О. М. Фоменко, О среднем числе решений некоторых сравнений,
*Зап. научн. сем. ПОМИ*, 1998, том 254, 192–206

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

**О. М. Фоменко**

# О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ СРАВНЕНИЙ

## §0. Введение

Пусть $f(X)$ – неприводимый полином степени $m$ с целыми коэффициентами, $D$ – дискриминант полинома $f(X)$. Обозначим через $\rho(n)$ число решений сравнения

$$f(X) \equiv 0 \pmod n, \quad 0 \leqslant X < n.$$

Эрдеш [1] доказал асимптотики

$$\sum_{p \leqslant x} \rho(p) = \frac{x}{\log x} + O\biggl(\frac{x}{(\log x)^2}\biggr), \tag{1}$$

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{\rho(p)}{p} = \log\log x + c(f) + o(1) \tag{2}$$

и оценку снизу

$$\sum_{p \leqslant x} \rho(p) \gg x. \tag{3}$$

Он утверждал, что вместо (3) можно получить асимптотику. В настоящее время эта асимптотика легко следует из общих теорем о мультипликативных функциях. Действительно, по теореме 3 [2] с помощью (1) имеем при $x \to \infty$ $(C(f) > 0)$

$$\sum_{n \leqslant x} \rho(n) = C(f)x + O\biggl(\frac{x}{(\log x)^{1/2-\varepsilon}}\biggr), \tag{4}$$

где

$$C(f) = e^{-E+c(f)}\, P, \tag{5}$$

$$P = \prod_p \biggl\{ e^{-\rho(p)p^{-1}} \biggl(1 + \frac{\rho(p)}{p} + \frac{\rho(p^2)}{p^2} + \dots \biggr) \biggr\},$$

Работа выполнена частично при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант No. 96-01-00663).

$E$ – константа Эйлера.

Равенство (5) следует из теоремы Вирзинга [3] с использованием (2).

Задача (4) неоднократно рассматривалась для квадратичных полиномов. В этом случае ее легко трактовать с помошью следующей формулы для $\rho(n)$ ([4], теорема 53). Пусть $f(X) = X^2 + BX + C$, где для простоты $B^2 - 4C = D < 0$ – фундаментальный дискриминант. Рассмотрим положительно определенные примитивные бинарные квадратичные формы $Q(X,Y) = aX^2 + bXY + cY^2$ дискриминанта $D = b^2 - 4ac$; пусть $w(Q)$ – порядок группы автоморфизмов формы $Q(X,Y)$; $r_*(n,Q)$ – число примитивных представлений $n$ формой $Q(X,Y)$. Тогда имеет место формула

$$\rho(n) = \sum_Q{}' \frac{1}{w(Q)} r_*(n,Q), \tag{6}$$

где суммирование $\sum_Q'$ идет по всем неэквивалентным формам $Q$ дискриминанта $D$.

Введем обозначение (для любого полинома $f(X)$)

$$P(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1). \tag{7}$$

В случае квадратичного полинома из (6) следует, что $P(s)$ можно выразить через ряды Дирихле, ассоциированные с соответствующими тета-рядами, и, следовательно, получить для $P(s)$ мероморфную продолжимость на всю $s$-плоскость и функциональное уравнение риманова типа. Кроме того, из (6) и теоремы 14.2 [5] следует, что $(x \to \infty)$

$$\sum_{n \leqslant x} \rho(n) = C(f)x + O\left(x^{1/2}\, e^{-B(\log x)^\beta}\right),$$

где константа $B > 0$, $\beta$ – любое фиксированное число $< 3/5$; впервые этот результат был получен в [6].

Если предположить справедливость гипотезы Римана для $\zeta(s)$, то на основании (6) и теоремы 14.2 [5] получаем $(x \to \infty)$

$$\sum_{n \leqslant x} \rho(n) = C(f)x + O\left(x^{5/11+\varepsilon}\right).$$

Цель настоящей работы – для некоторых классов полиномов $f(X)$ степени $m > 2$ (в частности, для абелевых полиномов) продолжить $P(s)$ влево от $\mathrm{Re}\, s = 1$ и, как следствие, улучшить остаточный член в (4). Отметим, что во всех рассмотренных ниже случаях остаточный член по модулю гипотез типа гипотезы Римана или гипотезы Линделёфа имеет вид $O(x^{1/2+\varepsilon})$.

