Р.Ш. Хуснутдинов

О ПРОДОЛЖИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СДВИГОМ

Введение

Рассматривается вопрос об условиях продолжимости решений следующего класса нелинейных сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) со сдвигом

$$a(t)\varphi(t)+b(t)(W\varphi)(t)+c^*(t)(S\varphi)(t)+d^*(t)(WS\varphi)(t)+ \tag{1}$$

$$+(\mathcal{D}^*\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\left\{\frac{F_1[t,\tau,\varphi(\tau),\lambda]}{\tau-t}+\frac{F_2[t,\tau,\varphi(\tau),\lambda]}{\tau-\alpha(t)}\right\}d\tau .$$

Относительно величин, которые фигурируют в уравнении (1), предполагаются выполненными следующие условия:

1. $\alpha(t)$ – дифференцируемый гомоморфизм простого замкнутого контура Ляпунова L на себя удовлетворяет условию Карлемана

$$\alpha[\alpha(t)]\equiv t\ ,\quad t\in L\ . \tag{2}$$

2. W и S – операторы сдвига и сингулярного интегрирования соответственно, т.е. $(W\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)]$ и

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\ . \tag{3}$$

3. Функции $a(t), b(t), c^*(t), d^*(t), \alpha(t)\in H_\beta(L), 0<\beta<1$.

4. Функции $F_s(t,\tau,u,\lambda)$, $s=1,2$ (вообще говоря, нелинейные по u) аналитичны в окрестности известного решения $\varphi_0(t)$ уравнения (1) при значении параметра $\lambda=\lambda_0$, т.е., справедливы следующие разложения:

$$F_s[t,\tau,\varphi_0(\tau)+\psi(\tau),\lambda_0+\mu]=\sum_{i+k\geq 0}\mu^i a_{sik}(t,\tau)\psi^k(\tau),\ s=1,2\ . \tag{4}$$

Функциональные ряды (4) сходятся в метрике пространства $H_\beta(L)$ в прямоугольнике $|\mu|<r_1$, $\|\psi\|_{H_\beta}<r_2$, а функции

$a_{sik}(t,\tau)$ удовлетворяют следующему условию

$$|a_{sik}(t_2,\tau_2)-a_{sik}(t_1,\tau_1)|=O\left(|t_2-t_1|^{\beta_1}+|\tau_2-\tau_1|^{\beta}\right),\ 0<\beta<\beta_1\le 1. \qquad (5)$$

При выполнении условия (5) сингулярные операторы

$$(\Phi_{ik}\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{a_{1ik}(t,\tau)}{\tau-t}+\frac{a_{2ik}(t,\tau)}{\tau-\alpha(t)}\right]\varphi(\tau)d\tau\in\mathcal{L}(H_\beta), \qquad (6)$$

где $\mathcal{L}(H_\beta)$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $H_\beta(L)$.

5. $\mathcal{D}^*$ – интегральные операторы с регулярным ядром $K^*(t,\tau)$.

6. Неизвестная функция $\varphi(t)$ ищется в банаховом пространстве $H_\beta(L)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{H_\beta}=\max_{t\in L}|\varphi(t)|+\sup_{\substack{t_1,t_2\in L\\ t_1\ne t_2}}|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|/|t_2-t_1|^{\beta}.$$

В работе найдены условия однозначной и многозначной продолжимости решений. При этом показано, что эти возможные случаи существенным образом зависят от свойств некоторых линейных операторов (как нетеровых, так и фредгольмовых).

§ 1. Решение линейного уравнения

Преобразуем уравнение (1), положив

$$\begin{cases}\varphi(t)=\varphi_0(t)+\psi(t),\\ \lambda=\lambda_0+\mu,\end{cases}$$

и затем выделим в полученном уравнении линейную часть относительно неизвестной функции $\psi(t)$. Имеем

$$K\varphi\equiv a(t)\psi(t)+b(t)(W\varphi)(t)+c(t)(S\psi)(t)+ + d(t)(WS\psi)(t)+(\mathcal{D}\psi)(t)=f(t,\psi,\mu), \qquad (7)$$

где $c(t)=c^*(t)-a_{110}(t,\tau)$, $d(t)=d^*(t)-a_{210}[t,\alpha(t)]$,
а $\mathfrak{D}$ – фредгольмовый оператор с ядром

$$K(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\left\{K^*(t,\tau)+\frac{a_{110}(t,t)-a_{110}(t,\tau)}{\tau-t}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_{210}[t,\alpha(t)]-a_{210}(t,\tau)}{\tau-\alpha(t)}\right\}, \tag{8}$$

$$f(t,\psi,\mu)=\mu a_1(t)+\sum_{i+k\geq 2}\mu^i(\Phi_{ik}\psi^k)(t),\ a_1(t)=(\Phi_{10}(1))(t).$$

В дальнейшем предположим, что степенной ряд

$$\mu\|a_1(t)\|_{H_\beta}+\sum_{i+k\geq 2}\|\Phi_{ik}\|_{\mathcal{L}(H_\beta)}\mu^i u^k \tag{9}$$

сходится в некотором прямоугольнике $|\mu|<d_1$, $|u|<d_2$. Тогда функциональный ряд (8) сходится в метрике пространства $H_\beta(\Gamma)$.

