит в $\text{Rule}_{\mathcal{L}}^{0,\mu}$ (ввиду μ -совместности данных). Далее указанное правило обобщается до некоторого $C' \in \text{GLaw}_{\mathcal{L}}^{\mu}$ без потери в условной вероятности: $\mu(C') = \mu(D \mid D) = 1 > \mu(D)$ (это всегда можно сделать). Оценка полученного C' не может быть улучшена, т. е. получено ms-правило, причем его частный случай C предсказывает D . Кроме того, в модели для Γ окажутся реализованными все данные и заключения импликаций $\text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$ с посылками из $\text{Data}[\mathfrak{B}]$ (именно они участвовали в формировании Pr). Посылка всякого правила $\text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$ лежит в $\text{Fact}_{\emptyset}^*$. Стало быть, если она не включена в данные полностью, то найдутся литералы дополнения: такие литералы, что их отрицания принадлежат $\text{Data}[\mathfrak{B}]$, — отсюда посылка рассматриваемого правила будет ложна, а сама импликация из $\text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$, разумеется, истинна. Поэтому эрбранова модель для Γ будет моделью исходного $\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\emptyset}^{\mu}$.

Отметим, что $\text{Pr} \cap \text{Dt}_1 = \emptyset$. Действительно, любое D из данных, обладающее свойством $\mu(D) = 1$, нельзя семантически μ -предсказать никаким ms-правилом (при сильной мотивации), ведь не существует правила с условной вероятностью большей единицы. Одновременно, коль скоро значение $\mu(\neg D) = 1 - \mu(D) = 0$ также нельзя увеличить (для произвольного основного экземпляра $(\neg D \leftarrow D_1, \dots, D_m) \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}^{0,\mu}$ будем иметь $\mu(\neg D \mid D_1 \wedge \dots \wedge D_m) = \mu(\neg D \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_m) / \mu(D_1 \wedge \dots \wedge D_m) = 0$), то и отрицание D не может попасть в Pr .

Из сказанного вытекает: Γ будет логически совместно, как только совместны (в отдельности) Dt_1 и Pr . Проверим это. Множество Dt_1 непротиворечиво по условию (иначе бы вероятность данных равнялась нулю). Pr же непротиворечиво в силу леммы 1 и статистической значимости набора $\text{Data}[\mathfrak{B}]$. Теперь зададим интерпретацию $v : \mathbf{A}_{\mathcal{L}}^0 \rightarrow \{0, 1\}$ согласно инструкции

$$v(A) \Leftarrow \begin{cases} 1, & \text{если верно } A \in \text{Pr} \text{ либо } A \in \text{Dt}_1 \\ 0, & \text{если верно } \neg A \in \text{Pr} \text{ либо } \neg A \in \text{Dt}_1 \\ \text{произвольно,} & \text{на оставшихся атомах.} \end{cases}$$

Значит, существует эрбранова модель для Γ . В итоге множество $\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\emptyset}^{\mu}$ выполнимо. Следовательно, и непротиворечиво. \square

Замечание. В ходе доказательства леммы и теоремы нам фактически не понадобился п. 3 определения ms-правила, отвечающий за общность. Более того, ежели мы рассмотрим совокупность правил, удовлетворяющих только первым двум пунктам ms-определения (для каких-нибудь предсказываемых литералов), а затем соберем все их основные экземпляры по соответствующим п. 1 подстановкам (см. аналогию с образованием $\text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$) в одно множество, то последнее будет логически следовать из $\text{MSR}_{\emptyset}^{\mu}$. Убедимся в этом. Пусть $C \Leftarrow \tilde{\forall}(A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n)$ обладает ms.1–2 для $H \in \mathbf{L}_{\mathcal{L}}$. Тогда

оно может быть обобщено (без потери в нижней границе $\underline{\mu}(\cdot)$ и при сохранении ms.1-2) до некоторого ms-правила $C' \Leftrightarrow \tilde{\forall}(A' \leftarrow D_1 \wedge \dots \wedge D_m)$. Далее для θ (из ms.1 для C и H) всегда найдется θ' такая, что $A\theta \equiv A'\theta'$ и $\{D_1\theta', \dots, D_m\theta'\} \subseteq \{B_1\theta, \dots, B_n\theta\}$. Учитывая равенство $\underline{\mu}(C) = \mu(C\theta)$ (следует из выбора θ и ms.2), по построению имеем:

$$\mu(C'\theta') \geq \underline{\mu}(C') \geq \underline{\mu}(C) = \mu(C\theta) > \mu(A\theta) = \mu(A'\theta'),$$

откуда $C'\theta' \in \text{MSR}_{\theta}^{\mu}$, причем $C'\theta' \succ C\theta$ и выполнено $\mu(C'\theta') = \underline{\mu}(C')$.