## §1. Абелевы полиномы

Ниже $f(X)$ – неприводимый полином степени $m$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1; $D$ – дискриминант $f(X)$. Пусть $\mathrm{Spl}\{f(X)\}$ – множество всех простых $p$ таких, что $f(X) \bmod p$ разлагается в произведение различных линейных полиномов над полем из $p$ элементов $F_p$.

В настоящем параграфе будем рассматривать лишь абелевы полиномы (т.е. полиномы с абелевой группой Галуа). В абелевом случае из теории полей классов известно, что $\mathrm{Spl}(f(X))$ с точностью до конечного числа исключений состоит из простых чисел в прогрессиях

$$\{p = ak + l_1,\ p = ak + l_2, \dots,\ p = ak + l_f\}, \tag{8}$$

причем одна из прогрессий имеет вид $\{p = ak+1\}$; будем считать, что $l_1 = 1$.

Пусть $P_e$ – множество простых чисел, содержащее следующие простые: 1) (конечное) множество тех простых $p$, которые принадлежат прогрессиям (8), но не входят в $\mathrm{Spl}(f(X))$;

2) (конечное) множество простых $p$, не входящих в прогрессии (8), с условием $\rho(p) > 0$, а также $p \mid D$.

Обозначим через $P_*$ множество простых $p$ в прогрессиях (8), не принадлежащих $P_e$. Очевидно, для $p \in P_*$ имеем $\rho(p^\alpha) = m$ $(\alpha = 1, 2, \dots)$, а для $p \notin P_e \cup P_*$ $\rho(p) = 0$. Функция $P(s)$ определена в (7); в силу мультипликативности $\rho(n)$ имеем

$$P(s) = \prod_p \left(1 + \frac{\rho(p)}{p^s} + \frac{\rho(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right).$$

Положим

$$\begin{aligned} P_e(s) &= \prod_{p\in P_e}\left(1+\frac{\rho(p)}{p^s}+\frac{\rho(p^2)}{p^{2s}}+\dots\right),\\ P_*(s) &= \prod_{p\in P_*}\left(1+\frac{\rho(p)}{p^s}+\frac{\rho(p^2)}{p^{2s}}+\dots\right), \end{aligned} \tag{9}$$

тогда

$$P(s) = P_e(s)\cdot P_*(s).$$

Ради упрощения вычисления будем проводить в следующем частном случае: $P_e$ – множество всех $p \mid D$; $P_* = \mathrm{Spl}(f(X)) = \{$множество всех простых $p$ в прогрессиях (8)$\}$.

Введем обозначение $s = \sigma + it$. Отметим, что в силу оценки $\rho(n) \ll m^{\omega(n)}$, где $\omega(n)$ – число различных простых делителей $n$, ряд Дирихле $P(s)$ действительно сходится в полуплоскости $\sigma > 1$. Пусть $L(s,\chi)$ – $L$-ряд Дирихле, $z$ – комплексное число; ниже под $(L(s,\chi))^z$ понимается ветвь, определенная условием

$$(L(s,\chi))^z = \exp\{z\log L(s,\chi)\} = \exp\left(z\sum_p\sum_j j^{-1}\frac{\chi(p^j)}{p^{js}}\right) \quad (\sigma>1).$$