Нетрудно убедиться, что решение $\varphi_0(t)$ нелинейного уравнения (1) продолжимо тогда и только тогда, если разрешимо линейное уравнение

$$(K\psi)(t)=g(t) \tag{10}$$

с нетеровым оператором K. Для решения уравнения (10) используем следующий прием. Применим последовательно к уравнению (10) операторы W, S, SW слева и, введя обозначения

$$x_1(t)=\psi(t),\ x_2(t)=(W\psi)(t),$$
$$x_3(t)=(S\psi)(t),\ x_4(t)=(WS\psi)(t), \tag{10'}$$

получим следующую каноническую систему Фредгольма относительно новых неизвестных функций

$$a(t)x_1(t)+b(t)x_2(t)+c(t)x_3(t)+d(t)x_4(t)+(\mathfrak{D}_1x_1)(t)=g(t),$$

$$b[\alpha(t)]x_1(t)+a[\alpha(t)]x_2(t)+d[\alpha(t)]x_3(t)+$$

$$+c[\alpha(t)]x_4(t)+(\mathfrak{D}_2x_1)(t)=(Wg)(t),$$

$$c(t)x_1(t)+\gamma d(t)x_2(t)+a(t)x_3(t)+\gamma b(t)x_4(t)+(\mathcal{D}_3 x_1)(t)=(Sg)(t), \quad (11)$$

$$d[\alpha(t)]x_1(t)+\gamma c[\alpha(t)]x_2(t)+b[\alpha(t)]x_3(t)+$$

$$+\gamma a[\alpha(t)]x_4(t)+(\mathcal{D}_4 x_1)(t)=(SWg)(t),$$

где $\gamma=+1$, если $\alpha(t)$ – прямой сдвиг контура L , и $\gamma=-1$, если $\alpha(t)$ – обратный сдвиг; $\mathcal{D}_i$, $i=1,2,3,4$ – как и прежде, интегральные фредгольмовы операторы с ядрами

$$K_1(t,\tau)=K(t,\tau), \quad K_2(t,\tau)=K[\alpha(t),\tau],$$

$$K_3(t,\tau)=\frac{1}{\pi i}\frac{a(\tau)-a(t)}{\tau-t}+\frac{\gamma\alpha'(t)}{\pi i}\Big[\frac{b[\alpha(\tau)]}{\alpha(\tau)-t}-$$

$$-\frac{b(t)\alpha'[\alpha(t)]}{\tau-\alpha(t)}\Big]-\frac{1}{\pi^2}\int_L\frac{c(\tau_1)}{(\tau-\tau_1)(\tau_1-t)}d\tau_1-$$

$$-\frac{\alpha'(\tau)\alpha'[\alpha(\tau)]}{\pi^2}\int_L\frac{d(\tau_1)}{(\tau_1-t)[\tau-\alpha(\tau_1)]}d\tau_1+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(\tau_1,\tau)}{\tau_1-t}d\tau_1,$$

а ядро $K_4(t,\tau)$ строится, как и $K_3(t,\tau)$, только в его конструкции участвуют соответственно функции $b[\alpha(t)]$, $a[\alpha(t)]$, $d[\alpha(t)]$, $c[\alpha(t)]$. Так как $\mathrm{Ker}\, S=\mathrm{Ker}\, W=\{0\}$, то при применении этих операторов слева не происходит потеря решений, и каждое решение $\psi(t)$ уравнения (10) порождает решение системы (11), которое определяется по формуле (10′), и наоборот, если для решения системы (11) выполнены условия

$$(Wx_2)(t)=x_1(t), \quad (Wx_4)(t)=x_3(t), \quad (12)$$

$$(Sx_3)(t)=x_1(t), \quad (13)$$

то это решение порождает некоторое решение уравнения (10), которое находится по формуле $\psi(t)=x_1(t)$. Но все решения системы (11), удовлетворяющие условию (12), легко выделяются следующим приемом. Пусть $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ – некоторое решение системы (11). Тогда функции

$$\tilde{x}_1(t)=\frac{1}{2}[x_1(t)+(Wx_2)(t)], \quad \tilde{x}_2(t)=\frac{1}{2}[x_2(t)+(Wx_1)(t)],$$

$$\tilde{x}_3(t)=\frac{1}{2}\left[x_3(t)+(Wx_4)(t)\right],\quad \tilde{x}_4(t)=\frac{1}{2}\left[x_4(t)+(Wx_3)(t)\right]$$