◦ Дополнительно: схема предсказания в теореме 1.

Статистическая значимость множества $\text{Data}[\mathfrak{B}]$ означает ненулевую вероятность конъюнкций посылок ms-экземпляров, предсказывающих на данных, а точнее — правил

$$\text{Pr}' \Leftrightarrow \{C \mid C \Leftrightarrow (A \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in \text{MSR}_{\theta}^{\mu}, \{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \text{Data}[\mathfrak{B}]\},$$

так как по монотонности $\mu(\bigwedge_{B \in S'} B) \geq \mu(\bigwedge_{D \in S} D)$, где $S' \subseteq S \subseteq \mathbf{L}_{\mathfrak{L}}^0$.

Зафиксируем некоторую нумерацию всех основных атомов сигнатуры Σ и выберем очередное A_i . Возникает одна из следующих альтернатив:

- 1) атом A_i семантически μ -предсказывается на данных системы \mathfrak{B} ;
- 2) литерал $\neg A_i$ семантически μ -предсказывается на данных системы \mathfrak{B} ;
- 3) ни сам рассматриваемый атом, ни его отрицание не могут быть семантически μ -предсказаны средствами $\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\theta}^{\mu}$.

Случаи (1–3) исчерпывают возможные ситуации и взаимно исключают друг друга. Очевидно, первый из них (по определению) эквивалентен $A_i \in \text{Pr}$, второй равносителен $\neg A_i \in \text{Pr}$, а в третьем будут содержаться (в частности) все элементы Dt_1 (обозначения см. в доказательстве теоремы).

5. Универсальная версия ms-теории

Подобно Fact_o , определенному в третьем разделе, зададим $\text{Fact}_v \subset \mathbf{A}_{\mathfrak{L}}$ — атомы (не обязательно основные), позволяющие проверку в изучаемых нами системах \mathfrak{G}^* . Естественно считать, что при этом мы в состоянии верифицировать и фальсифицировать истинность любых элементов

$$\text{Fact}_v \Theta^0 \Leftrightarrow \{A\theta \mid \theta \in \Theta^0, A \in \text{Fact}_v\}.$$

Как и ранее, мы обозначим $\text{Fact}_v^* \Leftrightarrow \text{Fact}_v \cup \{\neg A \mid A \in \text{Fact}_v\}$ — замыкание множества Fact_v относительно отрицаний.

Пусть $C \Leftrightarrow \tilde{\forall}(A \leftarrow D_1 \wedge \dots \wedge D_m) \in \text{Rule}_{\mathfrak{L}}$. Среди подстановок выделим

$$\text{Sub}[C]^{\mu} \Leftrightarrow \{\theta \in \Theta^0 \mid \mu(D_1\theta \wedge \dots \wedge D_m\theta) > 0\} -$$

те из основных θ , при которых условная вероятность экземпляра $C\theta$ определена.

Определение 9. Правило $C \Leftrightarrow \tilde{\forall}(A \leftarrow \bigwedge_{i=0}^n B_i)$ называется *максимально специфичным u -правилом (its-правилом) для предсказания литерала H* в том и лишь том случае, когда выполнены следующие условия:

- (1) найдется подстановка θ (не обязательно основная) такая, что $A \equiv H\theta$, $\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \{B\theta \mid B \in \text{Fact}_v^*\}$;
- (2) если $\theta_o \in \text{Sub}[C]^\mu$, то $\mu(C\theta_o) > \mu(H\theta_o)$;
- (3) не существует $C' \in \text{Rule}_\Sigma^\mu$, для которого верно (1–2) и $C \sqsubset C'$;
- (4) правило C нельзя обобщить до некоторого $C' \in \text{Rule}_\Sigma^\mu$, не потеряв при этом в значении $\underline{\mu}(\cdot)$ и одновременно сохранив свойства (1–3).