Пусть $\sigma > 1$; рассмотрим $\varphi(a)$ $L$-рядов Дирихле $L(s,\chi)$ с характерами $\chi \bmod a$, где $a$ – разность прогрессий в (8). Имеем

$$\mathcal{L}(s) := \prod_{i=1}^{f}\prod_{\chi(\mathrm{mod}\, a)} L(s,\chi)^{\overline{\chi}(l_i)m/\varphi(a)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{f}\prod_{p}\exp\left\{\frac{m}{\varphi(a)}\sum_{\chi(\mathrm{mod}\, a)}\overline{\chi}(l_i)\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}\frac{\chi(p^j)}{p^{js}}\right\} =$$

$$= \prod_{i=1}^{f}\prod_{p\equiv l_i(\mathrm{mod}\, a)}\exp\left(\frac{m}{p^s}\right)\prod_{i=1}^{f}\prod_{p}\exp\left\{m\sum_{j=2}^{\infty} j^{-1}\frac{\delta_i(p^j)}{p^{js}}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}_1(s)\cdot\mathcal{L}_2(s),$$

где

$$\delta_i(p^j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ p^j \equiv l_i(\mathrm{mod}\, a);\\ 0, & \text{если } \ p^j \not\equiv l_i(\mathrm{mod}\, a).\end{cases}$$

Пусть

$$P_*(s) = \mathcal{L}_1(s)\cdot A(s) \quad (\sigma > 1);$$

тогда

$$P(s) = P_e(s)\frac{\mathcal{L}(s)}{\mathcal{L}_2(s)}A(s), \quad (\sigma > 1), \tag{10}$$

где функции $P_e(s)$, $\frac{1}{\mathcal{L}_2(s)}$ и $A(s)$ аналитически продолжаются в полуплоскость $\sigma \geqslant 1/2 + \varepsilon$ как голоморфные функции и ведут себя там как $O(1)$.

Хорошо известно [7], что $L$-функции $L(s,\chi) \neq 0$ в области

$$\begin{cases} \sigma \geqslant 1 - \dfrac{A}{(\log|t|)^\alpha} & (|t| \geqslant t_0), \\ \sigma \geqslant 1 - \dfrac{A}{(\log|t_0|)^\alpha} & (|t| \leqslant t_0), \end{cases} \tag{11}$$

для любого фиксированного $\alpha > 2/3$, причем константа $A$ выбрана столь малой, чтобы не существовал исключительный характер $\chi(\operatorname{mod} a)$.

Зафиксируем $t_1 \geqslant t_0$ такое, что

$$\eta := \frac{A}{(\log t_1)^\alpha} \in \left(0, \frac{1}{10}\right).$$

Функция $P(s)$, продолженная в область (11) по формуле (10), является там меромофрной функцией с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$. Пусть

$$R(x) := \sum_{n \leqslant x} \rho(n).$$

По формуле обращения имеем

$$\int_0^x R(t)dt = \lim_{T\to\infty} (2\pi i)^{-1} \int_{2-iT}^{2+iT} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} P(s)\, ds. \tag{12}$$

Пусть $T > t_1$; по теореме Коши интеграл справа в (12) может быть заменен суммой

$$2\pi i C x^2 + \sum_{i=1}^{6} I_i,$$

где $Cx^2$ – вычет подынтегральной функции в точке $s = 1$ и $I_i$ – интеграл по пути $L_i$ $(i = 1, \dots, 6)$:

$$L_1 \quad \text{есть отрезок} \quad \left[2 - iT, 1 - \frac{A}{(\log T)^\alpha} - iT\right],$$

$$L_2 \quad \text{есть кривая} \quad 1 - \frac{A}{(\log|t|)^\alpha} + it \quad (-T \leqslant t \leqslant -t_1),$$

$$L_3 \quad \text{есть отрезок} \quad \left[1 - \eta - it_1, 1 - \eta\right],$$

$$L_4 \quad \text{есть отрезок} \quad \left[1 - \eta, 1 - \eta + it_1\right],$$

$$L_5 \quad \text{есть кривая} \quad 1 - \frac{A}{(\log t)^\alpha} + it \quad (t_1 \leqslant t \leqslant T),$$

$$L_6 \quad \text{есть отрезок} \quad \left[1 - \frac{A}{(\log T)^\alpha} + iT,\ 2 + iT\right].$$

Известно [7], что в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{A}{(\log|t|^\alpha)} \quad (|t| \geqslant t_0) \tag{13}$$