являются решениями системы (11), которые обладают свойствами (12). Поэтому, если выполнено условие

$$(Sx_3)(t)+(SWx_4)(t)=x_1(t)+(Wx_2)(t), \tag{14}$$

то

$$\psi(t)=\frac{1}{2}\left[x_1(t)+(Wx_2)(t)\right] - \tag{15}$$

решение уравнения (10).

Так как, по предположению, K является оператором Нетера, то

$$\Delta(t,\gamma)=\begin{cases}\Delta_1(t)\cdot\Delta_2(t) & \text{, если } \gamma=+1,\\ -\Delta_3(t)\cdot\Delta_3[\alpha(t)] & \text{, если } \gamma=-1,\end{cases}$$

отличен от нуля для $t\in L$ [1], где

$$\Delta_1(t)=(c(t)-a(t))\cdot(W(c-a))(t)-(d(t)-b(t))\cdot(W(d-b))(t),$$

$$\Delta_2(t)=(a(t)+c(t))\cdot(W(a+c))(t)-(b(t)+d(t))\cdot(W(b+d))(t),$$

$$\Delta_3(t)=(c(t)-a(t))\cdot(W(a+c))(t)-(b(t)+d(t))\cdot(W(d-b))(t).$$

Следовательно, алгебраическая часть системы (11) исключается (ибо, нетрудно убедиться, определителем алгебраической системы является $\Delta(t,\gamma)\neq 0$, $t\in L$) и, разрешая систему (11), получим следующую равносильную систему Фредгольма частного вида:

$$x_i(t)=\int_L \mu_i(t,\tau)\,x_1(\tau)\,d\tau+g_i(t),\quad i=1,2,3,4, \tag{16}$$

где приняты обозначения:

$$\mu_i(t,\tau)=-\frac{1}{\Delta(t,\gamma)}\cdot\sum_{s=1}^{4}\Delta_{is}(t)\,K_s(t,\tau),$$

$$g_i(t)=(K_i^0 g)(t)=\frac{1}{\Delta(t,\gamma)}\cdot\big(\Delta_{1i}(t)\,J+\Delta_{2i}(t)\,W+$$

$$+\Delta_{3i}(t)\,S+\Delta_{4i}(t)\,SW\big)\,g(t),$$

$\Delta_{is}(t)$ – алгебраическое дополнение элемента i -й строки и s -го столбца определителя $\Delta(t,\gamma)$, $\mathcal{I}$ – единичный оператор, действующий в $H_\beta(L)$.

При исследовании решений системы (16) могут быть представлены следующие два случая.

1. Пусть 1 не является собственным значением ядра $\mu_1(t,\tau)$ и R – разрешающий оператор этого ядра. Тогда

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (Rg_1)(t), \\ x_i(t) &= \int_L \mu_i(t,\tau)(Rg_1)(\tau)\,d\tau + g_i(t), \quad i=2,3,4. \end{aligned} \tag{17}$$

Используя формулы (15), (17), решение исходного уравнения (10) найдем в форме

$$\psi(t) = (Pg)(t), \tag{18}$$

где

$$(Pg)(t) = \frac{1}{2}\left[(RK_1^\circ g)(t) + \int_L \mu_2[\alpha(t),\tau](RK_1^\circ g)(\tau)\,d\tau + (WK_2^\circ g)(t)\right]. \tag{19}$$

Нетрудно показать, что $P \in \mathcal{L}(H_\beta)$.

2. Пусть 1 является собственным значением ядра $\mu_1(t,\tau)$ ранга r, $\{y_k(t)\}_1^r$ и $\{z_k(t)\}_1^r$ – линейно зависимые собственные функции соответственно ядра $\mu_1(t,\tau)$ и ему сопряженного, $\tilde{R}$ – обобщенный разрешающий оператор ядра $\mu_1(t,\tau)$ и $\psi_k(t) = y_k(t) + \int_L \mu_2[\alpha(t),\tau]\, y_k(\tau)\,d\tau$, $k=\overline{1,r}$.
Тогда система (16) разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие разрешимости этой системы

$$\int_L (K_1^\circ g)(t)\, z_k(t)\,dt = 0, \quad k=\overline{1,r}, \tag{20}$$

что и предполагается. Решения уравнения (10) определяются по формуле

$$\psi(t) = (\tilde{P}g)(t) + \sum_1^r c_k \psi_k(t). \tag{21}$$

Оператор $\tilde{P} \in \mathcal{L}(H_\beta)$ и строится по формуле (19), где вместо R нужно брать $\tilde{R}$; $c_k = const$, $k=\overline{1,r}$.