Пусть MSR_u^μ — всевозможные ums-правила (пробегая по предсказываемым литералам); также воспользуемся сокращением «ums.i» для обозначения i -го пункта определения. Теперь $\text{Data}[\mathfrak{B}]$ суть максимальное непротиворечивое подмножество полного набора альтернатив для $\text{Fact}_o \equiv \text{Fact}_v\Theta^0$.

$$\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_u^\mu \equiv \text{MSR}_u^\mu \cup \text{Data}[\mathfrak{B}].$$

Теорема 2 (о непротиворечивости универсальной ms-теории). *Теория $\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_u^\mu$ логически непротиворечива для всякого μ -совместного $\text{Data}[\mathfrak{B}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество основных экземпляров

$$\Delta = \{C\theta_\delta \mid C \in \text{MSR}_u^\mu, \theta_\delta \in \text{Sub}[C]^\mu\}.$$

Убедимся, что все его элементы удовлетворяют пунктам ms.1–2 (например, для предсказания соответствующих заключений), где в качестве Fact_o используется $\text{Fact}_v\Theta^0$. Действительно, пусть $C_\delta \equiv (H \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in \Delta$. Это означает $C_\delta = C\theta_\delta$ (и, в частности, $C \succcurlyeq C_\delta$), где $C \in \text{MSR}_u^\mu$, причем в силу ums.1–2:

$$\{B_1, \dots, B_n\} \subseteq \text{Fact}_o^*, \mu(C_\delta) = \mu(C\theta_\delta) > \mu(H\theta_\delta) = \mu(H),$$

т. е. для C_δ выполнено ms.1 при предсказании литерала H . Наличие ms.2 докажем «от противного». Если найдется $C'_\delta \sqsupset C_\delta$, сохраняющее п. 1 определения ms-правила для H , то мы бы уточнили исходное ums-правило C ($C \succcurlyeq C_\delta \succ C'_\delta$) со строгим увеличением нижней оценки: $\underline{\mu}(C) \leq \underline{\mu}(C_\delta) < \underline{\mu}(C'_\delta)$. Сказанное вступает в противоречие с п. 3 ums-правил, так как требования ums.1–2 совпадут с ms.1 для основного C'_δ .

С учетом замечания к теореме 1 получаем: $\text{MSR}_\theta^\mu \cup \text{Data}[\mathfrak{B}] \models \Delta'$, где $\Delta' \equiv \Delta \cup \text{Data}[\mathfrak{B}]$. Отметим, в любой модели Δ' реализуются все данные, а значит, и те основные случаи правил MSR_u^μ , для которых условная вероятность не определена (ибо их посылки с необходимостью не могут содержаться полностью в $\text{Data}[\mathfrak{B}]$, т. е. ложны в модели). Таким образом, из теоремы 1 вытекает выполнимость

$$\Gamma \equiv \{C\theta_\delta \mid C \in \text{MSR}_u^\mu, \theta_\delta \in \Theta^0\} \cup \text{Data}[\mathfrak{B}].$$

В итоге существует эрбранова модель для $\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_u^\mu$, поэтому указанное множество и будет непротиворечиво. \square

6. Несколько непротиворечивых модификаций

Уберем требование « $\mu(C\theta) > \mu(H\theta)$ » из п. 1 определения ms-правила для предсказания $H \in \mathbf{L}_{\mathcal{L}}$. Список получившихся характеристик для C и H обозначим как $wms.1-3$; определенное в результате множество правил есть *слабые ms-правила* (*wms-правила*), или *слабо мотивированные ms-правила* для H . Пусть WMS_{θ}^{μ} — соответствующая им совокупность основных экземпляров (по всем литералам; задается по аналогии с MSR_{θ}^{μ}).

Лемма 2 (об уровне доверия $1 - \varepsilon$). *Допустим, $C_{\text{pos}} \Leftrightarrow (H \leftarrow B_1 \wedge \dots \wedge B_n) \in WMS_{\theta}^{\mu}$ и $C_{\text{neg}} \Leftrightarrow (\neg H \leftarrow D_1 \wedge \dots \wedge D_m) \in WMS_{\theta}^{\mu}$, причем вероятность конъюнкции посылок C_{pos} и C_{neg} не равна нулю. Тогда, если в первом случае для оценки справедливо $\mu(C_{\text{pos}}) \geq 1 - \varepsilon$, то во втором случае реализуется неравенство $\mu(C_{\text{neg}}) \leq \varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению C_{pos} и C_{neg} являются основными случаями некоторых wms-правил C_1 и C_2 соответственно (для подстановок, удовлетворяющих wms.1). Как и в лемме 1, нетрудно показать равенства $\mu(C_{\text{pos}}) = \underline{\mu}(C_1)$ и $\mu(C_{\text{neg}}) = \underline{\mu}(C_2)$. Заметим, свойства $\mu(C_{\text{pos}}) > \mu(H)$ и $\mu(C_{\text{neg}}) > \mu(\neg H)$, отвечающие за сильную мотивацию, используются в доказательстве леммы 1 исключительно на завершающем этапе (получения противоречия); предшествующие же рассуждения проводятся в актуальном для нас предположении μ -совместности посылок C_{pos} и C_{neg} . Осталось понять, что