имеет место оценка

$$L(s,\chi) \ll \log|t|. \tag{14}$$

Введем обозначение

$$F(s,x) := \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} P(s).$$

Легко видеть, что при $T \to \infty$

$$I_1 \to 0, \quad I_6 \to 0.$$

Поэтому

$$\int_0^x R(t)\,dt = Cx^2 + \Delta(x), \tag{15}$$

где

$$\Delta(x) = J_2 + I_3 + I_4 + J_5,$$

$$J_2 = (2\pi i)^{-1} \int_{-\infty}^{-t_1} F\left(1 - \frac{A}{(\log|t|)^\alpha} + it, x\right)\left(i + \frac{\alpha A}{(\log|t|)^{\alpha+1}}\right) dt,$$

$$J_5 = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{t_1}^{\infty} F\left(1 - \frac{A}{(\log|t|)^{\alpha}} + it, x\right)\left(i + \frac{\alpha A}{(\log|t|)^{\alpha+1}}\right) dt.$$

Из (14) следует, что

$$F(s,\chi) \ll x^{2-A/(\log|t|)^{\alpha}}\, t^{-2}\log|t| \quad (s \in L_2, L_5).$$

Фиксируя $\varepsilon$ с условием $0<\varepsilon<1$, имеем

$$J_2 + J_5 \ll \int\limits_{t_1}^{\infty} x^{2-A/(\log t)^{\alpha}}\, t^{-2}\log t\, dt \ll$$

$$\ll x^2 \int\limits_{t_1}^{\infty} t^{-2+\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon\log t - A\frac{\log x}{(\log t)^{\alpha}}\right)\log t\, dt \ll x^2\exp\left(-2B(\log x)^{\beta}\right),$$

где $\beta = 1/(1+\alpha) < 3/5$ и $B>0$ – некоторая константа. Очевидно,

$$I_3 + I_4 \ll x^{2-\eta} \ll x^2\exp(-2B(\log x)^{\beta}),$$

так что

$$\Delta(x) \ll x^2\exp(-2B(\log x)^{\beta}). \tag{16}$$

Получим асимптотическую формулу для $R(x)$ из (15) и (16). Имеем $(1<\xi<x/2)$

$$\begin{aligned}&\bigl|R(x) - 2Cx\bigr| \leqslant \\ &\leqslant \left|R(x) - \xi^{-1}\int\limits_{x}^{x+\xi} R(t)\,dt\right| + \left|\xi^{-1}\int\limits_{x}^{x+\xi} R(t)\,dt - 2Cx\right| = |S_1| + |S_2|.\end{aligned}$$

$S_1$ оцениваем с помощью теоремы 1 [8], в силу которой для $x^{\gamma} < \xi \leqslant x$, $0<\gamma<1/2$, имеем

$$\sum_{x<n\leqslant x+\xi} \rho(n) \ll \xi\frac{1}{\log(x+\xi)}\exp\left(\sum_{p\leqslant x+\xi}\frac{\rho(p)}{p}\right) \ll \xi.$$

Поэтому

$$|S_1| \leqslant \left|\xi^{-1}\int\limits_{x}^{x+\xi}\bigl\{R(t) - R(x)\bigr\}\,dt\right| \ll \xi.$$

Переходя к сумме $S_2$, имеем

$$S_2 = \xi^{-1}\big(C(x+\xi)^2 - Cx^2 + \Delta(x+\xi) - \Delta(x)\big) - 2Cx =$$
$$= C\xi + O\big(x^2\xi^{-1}\exp(-2B(\log x)^\beta)\big).$$

Следовательно,

$$R(x) - 2Cx \ll \xi + x^2\xi^{-1}\exp(-2B(\log x)^\beta).$$

Полагая $\xi = x\exp(-B(\log x)^\beta)$, получаем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Пусть $f(X)$ – неприводимый полином степени $m \geqslant 2$ с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Предположим, что этот полином абелев. Тогда ряд Дирихле $P(s)$ мероморфно продолжается в область (11) с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$, и имеет место асимптотика*

$$\sum_{n\leqslant x}\rho(n) = C(f)x + O\left(x\exp\left(-B(\log x)^\beta\right)\right)$$