§ 2. Однозначная продолжимость решений

Пусть 1 не является собственным значением ядра $\mu_1(t,\tau)$. Тогда, используя формулу (18), уравнение (7) преобразуется к виду

$$\psi(t) = (Pf)(t,\psi,\mu)\,, \tag{22}$$

решение которого ищем в виде ряда

$$\psi(t) = \sum_{1}^{\infty} \mu^{k} \beta_k(t)\,. \tag{23}$$

Коэффициенты $\beta_k(t)$ находятся однозначно из следующих рекурентных соотношений:

$$\begin{aligned}
&\beta_1(t) = (Pa_1)(t)\,,\\
&\beta_2(t) = P\{(\Phi_{20}(1))(t) + (\Phi_{11}\beta_1)(t) + (\Phi_{02}\beta_1^2)(t)\}\,,\\
&\beta_3(t) = P\{(\Phi_{30}(1))(t) + (\Phi_{21}\beta_1)(t) + (\Phi_{11}\beta_2)(t) + \\
&+ (\Phi_{12}\beta_1^2)(t) + 2(\Phi_{02}\beta_1\beta_2)(t) + (\Phi_{03}\beta_1^3)(t)\}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\beta_n(t) = f_n(t, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{24}$$

Докажем, что формально построенный ряд (23) является истинным уравнением (7). Для этой цели достаточно показать его сходимость в пространстве $H_\beta(L)$.

Так как степенной ряд (9) сходится в прямоугольнике $|\mu| < d_1$, $|u| < d_2$, то существует $M > 0$, что $\|\Phi_{ik}\|_{\mathcal{L}(H_\beta)} \le M d_1^{-i} d_2^{-k}$, $i,k \in N$. Оператор $P \in \mathcal{L}(H_\beta)$. Поэтому $\|P\|_{\mathcal{L}(H_\beta)} < \infty$.

Пусть $\|P\|_{\mathcal{L}(H_\beta)} \cdot M = m_0$, и рассмотрим следующую неявную функцию:

$$G(\mu, u) \equiv u(1 + m_0 d_1^{-1}) - \frac{m_0 d_1 d_2}{(d_1-\mu)(d_2-u)} + m_0 = 0\,. \tag{25}$$

Так как $G(0,0)=0$, но $G'_u(0,0)=1\neq 0$, неявная функция (25) в окрестности точки (0,0) имеет единственное решение

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} u_k \mu^k , \qquad (26)$$

которое можно найти методом неопределенных коэффициентов. При этом легко обнаружить, что $\|\beta_k(t)\|_{H_\beta} \leq u_k$. Следовательно, ряд (23) сходится в метрике пространства $H_\beta(L)$ и является истинным решением уравнения (7). Получена следующая

Т е о р е м а I. Пусть выполнены следующие условия:

I. Уравнение (I) имеет решение $\varphi(t)=\varphi_0(t)$ при $\lambda=\lambda_0$.

2. Имеет место разложение (4), коэффициенты которого удовлетворяют условию (5).

3. Степенной ряд (9) сходится в прямоугольнике $|\mu|<d_1$, $|u|<d_2$.

4. $\Delta(t,\gamma)\neq 0$, $t\in L$.

5. I не является собственным значением ядра $\mu_1(t,\tau)$.

Тогда решение $\varphi_0(t)$ уравнения (I) продолжимо, и

$$\varphi(t,\lambda)=\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k \beta_k(t)$$

является единственным аналитическим решением этого уравнения, если выполнено условие (I4), причем

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \varphi(t,\lambda)=\varphi_0(t) .$$

§ 3. Ветвление решений

Пусть теперь I является собственным значением ядра $\mu_1(t,\tau)$ ранга r Тогда, используя формулу (2I), уравнение (7) преобразуется к виду

$$\psi(t)=(\widetilde{P}f)(t,\psi,\mu)+\sum_{k=1}^{r} c_k \psi_k(t) \qquad (27)$$