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(H \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_m) + \\ &+ \mu(\neg H \mid B_1 \wedge \dots \wedge B_n \wedge D_1 \wedge \dots \wedge D_m) = \mu(C_{\text{pos}}) + \mu(C_{\text{neg}}) = \\ &= \underline{\mu}(C_1) + \underline{\mu}(C_2) \geq 1 - \varepsilon + \underline{\mu}(C_2), \end{aligned}$$

поэтому

$$\mu(C_{\text{neg}}) = \underline{\mu}(C_2) \leq 1 - (1 - \varepsilon) = \varepsilon. \quad \square$$

$$\varepsilon \text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\theta}^{\mu} \Leftrightarrow \{C \mid C \in WMS_{\theta}^{\mu}, \mu(C) \geq 1 - \varepsilon\} \cup \text{Data}[\mathfrak{B}], \quad \text{где } \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Теорема 3 (о непротиворечивости wms-теории уровня $1 - \varepsilon$). *Теория $\varepsilon \text{Prdct}[\mathfrak{B}]_{\theta}^{\mu}$ логически непротиворечива для всякого μ -совместного множества $\text{Data}[\mathfrak{B}]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Находясь в условиях леммы 1: если $\mu(C_{\text{pos}}) \geq 1 - \varepsilon > \frac{1}{2}$, то верно и $\mu(C_{\text{neg}}) \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$; таким образом, wms-предсказания H и $\neg H$ (для $H \in \mathbf{L}_{\mathcal{L}}^0$) при уровне доверия $\varepsilon < \frac{1}{2}$ взаимно исключают друг друга. Дальнейшие рассуждения проводятся в духе доказательства теоремы 1. \square

Имея Fact_v , обратимся к ослабленной версии wms-правил (см. п. 5): исключим пункт wms.2 для $H \in \mathbf{L}_{\mathcal{L}}$ (точнее говоря, заменим его на условие, тождественно выполненное при любом $C \in \text{Rule}_{\mathcal{L}}$). В итоге нами будут определены *слабые wms-правила* для предсказания H . Совокупность последних (объединенную по всевозможным литералам) обозначим WMS_u^{μ} .

$$\varepsilon \text{Prdct}[\mathfrak{B}]_u^{\mu} \Leftrightarrow \{C \mid C \in WMS_u^{\mu}, \underline{\mu}(C) \geq 1 - \varepsilon\} \cup \text{Data}[\mathfrak{B}], \quad \text{где } \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Теорема 4 (о непротиворечивости *wms*-теории уровня $1 - \varepsilon$). Теория $\varepsilon\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_u^\mu$ логически непротиворечива для всякого μ -совместного множества $\text{Data}[\mathfrak{B}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно лишь убедиться, что замечание к теореме 1 остается справедливо в ситуации слабого μ -предсказания уровня $1 - \varepsilon$ (остальное будет аналогично доказательству теоремы 2). Рассмотрим произвольное правило C , для которого выполнены п. 1–2 *wms*-определения. Пусть θ — какая-нибудь основная подстановка, удовлетворяющая *wms.1* для C и предсказываемого им литерала, причем $\mu(C\theta) \geq 1 - \varepsilon$. Теперь, действуя как и в упомянутом замечании, находим *wms*-правило C' и $\theta' \in \Theta^0$ такие, что $C'\theta' \in \text{WMS}_\theta^\mu$, а $C'\theta' \not\approx C\theta$. При этом $\mu(C'\theta') \geq \mu(C\theta) \geq 1 - \varepsilon$; следовательно, $C'\theta'$ лежит в множестве $\varepsilon\text{Prdct}[\mathfrak{B}]_\theta^\mu \setminus \text{Data}[\mathfrak{B}]$. \square

Замечание. Пусть $\mathbf{T}_{\mathcal{L}, \leq d} \subseteq \mathbf{T}_{\mathcal{L}}$ — термы, в записи которых встречается не более $d \in \mathbb{N}$ вхождений функциональных символов Σ . Далее можно определить множества подстановок, формул и правил, построенных при участии лишь элементов $\mathbf{T}_{\mathcal{L}, \leq d}$. Кроме того, все использованные в работе конструкции преобразуются естественным образом; в частности, оценка $\underline{\mu}(\cdot)$ для правила будет вычисляться лишь относительно конечного числа допустимых подстановок основных термов [2]. Нетрудно видеть, мы не выйдем за пределы некоторой фиксированной глубины d в ходе размышлений. Иными словами, все приведенные нами выше леммы и теоремы можно переформулировать и доказать для ситуации с глубиной, ограниченной сверху числом d .