*для некоторой константы $B > 0$ и любого фиксированного $\beta < 3/5$.*

**Замечание 1.** 1) Если верна гипотеза Римана для $L$-рядов Дирихле $L(s,\chi)$, то $P(s)$ в абелевом случае мероморфно продолжается (с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$) в полуплоскость $\sigma > 1/2$ и имеет место асимптотика

$$\sum_{n\leqslant x}\rho(n) = C(f)x + O\left(x^{1/2+\varepsilon}\right).$$

2) Для $a$-го кругового полинома $\Phi_a(X)$ имеем: степень $m = \varphi(a)$, $\mathrm{Spl}(\Phi_a(X)) = \{p \equiv 1(\mathrm{mod}\, a)\}$. Поэтому

$$\mathcal{L}(s) = \prod_{\chi(\mathrm{mod}\, a)} L(s,\chi),$$

и, следовательно, утверждение п. 1 о продолжимости $P(s)$ верно для $\Phi_a(X)$ без всяких гипотез. Без гипотезы Римана имеет место асимптотика

$$\sum_{n\leqslant x}\rho(n) = C(\Phi_a)x + O\left(x^{1-\frac{3}{\varphi(a)+6}+\varepsilon}\right).$$

## §2. Неабелевы полиномы

**2.1.** Аналоги результатов предыдущего параграфа для неабелевых полиномов могут быть получены лишь в немногих случаях. В настоящем пункте рассмотрим полиномы третьей степени.

Пусть $f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ – неприводимый полином, поле разложения $K$ которого есть расширение Галуа над $\mathbb{Q}$ с $G = \mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q}) \cong S_3$ (симметрическая группа степени 3) и содержит мнимое квадратичное поле $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ дискриминанта $D < 0$. Пусть

$$L(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s}$$

– $L$-функция Артина, ассоциированная с двумерным комплексным неприводимым представлением $\rho$ группы $G$ с кондуктором $N$, где $D \mid N$. Определим функцию $S(z)$, $z \in H$ (верхняя полуплоскость), посредством

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

Из теории Гекке–Вейля следует, что $S(z)$ является нормалированной новой формой веса 1 и характера $(D/*)$ на группе $\Gamma_0(N)$. Койке [9] доказал следующий результат: пусть $M$ – произведение всех простых чисел, делящих $a$, $b$, $c$, и пусть $p$ – любое простое такое, что

$$p \nmid MN;$$

тогда имеем

$$\rho(p) = a(p)^2 - \left(\frac{D}{p}\right). \tag{17}$$

Пусть $P_e$ – множество простых чисел, делящих $MN$; $P_*$ – множество простых чисел, не делящих $MN$; очевидно,

$$P(s) = P_e(s) \cdot P_*(s),$$

где $P_e(s)$ и $P_*(s)$ вводятся по формулам (9); $\sigma > 1$. Пусть

$$C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)^2}{n^s} \quad (\sigma > 1).$$

Хорошо известно [10], что функция $C(s)$ мероморфно продолжается на всю плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа. Кроме того, имеем соотношение

$$C(s) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} L_N(s)\, L(s, F), \tag{18}$$

где $F$ – ассоциированная с $S$ форма на GL(3) (лифт Гелбарта–Жаке; adjoint square lift, [11]), $L(s, F)$ – соответствующий $L$-ряд; $L_N(s)$ – произведение по простым $p \mid N$. Известно [11], что $L(s, F)$ – целая функция, которая удовлетворяет функциональному уравнению риманова типа. Функция $\zeta(2s)C(s)$ регулярна во всей плоскости, кроме точки $s = 1$, где она имеет простой полюс. Рассмотрим функции $C_*(s)$ и $L_*(s, (\frac{D}{\cdot}))$, полученные из $C(s)$ и $L(s, (\frac{D}{\cdot}))$ исключением их эйлеровских множителей с $p \mid MN$. Положим

$$\mathcal{L}(s) := C_*(s)\left(L_*\left(s, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)\right)^{-1}.$$