при условии, что выполняется соотношение (20), где вместо g надо положить f. Как и прежде, решение уравнения (27) ищем в виде ряда

$$\psi(t)=\sum_{i+|k|\geq 1} \mu^i \beta_{ik}(t) c^k , \qquad (28)$$

где $\beta_{ik}(t)C^k$ — k - линейная форма относительно r -мерного вектора $C=(c_1, c_2, \ldots, c_r)$, которые находятся единственным образом из системы, аналогичной (24). Сходимость ряда (28) в пространстве $H_\beta(L)$ проводится по той же схеме, что и сходимость ряда (23), только в этом случае соответствующим мажорирующим числовым рядом будет служить аналитическое решение неявной функции

$$G(\mu, u, C) = u(1+m_0 d_1^{-1}) - \frac{m_0 d_1 d_2}{(d_1-\mu)(d_2-u)} - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k c_k + m_0 = 0,$$

где $\alpha_k = \|\psi_k\|_{H_\beta}$.

Значение параметра $C=(c_1, c_2, \ldots, c_r)$ определяется из условия разрешимости уравнений (10) и (7).

Эти условия выражаются с помощью соотношений (14) и (20)*. Поэтому, заменяя в последних соотношениях функцию $\psi(t)$ её явным выражением по формуле (28), получим систему алгебраических уравнений относительно параметра C

$$\sum_{i+|k|\geq 1} a_{\ell ik}\, \mu^i C^k = 0 \quad , \ \ell = \overline{1, r+1} \ , \tag{29}$$

где $a_{\ell ik}$ - вполне определенные числа, явный вид которых нетрудно указать. $a_{\ell ik} C^k$ — k - линейная форма относительно вектора $C=(c_1, c_2, \ldots, c_r)$. Так как система (29) в общем случае нелинейная, то эта система, а вместе с ней и уравнение (7), имеют неоднозначные решения. Таким образом, в этом случае мы наблюдаем явления ветвления решения $\varphi_0(t)$ исходного уравнения (1), и следовательно, это решение для $\lambda, |\lambda-\lambda_0|<d_1$, продолжается неоднозначно. Поэтому систему (29) обычно называют системой ветвления решений. Для исследований решений системы (29) можно использовать методы, развитые в работах [2,3]. Итак, доказана

Т е о р е м а 2. Пусть выполнены условия 1 - 4 предыдущей теоремы и, кроме того, 1 является собственным значением ядра $\mu_1(t,\tau)$. Тогда решение $\varphi_0(t)$ уравнения (1) при $\lambda=\lambda_0$, вообще говоря, продолжимо неоднозначно, и каждому решению си-

---

* При этом в условии (20) предварительно функцию $g(t)$ нужно заменить функцией $f(t, \psi, \mu)$, явное выражение которой определяется формулой (8).

стемы (29) соответствуют решения исходного уравнения (1), которое определяется по формуле

$$\varphi(t,\lambda)=\varphi_0(t)+\sum_{i+|k|\geq 1}(\lambda-\lambda_0)^i\beta_{ik}(t)C^k .$$

Так как уравнение (29) вместе с малыми решениями при $\mu\to 0$ может допускать и сколь угодно большие, то и исходное уравнение (1) может иметь как малые, так и большие возмущения $\psi(t,\lambda)$, $\lambda\to\lambda_0$. Решение $\varphi(t,\lambda)=\varphi_0(t)+\psi(t,\lambda)$ со сколь угодно большим возмущением $\psi(t,\lambda)$ при $\lambda\to\lambda_0$ называется особым решением.

В случае $r=1$ теорему (2) уточняет следующая

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, где $r=1$. Тогда решение $\varphi_0(t)$ при $\lambda=\lambda_0$ уравнения (1) продолжимо для λ, $|\lambda-\lambda_0|<d_1$ и

$$\varphi_k(t,\lambda)=\varphi_0(t)+\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^{\frac{i+p}{q}}\beta_{ik}(t) -$$

его продолжение, где несократимая дробь $\frac{p}{q}$ – угловой коэффициент некоторой стороны диаграммы Ньютона [2, 3], построенной для уравнения (29), взятый с противоположным знаком. Число решений с малым возмущением $\psi(t,\lambda)$ $\left(\frac{p}{q}>0\right)$ равно длине проекции нисходящей части диаграммы Ньютона, число особых решений $\left(\frac{p}{q}<0\right)$ – длине восходящей части.

Литература

1. Л и т в и н ч у к Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.– М.: Наука, 1977, с.448.

2. В а й н б е р г М.М., Т р е н о г и н В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.– М.: Наука, 1969, с.527.

3. Х у с н у т д и н о в Р.Ш. Линейные сингулярные интегро-дифференциальные уравнения, возмущенные нелинейным слагаемым.– Конструктивная теория функций и функциональный анализ, вып. 3.– Казань.: Изд-во Казанского ун-та, 1981, с.107–118.