Заключение

Индукция — крайне важный аспект научного объяснения того или иного эмпирически наблюдаемого феномена; между тем статистика обеспечивает необходимый мост между экспериментальными данными и их теоретической (математизированной) спецификацией. Приведенное в статье требование максимальной специфичности и его модификации позволяют избежать проблемы статистической двусмысленности при работе с индуктивно произведенным знанием, причем сказанное касается как теорий пропозиционального сорта, так и теорий универсальных формул. Сопутствующие теоремы не только демонстрируют решение немаловажного философского вопроса с помощью современного логико-вероятностного аппарата, но и обосновывают, в каком ключе будет корректно использовать индуктивно-статистическую аргументацию на практике при формировании синтаксических систем для наблюдаемых физических, биологических, социологических и прочих явлений.

Список литературы

1. Vityaev E. E. The Logic of Prediction // Mathematical Logic in Asia 2005: Proc. of the 9th Asian Logic Conference. August 16–19, Novosibirsk, Russia / Eds. S. S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. World Scientific Publisher, 2006. P. 263–276.

2. *Смердов С. О., Витяев Е. Е.* Синтез логики, вероятности и обучения: формализация предсказания // Сибирские электронные математические известия. 2009. Т. 9. С. 340–365.
3. *Vityaev E. E., Smerdov S. O.* New Definition of Prediction without Logical Inference // Proc. of the IASTED International Conference on Computational Intelligence (CI 2009) / Ed. by B. Ya. Kovalerchuk. Honolulu, Hawaii, USA, 2009. P. 48–54.
4. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
5. *Popper K. R.* The Logic of Scientific Discovery. Routledge publishers, 1959.
6. *Hempel C. G.* Deductive-Nomological versus Inductive-Statistical Explanation // Minnesota Studies in the Philosophy of Science / Eds. H. Feigl, G. Maxwell. Minneapolis, Minnesota: University of Minnesota Press, 1962. Vol. 3. P. 98–169.
7. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory. Oxford: Clarendon Press, 2005.
8. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
9. *Popper K. R.* Of Clouds and Clocks. An Approach to the Problem of Rationality and the Freedom of Man // Objective Knowledge. An Evolutionary Approach. Oxford: Clarendon Press, 1979. Ch. 6. P. 206–255.
10. *Suppes P.* Probabilistic Metaphysics. Basil Blackwell, Oxford, 1984.
11. *Carnap R.* Logical Foundations of Probability. University of Chicago Press, 1950.
12. *Vityaev E. E., Kovalerchuk B. Ya.* Relational Methodology for Data Mining and Knowledge Discovery // Intelligent Data Analysis, Special Issue on Philosophies and Methodologies for Knowledge Discovery and Intelligent Data Analysis / Eds. K. Rennolls, E. Vityaev. 2008. Vol. 12. No. 2. P. 189–210.
13. *Hempel C. G.* Aspects of Scientific Explanation and Other Essays in the Philosophy of Science. N. Y.: Free Press, 1966.
14. *Hempel C. G.* Maximal Specificity and Lawlikeness in Probabilistic Explanation // Philosophy of Science. 1968. Vol. 35. No. 2. P. 116–133.
15. *Scott D., Krauss P.* Assigning Probabilities to Logical Formulas // Aspects of Inductive Logic / Eds. J. Hintikka, P. Suppes. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966. P. 219–264.
16. *Halpern J. Y.* An Analysis of First-Order Logics of Probability // Artificial Intelligence. 1990. Vol. 46. P. 311–350.
17. *Lloyd J. W.* Foundations of Logic Programming. Springer-Verlag, 1987.
18. *Borovkov A. A.* Probability Theory. Gordon and Breach, 1998.
19. *Borovkov A. A.* Mathematical Statistics. Gordon and Breach, 1998.
20. *Suppes P.* A Probabilistic Theory of Causality. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970.
21. *Carnap R.* A Basic System of Inductive Logic. Part 1 // Studies in Inductive Logic and Probability / Eds. R. Carnap, R. C. Jeffrey. University of California Press, 1971. Vol. 1. P. 33–165.

22. *Hintikka J., Hilpinen R.* Knowledge, Acceptance and Inductive Logic / Eds. J. Hintikka, P. Suppes // *Aspects of Inductive Logic*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1966. P. 1–20.

23. *Smerdov S. O.* On the Question of Consistence of the Semantic μ -prediction // Abstracts, Logic Colloquium 2009, ASL European Summer Meeting, July 31–August 5, Sofia, Bulgaria. P. 82–83.

Материал поступил в редколлегию 21.11.2009

Адрес автора

СПЕРАНСКИЙ Станислав Олегович

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: katze.tail@gmail.com