По результату Койке (17) имеем

$$P_*(s) = \mathcal{L}(s)A(s).$$

Следовательно,

$$P(s) = P_e(s)\mathcal{L}(s)A(s) \quad (\sigma > 1),$$

где $P_e(s)$, $A(s)$ аналитически продолжаются в полуплоскость $\sigma \geqslant 1/2 + \varepsilon$ как голоморфные функции и ведут себя там как $O(1)$; $\mathcal{L}(s)$ продолжается на всю плоскость как мероморфная функция. Выберем область $O$ вида (11), в которой $P(s)$ имеет единственную особенность – простой полюс в точке $s = 1$. Можно считать, что в её подобласти $O_1$ (аналоге области (13)) выполняется оценка

$$\zeta(s) \ll \log|t| \tag{19}$$

и оценка

$$\left(L\left(s, \left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)\right)^{-1} \ll \log|t|. \tag{20}$$

Покажем, что в этой подобласти

$$C(s) \ll \log|t|. \tag{21}$$

Рассмотрим $L$-функцию $(\sigma > 1)$

$$L(s,F)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^s}.$$

Из ее свойств можно вывести, что

$$\sum_{n\leqslant x}\sigma(n)\ll x^{5/7+\varepsilon}.$$

Следовательно, в подобласти $O_1$

$$L(s,F)=O(1),$$

поэтому (21) следует из формулы (18) и оценки (19). Оценки (20) и (21) в совокупности дают

$$P(s)\ll\log|t|\quad(s\in O_1).$$

Асимптотика для суммы $\sum_{n\leqslant x}\rho(n)$ получается теперь тем же способом, что и в абелевом случае.

**Теорема 2.** *Пусть $f(X)=X^3+aX^2+bX+c$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$ – неприводимый полином, поле разложения $K$ которого есть расширение Галуа над $\mathbb{Q}$ с $G=\mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})\cong S_3$ и содержит мнимое квадратичное поле $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ дискриминанта $D<0$. Тогда ряд Дирихле $P(s)$ мероморфно продолжается в полуплоскость $\sigma>1/2$ с простым полюсом в точке $s=1$ и возможными полюсами в нулях $L$-функции Дирихле $L(s,(\frac{D}{\cdot}))$, расположенных в полуплоскости $\sigma>1/2$ (если они там есть). Имеет место асимптотика*

$$\sum_{n\leqslant x}\rho(n)=C(f)x+O\left(x\exp(-B(\log x)^{\beta})\right)$$

*для некоторой константы $B>0$ и любого фиксированного $\beta<3/5$.*

**Замечание 2.** Если верна гипотеза Римана для $L(s,\chi)$, то

$$\sum_{n\leqslant x}\rho(n)=C(f)x+O\left(x^{5/7+\varepsilon}\right).$$

Если дополнительно предположить справедливость гипотезы Линделёфа для $L(s,F)$, то остаток улучшается до $O(x^{1/2+\varepsilon})$.

**2.2.** Рассмотрим полином $f(X) = X^4 - m$, где $m > 0$ – неквадратное целое число, $m = \prod_p p^{e(p)}$, $0 \leqslant e(p) \leqslant 3$. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{m})$ – поле, порожденное $\sqrt{-1}$ и $\sqrt[4]{m}$ над $\mathbb{Q}$. Тогда $K$ является расширением Галуа над $\mathbb{Q}$ степени 8 и его группа Галуа $G = \mathrm{Gal}\,(K/\mathbb{Q})$ изоморфна диэральной группе $D_4$ порядка 8. Пусть

$$L(s, \rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, n^{-s}$$

– $L$-функция Артина, ассоциированная с двумерным комплексным неприводимым представлением $\rho$ группы $G$ с кондуктором $N$. Определим функцию $S(z)$, $z \in H$, посредством

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)\, e^{2\pi i n z}.$$

Из теории Гекке–Вейля следует, что $S(z)$ является нормализованной новой формой веса 1 и характера $\chi_4(n)$ на группе $\Gamma_0(N)$.

Ишии [12] доказал следующий результат: пусть $m_0$ – бесквадратная часть $m$, тогда для простого $p$ с условием $p \nmid N$ имеем

$$\rho(p) = 1 + (m_0/p) + a(p). \tag{22}$$

Пусть $P_e$ – множество простых чисел, делящих $N$; $P_*$ – множество простых чисел, не делящих $N$; очевидно

$$P(s) = P_e(s) P_*(s),$$

где $P_e(s)$ и $P_*(s)$ вводятся по формулам (9); $\sigma > 1$. Рассмотрим функции

$$\zeta_*(s), L_*\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right), \quad L_*(s, \rho),$$

полученные из функций

$$\zeta(s), L\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right), \quad L(s, \rho) \tag{23}$$

исключением их эйлеровских множителей с $p \mid N$. Пусть

$$\mathcal{L}(s) := \zeta_*(s) L_*\left(s, \left(\frac{m_0}{\cdot}\right)\right) L_*(s, \rho).$$

По результату Ишии (22) имеем

$$P_*(s) = \mathcal{L}(s)A(s);$$

следовательно,

$$P(s) = P_e(s)\mathcal{L}(s)A(s) \quad (\sigma > 1), \tag{24}$$

где $P_e(s)$, $A(s)$ аналитически продолжаются в полуплоскость $\sigma \geqslant 1/2+\varepsilon$ как голоморфные функции и ведут себя там как $O(1)$. Свойства функций (23) показывают, что $\mathcal{L}(s)$ продолжается на всю плоскость как мероморфная функция. Можно утверждать [13], что на прямой $s = 1/2+\varepsilon+it$ справедлива оценка

$$P(s) \ll (|t|+1)^{2/3+\varepsilon}. \tag{25}$$

Асимптотику для суммы $\sum_{n\leqslant x}\rho(n)$ получаем с помощью формулы обращения и (25).

**Теорема 3.** *Пусть $f(X) = X^4 - m$, где $m > 0$ – неквадратное число, $m = \prod\limits_p p^{e(p)}$, где $0 \leqslant e(p) \leqslant 3$. Тогда ряд Дирихле $P(s)$ мероморфно продолжается ы полуплоскость $\sigma > 1/2$ с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$. Имеет место асимптотика*

$$\sum_{n\leqslant x}\rho(n) = C(f)x + O\left(x^{7/10+\varepsilon}\right).$$

**Замечание 3.** В случае справедливости гипотезы Линделёфа для $L(s,\chi)$ и $L(s,\rho)$ остаток улучшается до $O(x^{1/2+\varepsilon})$.

**2.3.** Пусть $m > 0$ – бесквадратное число, $\varepsilon_m$ – фундаментальная единица поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$; будем рассматривать лишь те $m$, для которых $N(\varepsilon_m) = +1$. Рассмотрим поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{\varepsilon_m})$ – расширение Галуа над $\mathbb{Q}$ степени 16. Группа Галуа $G = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ порождается тремя элементами $\sigma$, $\varphi$, $\psi$ с определяющими соотношениями

$$\sigma^4 = \varphi^2 = \psi^2 = 1, \quad \varphi\psi = \psi\varphi, \quad \psi\sigma\psi = \varphi\sigma\varphi = \sigma^3.$$

Пусть

$$L(s,\rho_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(n)\, n^{-s}$$

– $L$-функция Артина, ассоциированная с двумерным комплексным неприводимым представлением $\rho_j$ группы $G$ с кондуктором $N_j$ $(j = 1, 2)$. С $L(s, \rho_j)$ связана параболическая форма

$$S_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_j(n)\, e^{2\pi i n z}$$

– нормализованная новая форма веса 1 и характера $(-m/\cdot)$ на группе $\Gamma_0(N_j)$ $(j = 1, 2)$. Пусть $t = tr(\varepsilon_m)$; $f$ и $e$ – бесквадратные части $t + 2$ и $m(t + 2)$ соответственно;

$$f(X) = (X^4 - \varepsilon_m)(X^4 - \varepsilon_m^{-1}) = X^8 - tX^4 + 1;$$

$D$ – дискриминант $f(X)$.

В работе [14] доказан следующий результат: для простого $p$ с условием $p \nmid D$ имеем

$$\rho(p) = 1 + (m/p) + (e/p) + (f/p) + a_1(p) + a_2(p).$$

Пусть $P_e$ – множество простых чисел, делящих $D$; $P_*$ – множество простых чисел, не делящих $D$. Дальнейшие рассуждения проводим, как в предыдущем пункте, только теперь

$$\mathcal{L}(s) := \zeta_*(s) L_*\left(s, \left(\frac{m}{\cdot}\right)\right) L_*\left(s, \left(\frac{e}{\cdot}\right)\right) L_*\left(s, \left(\frac{f}{\cdot}\right)\right) L_*(s, \rho_1)\, L_*(s, \rho_2)$$

и вместо (25) имеет место оценка

$$P\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + it\right) \ll (|t| + 1)^{4/3+\varepsilon}.$$

Она доказывается на основании формулы (аналога (24))

$$P(s) = P_e(s)\mathcal{L}(s)A(s) \quad (\sigma > 1),$$

используемой также для аналитического продолжения $P(s)$ в полуплоскость $\sigma > 1/2$, и результатов [13].

**Теорема 4.** *Пусть $m > 0$ – бесквадратное число, $\varepsilon_m$ – фундаментальная единица поля $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$, причем $N(\varepsilon_m) = +1$;*

$$f(X) = (X^4 - \varepsilon_m)(X^4 - \varepsilon_m^{-1}) = X^8 - tX^4 + 1.$$

*Тогда ряд Дирихле $P(s)$ мероморфно продолжается в полуплоскость $\sigma > 1/2$ с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = 1$. Имеет место асимптотика*

$$\sum_{n \leqslant x} \rho(n) = C(f)x + O\left(x^{11/14+\varepsilon}\right).$$

**Замечание 4.** В случае справедливости гипотезы Линделёфа для $L(s,\chi)$ и $L(s,\rho)$ остаток улучшается до $O(x^{1/2+\varepsilon})$.

## Литература


1. P. Erdös, *On the sum* $\sum_{k=1}^{x} d(f(k))$, J. London Math. Soc. **27**, No. 1 (1952), 7–15.
2. R. W. K. Odoni, *A problem of Rankin on sums of powers of cusp-form coefficients,* J. London Math. Soc. **44**, No. 2 (1991), 203–217.
3. E. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplicative Funktionen. I,* Math. Ann. **143**, No. 1 (1961), 75–102.
4. B. W. Jones, *The arothmetic theory of quadratic forms,* Baltimore, 1950.
5. A. Ivić, *The Riemann zeta-function,* New York etc., 1985.
6. Д. Исмоилов, *Суммирование числа решений квадратичного сравнения,* Докл. АН Тадж. ССР. **21**, No. 9 (1978), 10–13.
7. K. Prachar, *Primzahlverteilung,* Berlin, 1957; русский перевод: К. Прахар, Распределение простых чисел, М., 1967.
8. P. Shiu, *A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions,* J. reine und angew. Math. **313** (1980), 161–170.
9. M. Koike, *Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves,* Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
10. R. A. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function* $\tau(n)$ *and similar arithmetical functions. II,* Proc. Cambridge Phil. Soc. **35**, No. 3 (1939), 357–372.
11. S. Gelbart, H. Jacquet, *A relation between automorphic representations of* GL(2) *and* GL(3)*,* Ann. Sci. École Normale Sup. 4$^e$ série **11**, No. 4 (1978), 471–552.
12. N. Ishii, *Cusp forms of weight one, quadratic reciprocity and elliptic curves,* Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
13. C. S. Yoganandra, *Transformation formula for exponential sums involving Fourier coefficients of modular forms,* Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **103**, No. 1 (1993), 1–25.
14. T. Hiramatsu, N. Ishii, *Quartic residuacity and cusp forms of weight one,* Comment. Math. Univ. Sancti Pauli **34**, No. 1 (1985), 913–103.


С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@ pdmi.ras.ru

Поступило 23 октября 1998 г.